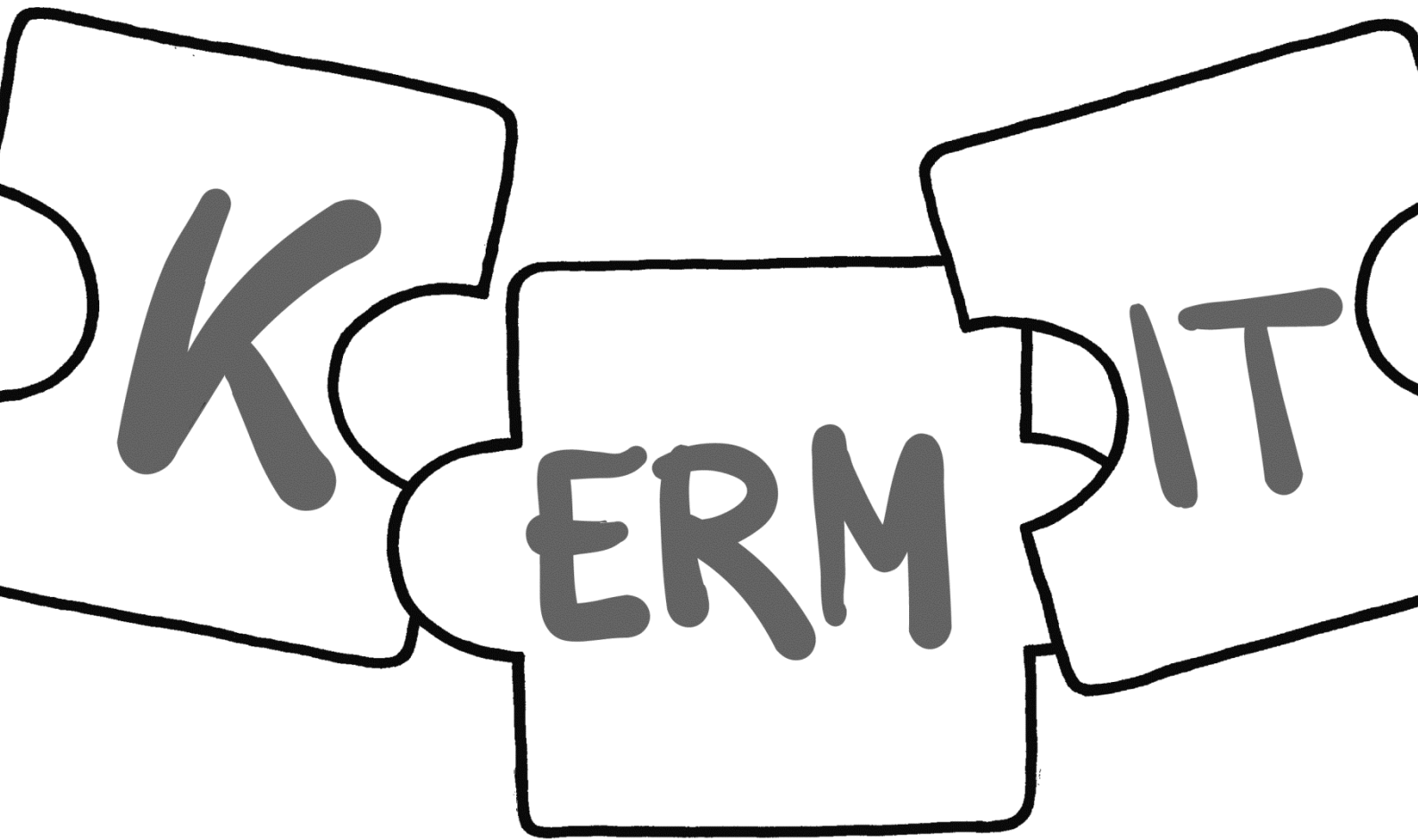




Kompetenzen ermitteln

Mathematik

Didaktisches Material

2026

3



Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	1
2.	Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards	1
2.1	Die Bildungsstandards Mathematik	1
2.2	Kompetenzstufen im Fach Mathematik	2
3.	Die Leitidee <i>Zahlen und Operationen</i>	5
3.1	Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein?	5
3.2	Zahldarstellung, Orientierung im Zahlenraum, Zahlvorstellung	5
3.3	Rechenoperationen verstehen und beherrschen	5
3.4	Anwendung des Rechnens in Kontexten	6
3.5	Überschlagendes Rechnen und kritisches Überprüfen von Ergebnissen	7
4.	Die Leitidee <i>Raum und Form</i>	8
4.1	Worum geht es in diesem Inhaltsbereich?	8
4.2	Raumvorstellung	8
4.3	Begriffsverständnis	9
4.4	Geometrisches Zeichnen	11
5.	Weitere Anregungen für den Unterricht	12
6.	Worum geht es im Inhaltsbereich <i>Zahlen und Operationen</i> allgemein?	14
6.1	Aufgaben zu Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen	19
	Aufgabe 2 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	19
	Aufgabe 4 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	19
	Aufgabe 7 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	20
	Aufgabe 1 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	20
	Aufgabe 1 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	21
	Aufgabe 5 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	22
	Aufgabe 2 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	22
	Aufgabe 3 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	23
	Aufgabe 13 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	23
	Aufgabe 6 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	24
	Aufgabe 4 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	24
	Aufgabe 8 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	25
6.1.1.	Aufgabenbezogener Kommentar	26
6.1.2	Mögliche Schwierigkeiten	28
6.1.3	Anregungen für den Unterricht	32

6.2 Aufgaben zu Rechnen.....	40
Aufgabe 3 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	40
Aufgabe 9 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	40
Aufgabe 7 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	41
Aufgabe 12 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	41
Aufgabe 10 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	42
Aufgabe 13 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	42
Aufgabe 6 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	43
Aufgabe 14 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	44
6.2.1 Aufgabenbezogener Kommentar	44
6.2.2 Mögliche Schwierigkeiten	45
6.2.3 Anregungen für den Unterricht	49
6.3 Aufgaben zu In Kontexten rechnen.....	56
Aufgabe 10 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	57
Aufgabe 11 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	57
6.3.1 Aufgabenbezogener Kommentar	58
6.3.2 Mögliche Schwierigkeiten	58
6.3.3. Anregungen für den Unterricht	60
6.4 Aufgaben zu Überschlagen und Plausibilitätsprüfung.....	64
Aufgabe 5 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	64
Aufgabe 11 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	64
Aufgabe 9 in Modul A <i>Zahlen und Operationen</i>	65
Aufgabe 8 in Modul B <i>Zahlen und Operationen</i>	66
6.4.1 Aufgabenbezogener Kommentar	67
6.4.2 Mögliche Schwierigkeiten	68
6.4.3 Anregungen für den Unterricht	69
7. Worum geht es im Inhaltsbereich <i>Raum und Form</i> allgemein?.....	74
7.1 Aufgaben zu Räumliches Vorstellungsvermögen.....	77
Aufgabe 5 in Testheft B	77
Aufgabe 13 in Testheft C	78
Aufgabe 5 in Testheft C	78
Aufgabe 3 in Testheft C	79
Aufgabe 2 in Testheft C	80
Aufgabe 4 in Testheft C	81
7.1.1 Aufgabenbezogener Kommentar	81

7.1.2 Mögliche Schwierigkeiten	83
7.1.3 Anregungen für den Unterricht	85
7.2 Aufgaben zu Körper und Flächen	93
Aufgabe 13 in Testheft B	93
Aufgabe 11 in Testheft B	94
Aufgabe 1 in Testheft B	94
Aufgabe 7 in Testheft B	95
Aufgabe 4 in Testheft B	96
Aufgabe 14 in Testheft C	97
Aufgabe 10 in Testheft C	97
Aufgabe 12 in Testheft C	98
7.2.1 Aufgabenbezogener Kommentar	99
7.2.2 Mögliche Schwierigkeiten	100
7.2.3 Anregungen für den Unterricht	105
7.3 Aufgaben zu Symmetrie und Abbildungen.....	113
Aufgabe 2 in Testheft B	113
Aufgabe 9 in Testheft B	114
Aufgabe 8 in Testheft B	115
Aufgabe 10 in Testheft B	115
Aufgabe 11 in Testheft C	116
Aufgabe 8 in Testheft C	117
Aufgabe 7 in Testheft C	118
Aufgabe 6 in Testheft C	119
7.3.1 Aufgabenbezogener Kommentar	119
7.3.2 Mögliche Schwierigkeiten	121
7.3.3 Anregungen für den Unterricht	124
7.4 Aufgaben zu Flächen- und Rauminhalten	132
Aufgabe 12 in Testheft B	132
Aufgabe 3 in Testheft B	132
Aufgabe 6 in Testheft B	133
Aufgabe 14 in Testheft B	133
Aufgabe 9 in Testheft C	134
Aufgabe 1 in Testheft C	135
7.4.1 Aufgabenbezogener Kommentar	136
7.4.2 Mögliche Schwierigkeiten	137

7.4.3 Anregungen für den Unterricht	139
8. Literaturverzeichnis	146
9. Abbildungsverzeichnis	147
10. Webseiten	147
11. Anhang	149

Allgemeine Hinweise:

Autorinnen und Autoren¹ der fachdidaktischen Orientierungen sind Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Prof. Dr. Kristina Reiss und Dr. Heino Reimers.

Die KMK-Bildungsstandards in der Fassung von 2004 wurden überarbeitet und in der Fassung im Jahr 2022 veröffentlicht. Die vorliegenden Testaufgaben beziehen sich letztmalig auf die Bildungsstandards von 2004. Ab 2027 werden die VERA-Aufgaben auf einem überarbeiteten Kompetenzstufenmodell verortet. Weitere Informationen finden Sie hier:

<https://www.igb.hu-berlin.de/de/bista/entwicklung/entstehung/>

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien auch online finden können?



Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiberinnen und Betreiber verantwortlich.

¹ Aufgrund der dynamischen Diskussion zum sprachlichen Umgang mit geschlechtlicher Vielfalt sowie der Positionierung des Rats für deutsche Rechtschreibung und der Schulbehörden einiger Länder gegen Schreibweisen mit Wortbinnenzeichen (z. B. Genderstern) verwenden wir Doppelnennungen (z. B. Schülerinnen und Schüler) oder geschlechtsneutrale Formulierungen (z. B. Lehrkräfte). Hiermit sind ausdrücklich Personen aller Geschlechter gemeint.

1. Einleitung

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Ferner werden die mathematischen Kompetenzbereiche *Zahlen und Operationen* sowie *Raum und Form* erläutert und an konkreten Aufgabenbeispielen illustriert. Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Bildungsstandards vorgegebenen Ziele bietet. Dabei wird auf die beiden Domänen *Zahlen und Operationen* sowie *Raum und Form* kurz eingegangen. Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Aufgaben sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren (Teil III) zu finden.

2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

2.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schülerinnen und Schüler zu verbessern. Entsprechend sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind damit auch Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,²
- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,
- Darstellen,

² In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf) ist die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten“ nicht enthalten. Im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik für den Primarbereich wurden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten“ ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/de/bista/entwicklung/definition>.

- Modellieren.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf fünf mathematische Leitideen:

- *Zahlen und Operationen,*
- *Raum und Form,*
- *Muster und Strukturen,*
- *Größen und Messen,*
- *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.*

Diese Leitideen sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (Kultusministerkonferenz, 2005).

2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Ausrichtung von Mathematikunterricht. Im Sinne der „Output-Orientierung“ ist von Interesse, was Schülerinnen und Schüler verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge hinsichtlich der allgemeinen und inhaltsbezogenen Kompetenzen „tatsächlich können“.

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schülerinnen und Schüler – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen „Kompetenzstufen“ zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilfreiche Orientierungen geben kann.

Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell³ erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller, 2012; Reiss & Winkelmann, 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der mathematischen Kompetenz von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

³ Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich wurden 2004 verabschiedet und 2022 weiterentwickelt. Die bisher vorliegenden Kompetenzstufenmodelle, auf die sich das vorliegende didaktische Material bezieht, wurden auf Basis der Bildungsstandards von 2004 entwickelt. Mit der Normierung neu entwickelter Testaufgaben nach den Bildungsstandards von 2022 werden ab 2027 neue Kompetenzstufenmodelle vorliegen.

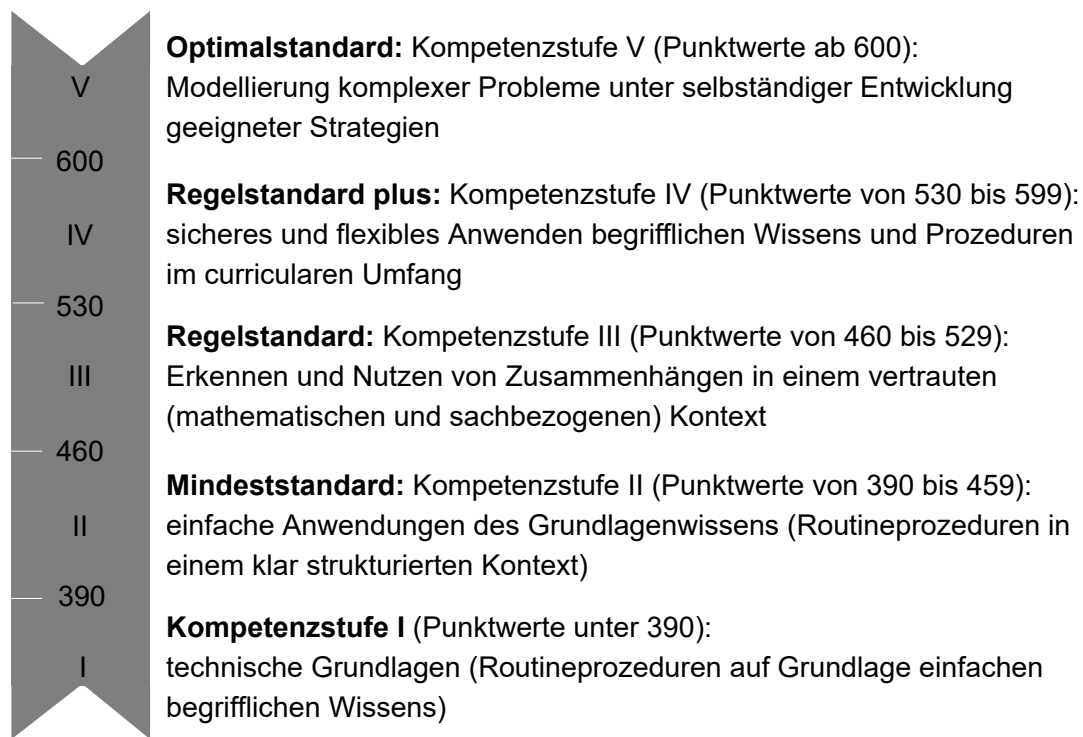


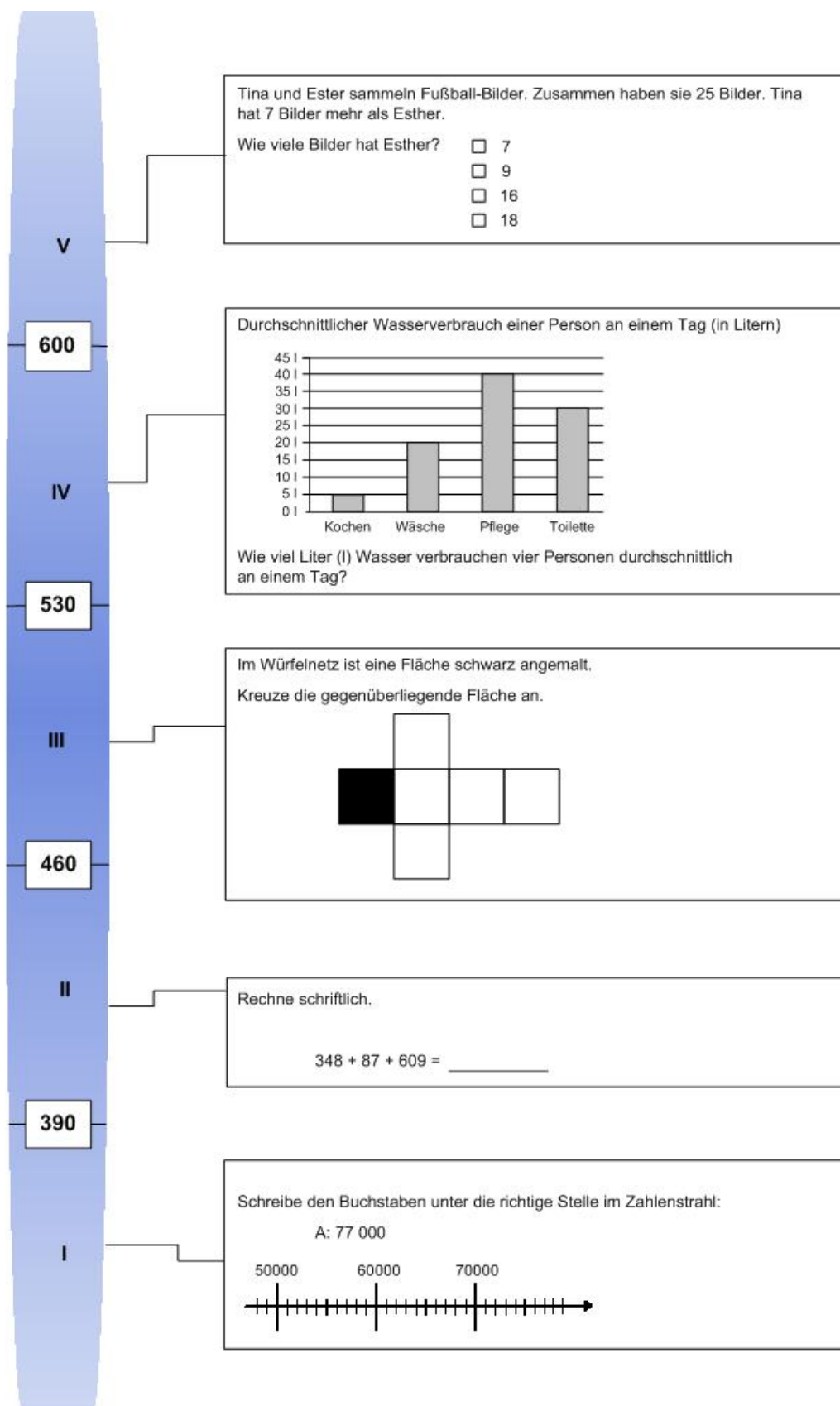
Abbildung 1. Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.

Mindeststandard. Für den Mindeststandard wurde das obere Ende von Kompetenzstufe I als Schwellenwert gewählt. Alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts stellen nur solche Anforderungen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schülerinnen und Schülern des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss. Deshalb spricht man hier vom Mindeststandard des Bildungsgangs. Schülerinnen und Schüler, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

Regelstandard. Der *Regelstandard*, den die Schülerinnen und Schüler zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schülerinnen und Schüler, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der Kultusministerkonferenz (KMK) festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch von sehr schwachen Schülerinnen und Schülern gelöst werden können.

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet:



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben, siehe S. 14 des Kompetenzstufenmodells in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/de/bista/entwicklung/definition/>

3. Die Leitidee *Zahlen und Operationen*

3.1 Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein?

In der Alltagswelt begegnen Kinder schon früh Zahlen in verschiedenen Kontexten. Es ist Aufgabe des Mathematikunterrichts in der Primarstufe, diese Vorerfahrungen aufzugreifen, zu strukturieren und stetig weiterzuentwickeln. Daher spielt der Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen* in der Grundschule eine zentrale Rolle. Er umfasst Kompetenzen zu folgenden Bereichen:

- Zahldarstellungen, Orientierung im Zahlenraum, Zahlvorstellung
- Rechenoperationen verstehen und beherrschen, insbesondere auch die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Operationen zu verstehen
- Anwendung des Rechnens in Kontexten
- Überschlagendes Rechnen und kritisches Prüfen von Ergebnissen

3.2 Zahldarstellung, Orientierung im Zahlenraum, Zahlvorstellung

Dieser Kompetenzbereich bildet sowohl die Grundlage für die weiteren Bereiche der Kompetenz *Zahlen und Operationen* als auch für weitere Kompetenzbereiche der Bildungsstandards insgesamt. Es ist daher besonders wichtig, dass die Schüler*innen adäquate Vorstellungen zum dekadischen Stellenwertsystem aufbauen und ein Bewusstsein für Analogien im Aufbau von Zehnern, Hundertern usw. entwickeln. Für ein tragfähiges Verständnis dieses Stellenwertsystems müssen **Bündelung** und **Stellenwert** als die beiden zentralen Prinzipien erkannt werden (Padberg & Benz, 2011, S. 86). Dem Einsatz geeigneter Arbeitsmittel kommt dabei eine wichtige Bedeutung zu.

Die Kinder sollen verschiedene Darstellungsformen von Zahlen kennen und diese zueinander in Beziehung setzen. Zu dieser Kompetenz gehört auch die Orientierung im Zahlenraum (*Welche Zahl ist nahe bei 389? Welche von zwei Zahlen ist größer als die andere?*) sowie das Ordnen und Beschreiben von Zahlen (vgl. Abbildung 3).

Ordne die Zahlen nach der Größe. Beginne mit der kleinsten Zahl.

735	375	573	357	753
-----	-----	-----	-----	-----

_____ < _____ < _____ < _____ < _____

Abbildung 3. Aufgabe „Zahlengröße“, KERMIT-3 Mathematik 2016

3.3 Rechenoperationen verstehen und beherrschen

Im Bereich *Zahlen und Operationen* ist ein wichtiger Aspekt, die einzelnen Rechenoperationen zu verstehen, deren Zusammenhänge zu begreifen und anwenden zu können. Dieser Bereich ist relativ komplex und umfasst neben dem Verständnis für die Grundrechenarten auch verschiedene Formen des Rechnens (z. B. Kopfrechnen, schriftliche Verfahren), verschiedene Herangehensweisen, wie mündliche und halbschriftliche Strategien, aber auch das Beherrschen von Grundaufgaben. Durch die Grundkenntnisse zum Aufbau des Stellenwertsystems und automatisierte Wissensbestandteile wie das Einspluseins und Einmaleins können Strategien des Kopfrechnens auf analoge Aufgaben übertragen werden. Flexibles Rechnen ist insbesondere bei mündlichen und halbschriftlichen Verfahren von Vorteil, um Aufgaben effektiv lösen zu können. Um dem Anspruch gerecht zu werden, Aufgaben sicher und flexibel im Kopf oder halbschriftlich zu lösen, „ist vielfältiges Wissen über Zahlen und Zahlbeziehungen, über Verknüpfungsmöglichkeiten in Verbindung mit Rechengesetzen Voraussetzung“ (Walther, van den Heuvel-Panhuizen, Granzer & Köller, 2012, S. 70).

Auch schriftlich dargestellte Algorithmen zur Addition, Subtraktion und Multiplikation sollen entsprechend verstanden und ausgeführt werden. Neben dem Anwenden geeigneter Verfahren spielt auch das Analysieren und Sprechen über Zahleigenschaften eine Rolle, das hier wiederum auf einem soliden Grundverständnis der Operation aufbaut (siehe dazu Abbildung 4).

Jonas und seine 5 Freunde teilen sich 30 Kaugummis gerecht untereinander auf.

Jonas sagt: „Jeder bekommt 6 Kaugummis.“

Hat Jonas recht? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.



Abbildung 4. Aufgabe „Kaugummis teilen“, KERMIT-3 Mathematik 2023

3.4 Anwendung des Rechnens in Kontexten

Ob Kinder ein Verständnis der Rechenoperationen erworben haben, zeigt sich insbesondere darin, dass sie die verschiedenen Operationen sachgerecht in kontextbasierten Aufgabenstellungen anwenden können.

Entscheidend ist, dass die Schüler*innen eine Vorstellung zur dargelegten Sachsituation entwickeln, sie in den passenden mathematischen Kontext übersetzen (siehe die Aufgabe in Abbildung 5), mit den ihnen bekannten mathematischen Mitteln (Rechenstrategien, -gesetze etc.) lösen, auf die Sachsituation rückbeziehen und auf Plausibilität überprüfen (siehe 3.5).

Verbinde jeden Text mit einer passenden Aufgabe.

In der Klasse 3a sind 24 Kinder.
Sie stellen sich in Dreiergruppen auf.

In der Klasse 3a sind 24 Kinder.
Davon sind 3 Kinder heute nicht da.

In der Klasse 3a sind 24 Kinder.
Zum Wandertag werden sie von
3 Erwachsenen begleitet.

Es gibt 3 Klassen.
In jeder Klasse sind 24 Kinder.

$$24 + 3$$

$$24 \cdot 3$$

$$24 : 3$$

$$24 - 3$$

Abbildung 5. Aufgabe „24 Kinder verbinden“, KERMIT-3 Mathematik 2023

3.5 Überschlagendes Rechnen und kritisches Überprüfen von Ergebnissen

Schriftliches Rechnen, aber auch das Rechnen mit digitalen Instrumenten kann dazu führen, dass die Ergebnisse nicht von einer Vorstellung der richtigen Größenordnung begleitet sind. Deshalb ist es umso wichtiger, mittels Überschlagsrechnungen Ergebnisse auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen. Generell sollte mit jeder Lösung einer Aufgabe (v. a. auch bei Sachaufgaben) die kritische Ergebnisüberprüfung auf Plausibilität (*Kann das stimmen?*) einhergehen.

4. Die Leitidee *Raum und Form*

4.1 Worum geht es in diesem Inhaltsbereich?

Die ersten geometrischen Kompetenzen entwickeln sich bei Kindern bereits ab der Geburt in der Interaktion mit ihrer Umgebung und durch eine vielfältige Wahrnehmung der Lebenswelt. Durch die Verarbeitung visueller Erfahrungen in Verbindung mit haptischen Reizen entstehen so z. B. Grundlagen für die Orientierung im Raum oder auch basale kognitive Fähigkeiten zur Klassifizierung von Objekten.

In der Schule sind diese Vorerfahrungen in vielen Bereichen Voraussetzung für gelingendes Lernen, so z. B. das sichere Erkennen von Raum-Lage-Beziehungen als Grundlage für das Lesen und Schreiben. Im Mathematikunterricht werden die vorhandenen geometrischen Fähigkeiten im Hinblick auf Objekte wie Flächen und Körper und darauf bezogene Prozesse – Bewegen (Abbildungen) – sowie das räumliche Vorstellungsvermögen allgemein anhand konkreter Handlungserfahrungen vertieft, systematisch geordnet, genutzt und spiralcurricular erweitert.

Übergreifend spielen dabei das Begriffsverständnis und das geometrische Zeichnen eine Rolle. Diese beiden Aspekte bedürfen, ebenso wie die in alle Bereiche hineinspielende Raumvorstellung, einer kontinuierlichen Förderung, die möglichst früh beginnen sollte.

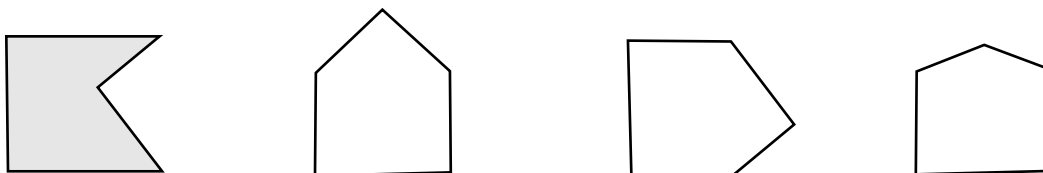
4.2 Raumvorstellung

Raumvorstellung umschreibt die Fähigkeit, „räumliche Objekte“ in Gedanken zu sehen und dabei mit den entstehenden Vorstellungsbildern aktiv umzugehen, etwa im Sinne einer mentalen Bewegung oder einer mentalen Vergrößerung bzw. Verkleinerung.

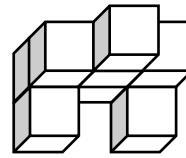
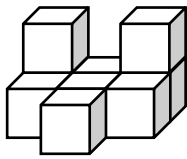
Mit „räumlichen Objekten“ assoziiert man dabei zumeist Objekte des dreidimensionalen Erfahrungsraumes, gemeint sind aber auch Objekte in einer Ebene oder in anderen „Räumen“, etwa auf einer Geraden oder auf einer Kugeloberfläche. In der Mathematik werden viele Objekte in „Räumen“ organisiert, etwa in „Zahlenräumen“, so dass der Begriff der Raumvorstellung dort eine umfassende Bedeutung erhält, der auch die Schulmathematik betrifft.

Diese Raumvorstellung ist bei den Schüler*innen i. d. R. sehr unterschiedlich ausgeprägt; so gelingt z. B. das gedankliche Lösen kopfgeometrischer Aufgaben über mentales Operieren in ganz unterschiedlichem Maße. Da aber auch viele geometrische Sachverhalte über die räumliche Vorstellung erworben werden, ist die Förderung dieses Kompetenzbereichs von besonderer Bedeutung.

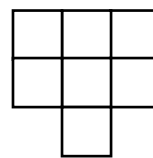
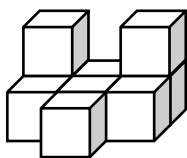
So kann z. B. die Gewinnung der Anzahl der Ecken eines Quaders oder einer vierseitigen Pyramide durch Abzählen an einem imaginären Objekt erfolgen. Auch Lagebeziehungen können in Gedanken verändert werden. Dies ist bei folgender Aufgabe erforderlich. Dort muss ein passendes Teil identifiziert werden:



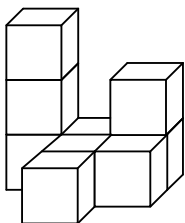
Die Fähigkeit, mental den Standort wechseln zu können, ermöglicht es, Bewegungen eines Körpers, hier eine Rotationsabbildung, als solche zu identifizieren:



Auch die Beziehung zwischen der dreidimensionalen Darstellung eines Objektes und der zweidimensionalen Ansicht von oben kann mithilfe des räumlichen Vorstellungsvermögens hergestellt werden:



Diese Fähigkeit wird unter anderem bei der Zuordnung des richtigen Bauplans zu einem Körper benötigt:



3	1	1
0	1	1
0	1	0

3	1	2
1	1	1
0	1	0

3	1	2
0	0	1
0	1	0

3	1	1
0	1	1
0	1	0

4.3 Begriffsverständnis

Um Mathematik zu verstehen und im Unterricht über mathematische Sachverhalte zu sprechen, bedarf es eines einheitlichen Begriffsverständnisses. „Begriff“ ist dabei nicht allein als formales Unterscheidungsmerkmal im Sinne einer Wort-Sachverhalt-Zuordnung zu sehen. Mathematische Begriffe müssen mit Grundvorstellungen verknüpft werden. Vollrath (1984) unterscheidet **fünf Stufen des Begriffsverständnisses**, von denen primär die ersten drei von Relevanz für die Grundschule sind:

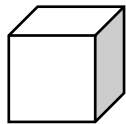
Intuitives Begriffsverständnis

Das Kind nimmt den Begriff als Phänomen in seiner Umwelt wahr. Dies ist die Grundlage für darauf aufbauende Begriffsbildungsprozesse. Im Unterricht ist daher der handelnde Erwerb von Erkenntnissen durch praktische Tätigkeiten wichtig, also das Anknüpfen an reale Erfahrungen aus der Umwelt.

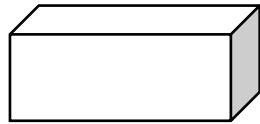
Inhaltliches Begriffsverständnis

Der Begriff wird mit Eigenschaften verbunden, die in unterschiedlichen Darstellungen oder Objekten zum selben Begriff vorhanden sind. So kann z. B. ein Würfel anhand des Wissens über seine Eigenschaften als solcher identifiziert werden, unabhängig von seiner Größe oder Lage. Besonders stark verankert ist solches Wissen, wenn es durch den Vergleich mehrerer ähnlicher Abbildungen eigenständig angewandt werden kann:

Was ist die Besonderheit von Figur 1 gegenüber Figur 2, 3 und 4?



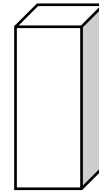
Figur 1



Figur 2



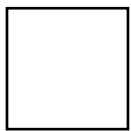
Figur 3



Figur 4

Integriertes Begriffsverständnis

Der Begriff ist Teil eines Begriffsnetzes, innerhalb dessen Zusammenhänge erkannt werden können. Diese Fähigkeit findet in der Grundschule Anwendung, wenn Begriffshierarchien, wie bspw. die im Folgenden geschilderte, erkannt und begründet werden können:



Ein Quadrat ist zugleich ...



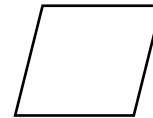
... ein Rechteck,

Ein Rechteck ist zugleich ...



... ein Parallelogramm,

... ein Parallelogramm.



... eine Raute.

Für die Primarstufe von geringerer Bedeutung im Zusammenhang mit *Raum und Form* sind die Stufen 4 und 5:

Formales Begriffsverständnis

Dies erfordert die Kenntnis verschiedener Definitionen und die Befähigung zur Anwendung im Rahmen von Beweisen.

Strukturelles Begriffsverständnis

Dieses weit gehende Begriffsverständnis, in dem der Begriff als strukturierbares Objekt erkannt und behandelt wird, setzt u. a. die Kenntnis wichtiger Verknüpfungen von Funktionen voraus.

4.4 Geometrisches Zeichnen

Das geometrische Zeichnen ist wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts der Grundschule und entfaltet zugleich eine propädeutische Wirkung im Hinblick auf das Lernen und Arbeiten in den weiterführenden Schulen, u. a. als Grundlage für die Erstellung komplexerer Konstruktionen oder für die Darstellung in Koordinatensystemen. In der Primarstufe werden zunächst einfache geometrische Objekte zeichnerisch dargestellt.

In der praktischen Umsetzung fördert das geometrische Zeichnen die Feinmotorik der Kinder ebenso wie ihr ästhetisches Empfinden und kann so zu sorgfältiger und exakter Vorgehensweise motivieren. Durch das zeichnerische Nachvollziehen können geometrische Erkenntnisse erlangt, vertieft und gefestigt werden. Dies zeigt sich z. B. bei der Durchführung einer Achsenspiegelung an einer diagonal liegenden Achse. Sie erfordert die Kenntnis und konsequentere Anwendung der Eigenschaften einer Achsenspiegelung als der „Standardfall“ einer senkrecht liegenden Achse. Neben dem Verstehen der Aufgabenstellung und dem Wissen um die durchzuführende Zeichenhandlung ist zusätzlich die motorische Fähigkeit zur zeichnerischen Umsetzung Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung einer solchen Aufgabenstellung.

In der Grundschule findet das geometrische Zeichnen u. a. Anwendung in Form von Freihandzeichnungen, Zeichnen von Strecken, geometrischen Figuren und Mustern, Verbinden von Punkten, Vergrößerungen und Verkleinerungen und im Zeichnen und Vervollständigen symmetrischer Figuren. Werden räumliche Figuren gezeichnet, beschränkt sich dies meist auf die Konstruktion von Schrägbildern einfacher mathematischer Körper (z. B. Quader).

Den didaktischen Kommentaren zu den einzelnen Bereichen in Teil III der Didaktischen Handreichungen ist jeweils eine Tabelle vorgeschaltet, aus der ersichtlich wird, ob bei den Aufgaben zusätzlich zur eigentlichen Anforderung Raumvorstellung, Begriffsverständnis und/oder geometrisches Zeichnen notwendig sind. Aufgaben, die mit „(x)“ gekennzeichnet sind, beschreiben Aufgaben, in welchen die jeweilige Fähigkeit die Lösung unterstützen kann, aber nicht muss. Aufgaben, die mit „x“ gekennzeichnet sind, können ohne die jeweilige Fähigkeit kaum gelöst werden.

5. Weitere Anregungen für den Unterricht

Aufgaben wie die in VERA-3 können nicht nur zur Feststellung des Leistungsstandes, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den Schülerinnen und Schülern zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler angepasste Auswahl kompetenzorientierter Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so belegen viele empirische Untersuchungen – ausreichend Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse nationaler und internationaler Leistungsvergleiche weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Kinder und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus.

Im Kompetenzbereich *Zahlen und Operationen* ist das Sprechen über Strategien und Lösungswege wichtig. Zum einen beschreiben Lernende ihre Vorgehensweisen (Wie gehe ich vor?) und zum anderen begründen sie, weshalb sie so vorgehen (Warum wähle ich diese Strategie? Diesen Rechenweg?). Im Sinne eines Voneinander-Lernens wird so das Strategierepertoire erweitert und Unterricht bietet eine Möglichkeit, die prozessbezogenen Kompetenzen Kommunizieren und Argumentieren zu fördern und vertiefen.

Von zentraler Bedeutung ist in diesem Bereich der Aufbau von Vorstellungen zu Zahlen und Operationen sowie deren Beziehungen zueinander ebenso wie der verständnisorientierte Umgang damit, der schließlich in ein sicheres Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren mündet.

Im Kompetenzbereich *Raum und Form* kommt der Sprachbildung besondere Bedeutung zu, da im Gegensatz zur Arithmetik keine formalen Darstellungen entwickelt werden. Bereichsbezogen geht es z.B. darum, sich im umgebenden Raum oder in einem gegebenen Raum aus der eigenen Perspektive zu orientieren, und dies mit einem sicher gehandhabten Wortschatz kennzeichnen zu können, sowohl in Ortsbezeichnungen als auch in Richtungsbezeichnungen, sowohl aus der eigenen Perspektive als auch aus der von anderen (z. B. „oben, unten, nach vorn, nach rechts, neben, unter“). Entscheidend ist darüber hinaus, dass Formen und Figuren nicht nur erkannt und beschrieben werden, sondern dass an ihnen auch konkret und mental Änderungen vorgenommen werden können: „Ich stell mir vor, ich dreh‘ das rechtsrum.“ Dies ist der Kern des integrierenden Konzepts der Raumvorstellung, das nicht nur – im engeren Sinne – geometrische Gestalten betrifft, sondern auch eine Voraussetzung für das Verstehen veranschaulichender Formen in der Arithmetik und für das Schätzen und Messen von Größen ist.

Die im Folgenden stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden⁴.

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die den Kindern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren usw.) und bei den vielfältigen Vernetzungen sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität hergestellt werden.
- Eine *konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden* in einem Unterricht, der geistige Schülertätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert und auf die Lernvoraussetzungen der Lernenden abgestimmt sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird und Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u. a. Helmke, 2006).

Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d. h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schülerinnen und Schüler gleichermaßen geeignet sind).

Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, da sie Schülerinnen und Schülern ermöglichen, entsprechend ihren Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbstständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Lösungen präsentieren und diskutieren lassen.

⁴ Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum et al. (2006).

6. Worum geht es im Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen* allgemein?

In der Alltagswelt begegnen Kinder schon früh Zahlen in verschiedenen Kontexten. Es ist Aufgabe des Mathematikunterrichts in der Primarstufe, diese Vorerfahrungen aufzugreifen, zu strukturieren und stetig weiterzuentwickeln. Daher spielt der Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen* in der Grundschule eine zentrale Rolle. Er umfasst Kompetenzen zu folgenden Bereichen:

- Zahldarstellungen, Orientierung im Zahlenraum, Zahlvorstellung
- Rechenoperationen verstehen und beherrschen, insbesondere auch die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Operationen zu verstehen
- Anwendung des Rechnens in Kontexten
- Überschlagendes Rechnen und kritisches Prüfen von Ergebnissen

Zahldarstellung, Orientierung im Zahlenraum, Zahlvorstellung

In unserem Kulturkreis werden Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem dargestellt. Deshalb ist ein **tragfähiges Verständnis dieses Stellenwertsystems** grundlegend, sowohl für die gesamte Grundschulzeit als auch für das Verständnis von Zahleigenschaften und Rechenoperationen danach.

In den ersten beiden Jahrgangsstufen lernen die Schülerinnen und Schüler den Zahlenraum bis 100 kennen und sie machen bereits erste Erfahrungen mit den Strukturen des dekadisch aufgebauten Systems. Für ein tragfähiges Verständnis dieses Systems müssen **Bündelung** und **Stellenwert** als die beiden zentralen Prinzipien erkannt werden (Padberg & Benz, 2011, S. 86).

Das bedeutet, dass jede Ziffer einer bestimmten natürlichen Zahl zwei Informationen beinhaltet: Zum einen gibt die Ziffer die Anzahl der Bündel zu einer Bündelungseinheit an. Zum anderen ist die Stellung der Ziffer innerhalb der Zifferndarstellung wichtig, da dadurch die Bündelungseinheit codiert wird. So kann die Ziffer „3“, je nach Stellung im Zahlzeichen, „3E“ (3), „3Z“ (30), „3H“ (300) usw. bedeuten. Die Schülerinnen und Schüler müssen verstehen, dass eine Ziffer je nach Stellung in einer zwei- oder mehrstelligen Zahl für einen anderen Wert steht.

Gerade bezüglich obiger Prinzipien kommt dem Einsatz geeigneter Arbeitsmittel eine wichtige Bedeutung zu. Um das Bündelungsprinzip zu verstehen, bietet sich zunächst unstrukturiertes Material (beispielsweise Steine oder Steckwürfel) an. Bereits in fester Bündelung können Zahlen durch Mehrsystem-Material dargestellt werden. Das Bündeln (bzw. Entbündeln) findet dann im Tauschen Anwendung: z. B. immer 10 Einerwürfel in eine Zehnerstange, 10 Zehnerstangen in eine Hunderterplatte usw.

Solche Bündelungs- und Tauschhandlungen werden parallel dazu immer mittels einer Stellenwerttabelle dokumentiert, um die abstrakte Zifferndarstellung veranschaulichen zu können und die Bedeutung der Stellung der Ziffer herauszuarbeiten. Dabei können auch Plättchen in die Stellenwerttafel gelegt werden und so über den Wert jedes einzelnen Plättchens, je nach Position, nachgedacht werden (ein Plättchen in der Hunderterspalte steht für eine Hunderterplatte, aber ein Plättchen in der Einerspalte steht für einen Einerwürfel).

Um Sicherheit bei der **Orientierung im Zahlenraum** zu gewinnen (Welche Zahl ist nahe bei 389? Welche von zwei Zahlen sind größer als die andere?), bietet sich der Zahlenstrahl zur Veranschaulichung an. Seine großen Vorteile bestehen darin, dass er beliebig erweiterbar ist, Zahlennachbarschaften gut veranschaulicht werden können (z. B.: Nenne Vorgänger und Nachfolger, benachbarte Zehnerzahlen, Hunderterzahlen.) und man hier in Abständen denken kann (z. B.: Welche Zahl liegt in der Mitte von 30 und 70?). Auch das Tausenderbuch (10 über- bzw.

aneinandergelegte 100er-Tafeln) dient als Hilfsmittel zur Orientierung im Zahlenraum und veranschaulicht Zahlbeziehungen. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass jeder Hunderter nach den gleichen Prinzipien aufgebaut ist. Dagegen können mithilfe eines Tausenderfelds (10 nebeneinandergelegte Hunderterfelder) vor allem die Zehnerstruktur und eine **Mengenvorstellung** aufgebaut werden.

Rechenoperationen verstehen und beherrschen

Im Bereich *Zahlen und Operationen* ist ein wichtiger Aspekt, die einzelnen Rechenoperationen zu verstehen, deren Zusammenhänge zu begreifen und anwenden zu können.

Grundvorstellungen der Rechenoperationen

Die Addition und die Subtraktion als Umkehroperation sind den Kindern bereits seit Jahrgangsstufe 1 vertraut, da verschiedene Aspekte (z. B. statisch, dynamisch, Hinzufügen, Wegnehmen, Ergänzen) handlungsorientiert erarbeitet wurden.

Darauf aufbauend erfolgen die Erarbeitung der Multiplikation und der Division als Umkehroperation. Auch hier ist es wichtig, verschiedene Aspekte zu thematisieren, damit diese von den Kindern mit der neu erlernten Operation in Beziehung gesetzt werden können (zeitlich-sukzessiv, räumlich-simultan, Aufteilen, Verteilen). Nur so entwickelt sich ein umfassendes Operationsverständnis.

Rechengesetze

Rechenlernen im Sinne einer Kulturtechnik, die sich stetig weiterentwickelt, ist ein Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Dies beinhaltet ein Verstehen und selbstständiges Anwenden von Rechenstrategien. Grundlage dafür sind die folgenden Rechengesetze, die mithilfe von Material (z. B. Wendeplättchen als Forschermittel) verdeutlicht und verständlich gemacht werden können:

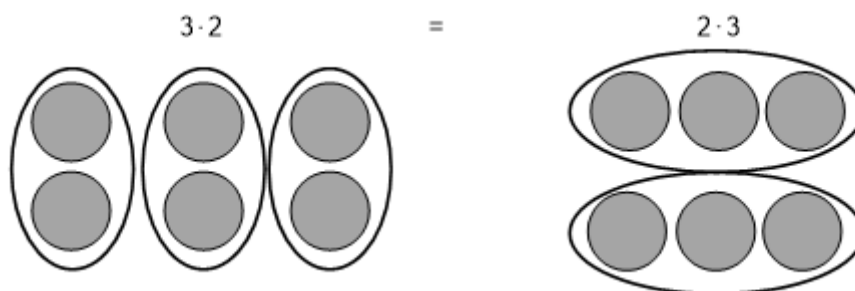
Kommutativgesetz der Addition:

z.B.:



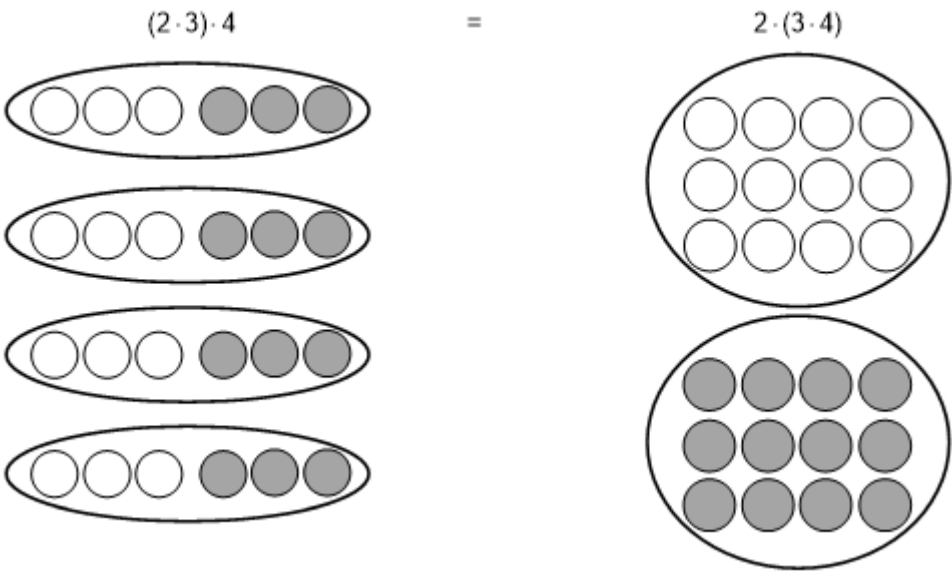
Kommutativgesetz der Multiplikation:

z.B.:



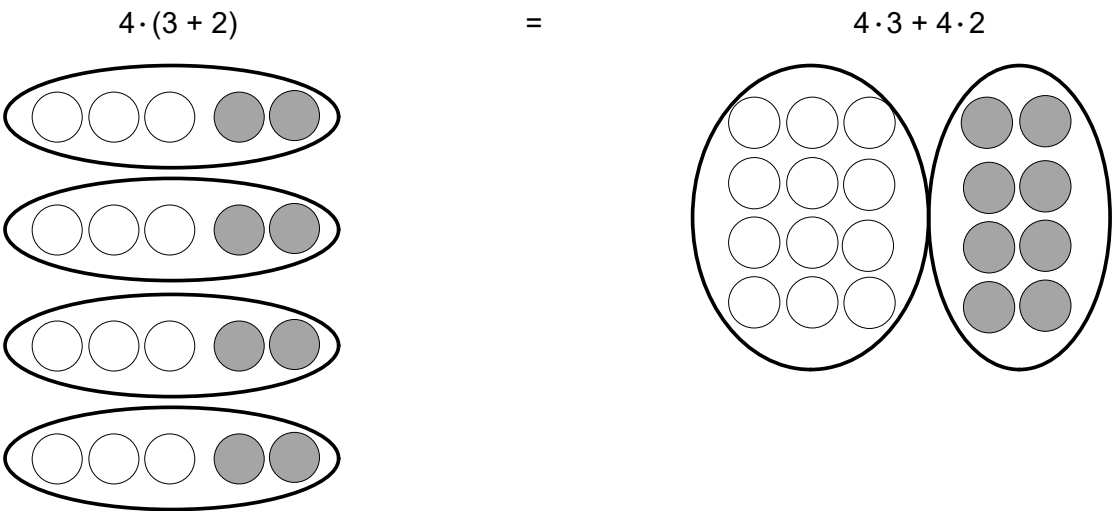
Assoziativgesetz:

z.B.:



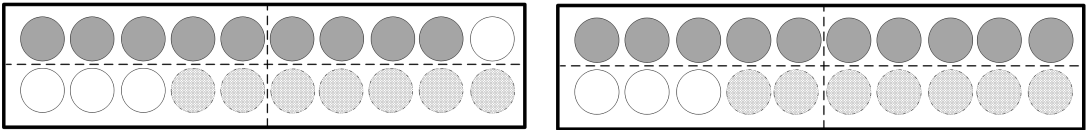
Distributivgesetz:

z.B.:



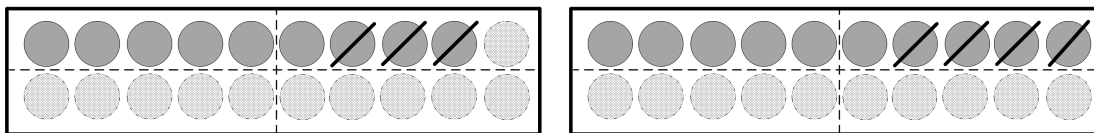
Konstanz der Summe beim gegensinnigen Verändern:

z.B.: $9 + 4$ $=$ $(9 + 1) + (4 - 1)$



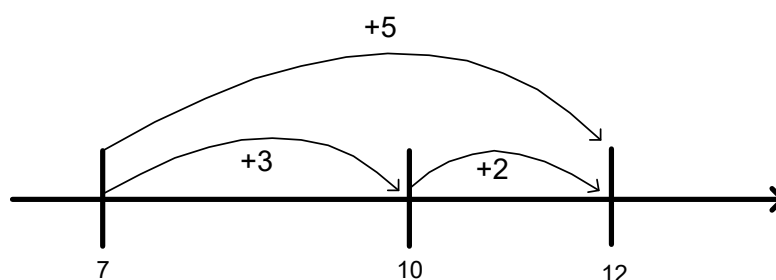
Konstanz der Differenz beim gleichsinnigen Verändern:

z.B.: $9 + 3 = (9 + 1) - (3 + 1)$



Rechengesetze werden implizit bei Rechenstrategien angewandt (wie im folgenden Beispiel das Assoziativgesetz) oder sie werden mithilfe von Veranschaulichungen einsichtig gemacht. Beim Begründen von Rechenstrategien kann auch der Zahlenstrahl oder der unskalierte Rechenstrich dienlich sein:

$$7 + 5 = 7 + 3 + 2 = 10 + 2 = 12$$



Im Allgemeinen werden die Rechengesetze nicht im Sinne von abstrakten Regeln formal unterrichtet.

Erwerb von Rechenstrategien

Mentale Bilder und Handlungen zu obigen Rechengesetzen und ein gesichertes Stellenwertverständnis sind Bedingungen für flexibles, situationsbezogenes Anwenden von Rechenstrategien.

Einfache Aufgaben (Eins-plus-Eins, Ein-mal-Eins) sollten von Schülerinnen und Schülern gegen Ende der Jahrgangsstufe 2 bzw. 4 gedächtnismäßig beherrscht werden, d. h. automatisiert sein. Komplexere Aufgaben werden schrittweise im Kopf, halbschriftlich oder später auch schriftlich gelöst.

Beim gestützten Kopfrechnen (auch halbschriftliches Rechnen genannt), bei dem Teilschritte oder Zwischenergebnisse notiert werden, gibt es verschiedene Lösungswege und keine vorgegebenen Notationsformen. Die Schülerinnen und Schüler nutzen hierbei verschiedene Rechenstrategien.

Idealtypisch können zwei Hauptstrategien unterschieden werden, die allerdings bei den vier Rechenoperationen nicht gleich effizient eingesetzt werden können (Padberg & Benz, 2011, S. 189):

- **Zerlegungsstrategien:** Solche Strategien sind das stellenweise und das schrittweise Rechnen. Beim stellenweisen Rechnen werden beide zu bearbeitenden Zahlen stellengerecht zerlegt. Beim schrittweisen Rechnen wird i. d. R. eine der zu bearbeitenden Zahlen so zerlegt, wie es für das Kind zum Lösen der Aufgabe am hilfreichsten erscheint. Meist nutzt das Kind hierbei auswendig gewusste Aufgaben, die zuerst gelöst werden und dann wird „der Rest“ ergänzt oder abgezogen. Hierbei können Verdopplungs- oder Halbierungsaufgaben genutzt werden, Quadrat- oder Kernaufgaben, die Kraft der Fünf, die Nähe zum Zehner und weitere.

- **Veränderungsstrategien:** Bei diesen Strategien wird das Zahlenmaterial der Aufgabe vor dem eigentlichen Rechnen verändert, um eine Aufgabe (oder Aufgabenteile) zu erhalten, die subjektiv leichter lösbar ist. Die häufigsten Veränderungsstrategien sind das gleich- und das gegensinnige Verändern.

Um dem Anspruch gerecht zu werden, Aufgaben sicher und flexibel im Kopf oder halbschriftlich zu lösen, „ist vielfältiges Wissen über Zahlen und Zahlbeziehungen, über Verknüpfungsmöglichkeiten in Verbindung mit Rechengesetzen Voraussetzung“ (Walther et al., 2012, S. 70).

Anwendung des Rechnens in Kontexten

Ob Kinder ein Verständnis der Rechenoperationen erworben haben, zeigt sich insbesondere darin, dass sie die verschiedenen Operationen sachgerecht in kontextbasierten Aufgabenstellungen anwenden können. Solche Aufgabenstellungen können u. a. in Form von Bildern, Hörspielen, Sachtexten oder diskontinuierlichen Texten (z. B. Tabellen, Aushängen zu Öffnungszeiten) gegeben sein. Sie können auch geometrische Themen aufgreifen.

Entscheidend ist, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung zur dargelegten Sachsituation entwickeln, sie in den passenden mathematischen Kontext übersetzen, mit den ihnen bekannten mathematischen Mitteln (Rechenstrategien, -gesetze etc.) lösen, auf die Sachsituation rückbeziehen und auf Plausibilität überprüfen.

Überschlagendes Rechnen und kritisches Überprüfen von Ergebnissen

Die schriftlichen Verfahren der vier Rechenoperationen werden ab Jahrgangsstufe 3 mithilfe von Algorithmen erlernt und geübt. Für geläufiges und routiniertes Rechnen ist das sinnvoll. Dennoch wird diesen schriftlichen Rechenverfahren keine so große Bedeutung mehr beigemessen wie früher.

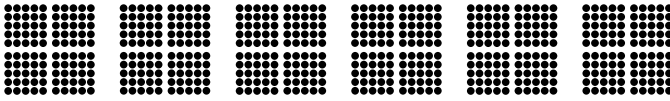
- Zum einen ist es für ein anschlussfähiges Weiterlernen wichtig, Zahlbeziehungen zu verstehen und flexibel nutzen zu können (wie beispielsweise beim gestützten Kopfrechnen). Diese Kompetenz wird beim stellenweisen, schriftlichen Rechnen nicht mehr aufgebaut.
- Zum anderen verlieren die schriftlichen Rechenverfahren auf Grund des Einsatzes von Taschenrechnern und weiteren digitalen Geräten in der heutigen Zeit zunehmend an Bedeutung.

Da jedoch nicht nur das schriftliche Rechnen, sondern auch das Rechnen mit digitalen Instrumenten dazu führen kann, dass die Ergebnisse nicht von einer Vorstellung der richtigen Größenordnung begleitet sind, ist es umso wichtiger, mittels Überschlagsrechnungen Ergebnisse auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen. Generell sollte mit jeder Lösung einer Aufgabe (v. a. auch bei Sachaufgaben) die kritische Ergebnisüberprüfung auf Plausibilität (*Kann das stimmen?*) einhergehen.

6.1 Aufgaben zu Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen

Aufgabe 2 in Modul A Zahlen und Operationen

Welche Zahl ist hier dargestellt?



Die Zahl heißt: _____

RICHTIG	600
---------	-----

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b); strukturierte Zahldarstellungen (z.B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)

Aufgabe 4 in Modul B Zahlen und Operationen

Welche Zahl ist hier dargestellt?



Die Zahl heißt: _____

RICHTIG	207
---------	-----

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b); strukturierte Zahldarstellungen (z.B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)

Aufgabe 7 in Modul B Zahlen und Operationen

10 E 8 H 7 Z

Welche Zahl ist dargestellt? Kreuze an.

- ☐ 817
- ☐ 880
- ☐ 1087
- ☐ 8710

RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a)

Aufgabe 1 in Modul A Zahlen und Operationen

Verbinde. Es bleiben Zahlen übrig.

	264
	406
4 H 2 Z 6 E	426
2 H 6 Z 4 E	460
6 H 4 E	462
4 H 6 E	604
	640

RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik
	264 406 426 460 462 604 640

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
---------------------	-------------------------------

Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a)

Aufgabe 1 in Modul B Zahlen und Operationen

Ordne die Zahlen der Größe nach ein.

~~784~~ 487 748 847 ~~874~~ 478

874 784

RICHTIG	[874] 847 [784] 748 487 478 Lösung als Verbinde-Aufgabe wird auch als richtig gewertet, vergleiche Lösungsgrafik 874 847 784 748 487 478
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c)

Aufgabe 5 in Modul A Zahlen und Operationen

Welche Zahl ist am nächsten an 500? Kreuze an.

- ☐ 419
☐ 491
☐ 519
☐ 599

RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c)

Aufgabe 2 in Modul A Zahlen und Operationen

Welche Zahl ist von 800 am weitesten entfernt? Kreuze an.

- ☐ 744
☐ 750
☐ 845
☐ 850

RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c)

Aufgabe 3 in Modul B *Zahlen und Operationen*

Verwende jede Ziffernkarte nur einmal.

8	3	6
---	---	---

Wie heißt die kleinste dreistellige Zahl? _____

RICHTIG	368
---------	-----

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a)

Aufgabe 13 in Modul A *Zahlen und Operationen*

Verwende jede Ziffernkarte nur einmal.

8	3	6
---	---	---

Wie heißt die größte dreistellige Zahl? _____

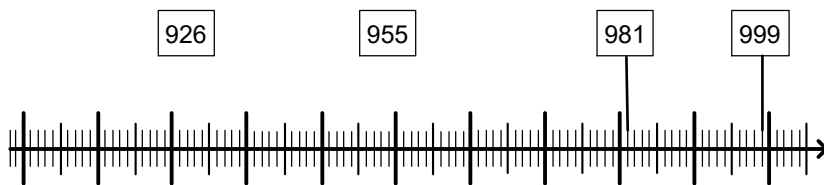
RICHTIG	863
---------	-----

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a)

Aufgabe 6 in Modul B Zahlen und Operationen

Verbinde.



RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik

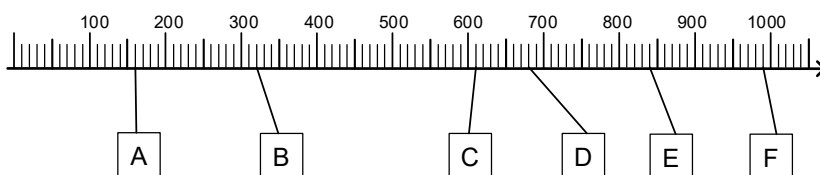
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c); strukturierte Zahldarstellungen (z.B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)

Aufgabe 4 in Modul A Zahlen und Operationen

Welche Zahl ist es?

Trage den passenden Buchstaben ein. Es bleiben Buchstaben übrig.



Die Zahl liegt zwischen 300 und 350. ____ B ____

Die Zahl ist größer als 850. _____

Die Zahl ist kleiner als 300. _____

Die Zahl ist größer als 600 und kleiner als 650. _____

RICHTIG	Zeile 1: F ODER 990 Zeile 2: A ODER 160 Zeile 3: C ODER 610
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c); strukturierte Zahldarstellungen (z.B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)

Aufgabe 8 in Modul A Zahlen und Operationen

Gesucht ist die Zahl 614.

Kreuze an.

6 H	4 Z
1 E	

☐

H	Z	E
••	••	
••	••	
••		

☐

☐	☐	☐		••
☐	☐	☐		

☐

61 + 4

☐

RICHTIG	Nur das 3. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

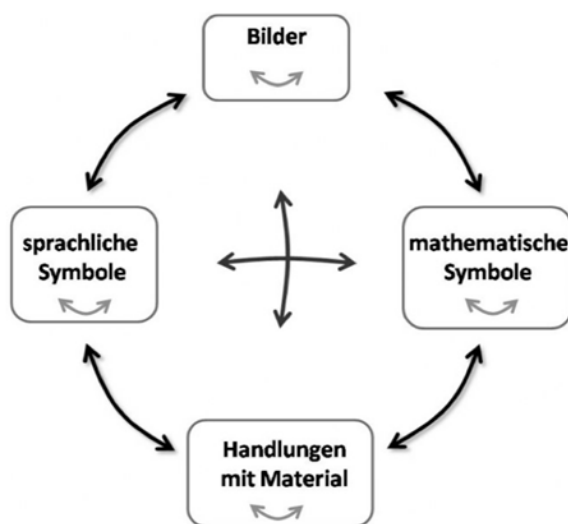
Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b)

6.1.1. Aufgabenbezogener Kommentar

In unserem Kulturkreis werden Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem dargestellt. Daher ist ein tragfähiges Verständnis dieses Stellenwertsystems grundlegend für Einsichten in Zahleigenschaften und den Umgang mit Zahlen (z. B. beim Rechnen).

Für ein tragfähiges Stellenwertverständnis müssen das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und das Stellenwertprinzip erarbeitet werden. Im Stellenwertsystem enthält jede Ziffer einer natürlichen Zahl zwei Informationen: Zum einen gibt die Stelle der Ziffer an, um welche Bündelungseinheit es sich handelt, zum anderen gibt der Wert der Ziffer an, wie oft diese Bündelungseinheit vorkommt. So kann die Ziffer „3“ je nach Stellung in der Zifferndarstellung „3 E“ (3), „3 Z“ (30), „3 H“ (300) usw. bedeuten. Die Schülerinnen und Schüler müssen also verstehen, dass eine Ziffer je nach Stelle in einer zwei- oder mehrstelligen Zahl einen anderen Wert repräsentiert.

Wichtig ist, dass der Aufbau des Stellenwertverständnisses sowie das Verständnis von tragfähigen Zahlvorstellungen unter anderem durch bildliche und/oder sprachliche Darstellungen angeregt wird. Grund dafür ist, dass mathematische Begriffe und Strukturen physisch nicht fassbar sind und eine aktive Auseinandersetzung mit Mathematik daher nicht ohne einen Darstellungswechsel möglich ist. Das bildliche und/oder sprachliche Darstellen mathematischer Beziehungen hilft, dahinterliegende Vorstellungen bewusst(er), sichtbar und kommunizierbar zu machen, mögliche Fehlvorstellungen aufzudecken und neue Vorstellungen in vorhandene Wissensnetze zu integrieren.



Darstellungswechsel im Mathematikunterricht (Kuhnke, 2013, S. 32)

Haben die Kinder ein tragfähiges Stellenwertverständnis entwickelt, hilft ihnen dies, sich im Zahlenraum zu orientieren. Zur Orientierung im Zahlenraum gehört ein Nachvollziehen der Größer-Kleiner-Relationen, das Bestimmen von Abständen zwischen Zahlen und das Verorten von Zahlen in der Zahlenreihe bzw. am Zahlenstrahl.

Bei folgenden Aufgaben steht der **Darstellungswechsel** im Mittelpunkt:

Bei Aufgabe 2 in Modul A und Aufgabe 4 in Modul B müssen die Kinder jeweils erkennen, welche Zahl durch die regelmäßige Anordnung der Punkte dargestellt wird. Die gewählte Darstellung sollte den Schülerinnen und Schülern dabei bereits aus dem 1000er-Buch, dem das Hunderter-Punktefeld zugrunde liegt, bekannt sein. Da die gebündelten Anzahlen nicht als 100er-Platten und 10er-Streifen abgebildet sind, sondern jeder Punkt einzeln zu sehen ist, wird es den Kindern ermöglicht, die Größe der Menge zunächst grob abzuschätzen. Dies kann ihnen helfen, die exakte Größe der Menge zu ermitteln. Bei Aufgabe 8 in Modul A müssen die Kinder verschiedene Darstellungen (Stellenwertschreibweise, Stellenwerttafel, Dienes-Material, Addition) deuten können und mit der in

Symbolschreibweise gegebenen Zahl in Verbindung bringen. Das erfordert neben einer Kenntnis der Darstellungen auch Stellenwertverständnis. Die Darstellung einer Zahl mit Plättchen in einer Stellenwerttafel und die ikonische Darstellung müssen den Kindern dafür vermutlich bereits aus dem Unterricht bekannt sein. Gleiches gilt für die Abkürzungen „E“, „Z“ und „H“ und deren Bedeutung.

Bei folgenden Aufgaben steht das **Stellenwertverständnis** im Mittelpunkt:

Für die Bearbeitung von Aufgabe 7 in Modul B, Aufgabe 1 in Modul A, Aufgabe 1 in Modul B, Aufgabe 3 in Modul B und Aufgabe 13 in Modul A sowie auch bei Aufgabe 8 in Modul A müssen die Schülerinnen und Schüler über ein tragfähiges Stellenwertverständnis – vor allem des Stellenwertprinzips – verfügen. Es wird benötigt, um Zahlen in Ziffern- und Stellenwertschreibweise miteinander in Beziehung zu setzen.

Bei Aufgabe 7 in Modul B ist auch eine Anwendung des Bündelungsprinzips erforderlich. Die Kinder müssen das Prinzip der 10er-Bündelung verstanden haben, denn um die zweite Antwortoption als die richtige auswählen zu können, muss ihnen bewusst sein, dass die 10 Einer zu einem Zehner gebündelt werden müssen.

Die Aufgaben 3 in Modul B und 13 in Modul A erfordern von den Kindern, aus drei vorgegebenen Ziffernkarten einmal die kleinste und einmal die größte dreistellige Zahl zu bilden. Voraussetzung dafür ist zum einen, dass die Schülerinnen und Schüler die Begriffe „größte“, „kleinste“ und „dreistellige“ verstehen. Zudem müssen sie ein Verständnis für die Bedeutung der Position einer Ziffer innerhalb der Zifferndarstellung einer Zahl haben. Sie müssen erkennen, dass im ersten Fall die kleinste Ziffer an die Hunderterstelle und die zweitkleinste an die Zehnerstelle gelegt werden muss. Um die größte dreistellige Zahl zu bilden, muss entsprechend die größte Ziffer an der Hunderterstelle und die zweitgrößte an der Zehnerstelle platziert werden.

Bei Aufgabe 1 in Modul B müssen die Schülerinnen und Schüler ihr Stellenwertverständnis schließlich dafür nutzen, Zahlen der Größe nach zu ordnen. Konkret müssen sie erkennen, dass sie die Zahlen von groß nach klein ordnen können, indem sie die Ziffern an der Hunderter-, Zehner- und Einerstelle, d. h. die einzelnen Stellenwerte miteinander vergleichen.

Bei folgenden Aufgaben steht die **Orientierung im Zahlenraum** im Mittelpunkt:

Aufgabe 1 in Modul B erfordert von den Kindern, sich im Zahlenraum zu orientieren. Gleiches gilt für Aufgabe 6 in Modul B, Aufgabe 4 in Modul A und Aufgabe 5 in Modul A und Aufgabe 2 in Modul B.

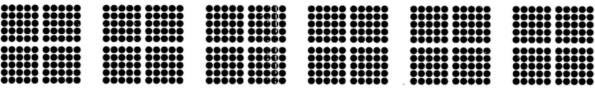
Bei Aufgabe 5 in Modul A und Aufgabe 2 in Modul B müssen die Schülerinnen und Schüler die Begriffe „am nächsten“ und „am weitesten“ verstehen, ein Verständnis für Zahlabstände haben und Zahlen im Hunderter- bzw. Tausenderraum **größenbezogen vergleichen und einordnen** können. Auf diese Weise können sie erkennen, welche Zahl von den vorgegebenen Zahlen am nächsten bzw. am weitesten entfernt ist.

Aufgabe 6 in Modul B und Aufgabe 4 in Modul A thematisieren Zahlenstrahlausschnitte. Aufgabe 6 in Modul B erfordert dabei zunächst das Deuten der Skalierung anhand von zwei vorgegebenen Zahlen und anschließend eine flexible Orientierung am Zahlenstrahl, da die unverbundenen Zahlen nicht zwischen, sondern links der vorgegebenen Zahlen eingeordnet werden müssen. Aufgabe 4 in Modul A verlangt hingegen kein genaues Ablesen einzelner Zahlpositionen, sondern ein abschätzendes Orientieren am Zahlenstrahl unter Beachtung von Vorgaben.

6.1.2 Mögliche Schwierigkeiten

Aufgabe 2 in Modul A

Schwierigkeiten der Kinder sind vermutlich darauf zurückzuführen, dass die Hunderterstruktur der Punktefelder nicht bekannt ist oder unzureichend erfasst wird und daher falsch gedeutet wird.

 Die Zahl heißt: <u>60</u> Die Zahl heißt: <u>60000</u>	Die 100er-Felder werden als 10er, 1000er oder 10000er angesehen.
Die Zahl heißt: <u>240</u> Die Zahl heißt: <u>2400</u>	Die 25er-Felder werden als 10er oder 100er angesehen.
Die Zahl heißt: <u>3000</u>	Die 100er-Felder werden als 500er angesehen. Ursache hierfür ist vermutlich die starke Präsenz der 5 aufgrund der 25er-Felder (5 x 5).
Die Zahl heißt: <u>200</u>	Vielleicht wird die obere und untere Reihe an 25er-Feldern jeweils als ein 100er-Feld interpretiert – ggfs. handelt es sich um eine fehlerhafte Analogiebildung vom 20er-Feld.

Aufgabe 4 in Modul B

Grundsätzlich werden bei dieser Aufgabe die 7 Einer sehr gut wahrgenommen und mit der Zahl 7 in Beziehung gesetzt. Schwierigkeiten ergeben sich eher bei der Deutung der zwei 100er-Felder.

 Die Zahl heißt: <u>407</u> Die Zahl heißt: <u>87</u> Die Zahl heißt: <u>807</u>	Die 50er werden als 100er, die 25er-Felder als 10er bzw. die 25er-Felder als 100er gedeutet. Nur die 7 Einer wurden jeweils richtig gedeutet.
Die Zahl heißt: <u>452</u>	Die 50er werden als 100er und der 5er als 50er gedeutet.
Die Zahl heißt: <u>7</u> Die Zahl heißt: <u>200</u>	Die 100er-Felder bzw. die Einer wurden nicht als Teil der Zahldarstellung wahrgenommen.

Aufgabe 7 in Modul B

Wählt ein Kind die Antwortoption „8710“ aus, hat es die „10 E“ nicht zu „1 Z“ gebündelt. Das Bündelungsprinzip wird nicht beachtet. Gleiches gilt, wenn die Antwortoption „1087“ ausgewählt wurde, wobei hier zusätzlich die Angaben „E“, „Z“ und „H“ nicht beachtet wurden oder deren Bedeutung nicht bekannt ist bzw. kein Verständnis des Stellenwertprinzips vorliegt. Ebenso kann es

passieren, dass „817“ angekreuzt wird, da bewusst (z. B. aufgrund eines Konflikts mit den „10 E“) oder unbewusst die Angabe „Z“ vernachlässigt wird. In allen drei Fällen ist ein mangelndes Stellenwertverständnis ursächlich für die fehlerhafte Aufgabenbearbeitung.

Aufgabe 1 in Modul A

	Aufgrund des „fehlenden“ Stellenwerts werden die beiden letzten Zahldarstellungen mit einer Zahl verbunden, die am Ende eine 0 aufweist. Es wurde nicht beachtet, dass es sich um „4 E“ bzw. „6 E“ und nicht „4 Z“ bzw. „6 Z“ handelt. Vermutlich sind dem Kind noch keine Darstellungen in Stufenschrift bekannt, bei denen ein Stellenwert „in der Mitte“ der Zahl nicht angegeben wird. Dies deutet auf ein eingeschränktes Verständnis des Stellenwertprinzips hin.
	Das Kind gerät scheinbar in einen Konflikt, da bei den letzten beiden Zahldarstellungen nur zwei Stellen explizit angegeben werden und daher nicht mit einer dreistelligen Zahl in Verbindung gebracht werden können. Vermutlich sind dem Kind noch keine Darstellungen in Stufenschrift bekannt, bei denen ein Stellenwert der Zahl nicht angegeben wird. Dies deutet auf ein eingeschränktes Verständnis des Stellenwertprinzips hin.

Aufgabe 1 in Modul B

Ordne die Zahlen der Größe nach ein. 784 487 748 847 874 478 874 847 784 748 478 487	Der Großteil der Zahlen wurde korrekt geordnet und deutet damit auf eine grundlegende Orientierung im Zahlenraum hin. Der Fehler bei 478 und 487 könnte darauf zurückgeführt werden, dass die Zehnerstelle nicht zuverlässig berücksichtigt wurde, da das stellenweise Vergleichen von Zahlen noch nicht vollständig gesichert ist. Ebenso ist es möglich, dass das Kind die Zahlen ab 478 auf- anstatt absteigend geordnet hat (ggf. sogar schon ab 748, wenn nur die Zehner- und Einerstelle berücksichtigt wurden).
874 874 748 487 478 874 847 784 784 487 478	Hier wird bei jeweils einer Zahl die Zehner- und Einerstelle vertauscht: Statt 847 wird bei der oberen Lösung nochmal die Zahl 874 notiert, bei der unteren Lösung wird anstatt 748 erneut die Zahl 784 notiert. Das zeigt, dass das Stellenwertprinzip grundsätzlich angewendet wird, Zahlen mit gleicher Hunderterstelle und vertauschten Ziffern an der Einer- und Zehnerstelle jedoch noch nicht durchgehend sicher unterschieden werden.

Aufgabe 5 in Modul A

519 wurde angekreuzt	Scheinbar wurde die Nähe zur 500 auf Grundlage der gleichen Hunderterstelle bewertet („519 liegt näher bei 500 als 4XX“), ohne den tatsächlichen numerischen
------------------------------------	---

	Abstand zu berücksichtigen. Der Abstand wurde dabei ggfs. nur in eine Richtung gedacht und nicht als Abstand nach zwei Seiten verstanden.
599 wurde angekreuzt	Scheinbar wurde die Nähe zur 500 auf Grundlage der Nähe zum nächsten (falschen) Hunderter bewertet („Von 599 fehlt nur 1 bis zum nächsten Hunderter“), ohne den tatsächlichen numerischen Abstand zu berücksichtigen.

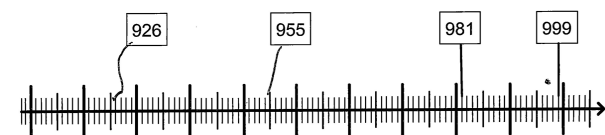
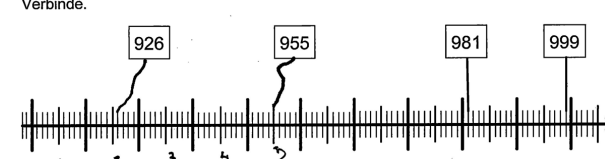
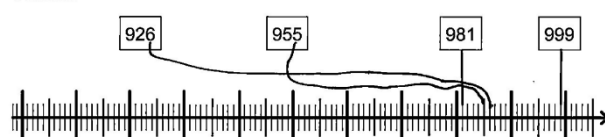
Aufgabe 2 in Modul B

750 wurde angekreuzt	Scheinbar wurde die Entfernung zur 800 auf Grundlage der Entfernung zu einem ganzen Hunderter bewertet („Eine Zahl mit 50 markiert die Mitte zwischen zwei Hundertern. Weiter entfernt kann eine Zahl nicht von einem ganzen Hunderter sein.“), ohne den tatsächlichen numerischen Abstand zu berücksichtigen.
845 wurde angekreuzt	Der Abstand wurde ggfs. nur in eine Richtung gedacht und nicht als Abstand nach zwei Seiten verstanden.
850 wurde angekreuzt	Entweder wurde die Entfernung zur 800 auf Grundlage der Entfernung zu einem ganzen Hunderter bewertet („Eine Zahl mit 50 markiert die Mitte zwischen zwei Hundertern. Weiter entfernt kann eine Zahl nicht von einem ganzen Hunderter sein.“) oder auf Grundlage der Größe der Zahl („am weitesten entfernt“ als „am weitesten über 800 bzw. am größten“). In beiden Fällen wurde der tatsächliche numerische Abstand nicht berücksichtigt und im zweiten Fall wurde der Abstand zusätzlich vermutlich nur in eine Richtung gedacht und nicht als Abstand nach zwei Seiten verstanden.

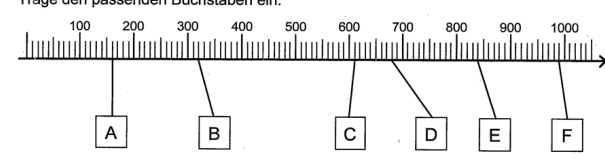
Aufgabe 3 in Modul B und Aufgabe 13 in Modul A

Verwende jede Ziffernkarte nur einmal. 8 3 6 a) Wie heißt die kleinste dreistellige Zahl? <u>386</u>	Die Hunderterstelle wurde richtig besetzt, die Zehner- und Einerstelle wurden vertauscht. Der Fehler könnte darauf zurückgeführt werden, dass sich Schreib- und Sprechweise im Deutschen invers zueinander verhalten: Man spricht zuerst den Einer und dann den Zehner, aber schreibt zuerst den Zehner und dann den Einer.
a) Wie heißt die kleinste dreistellige Zahl? <u>3</u> b) Wie heißt die größte dreistellige Zahl? <u>8</u>	Es wurde nicht beachtet, dass es sich um eine dreistellige Zahl handeln soll.
a) Wie heißt die kleinste dreistellige Zahl? <u>100</u> b) Wie heißt die größte dreistellige Zahl? <u>999</u>	Es wurde nicht beachtet, dass die vorgegebenen Ziffernkarten verwendet werden sollen.

Aufgabe 6 in Modul B

Verbinde.  Verbinde. 	Vermutlich wurde von den vorgegebenen Zahlen aus rückwärts, d. h. von rechts nach links, in Zehnerschritten bis zur 950 bzw. 920 gezählt. Anschließend wurden die Einer dieser Logik folgend fälschlicherweise links anstatt rechts vom Zehner eingetragen. Ebenso ist es möglich, dass die Zählung von links begonnen wurde und der erste lange Strich als Zehner interpretiert wurde.
Verbinde. 	Die fehlende Skalierung führt evtl. dazu, dass der kleine Strich ganz links als 901 gedeutet wird und ausgehend von diesem bis 926 bzw. 955 gezählt wird. Bei 955 kommt dann ein Verzählfehler dazu.
Verbinde. 	Die Zehnerstelle wurde vernachlässigt. Das Kind orientiert sich nur an der Einerstelle und scheint anzunehmen, dass die Zahlen zwischen den vorgegebenen Zahlen verortet werden müssen.

Aufgabe 4 in Modul A

Aufgabe 8 Welche Zahl ist es? Trage den passenden Buchstaben ein.  Die Zahl liegt zwischen 300 und 350. <u>B</u> Die Zahl ist größer als 850. <u>E</u> Die Zahl ist kleiner als 300. <u>A</u> Die Zahl ist größer als 600 und kleiner als 650. <u>C</u>	Der Buchstabe E wurde falsch zugeordnet, da das Kind sich vermutlich nur am Hunderter orientiert hat, ohne die Zehnerskalierung zu beachten.
Die Zahl liegt zwischen 300 und 350. <u>B</u> Die Zahl ist größer als 850. <u>F</u> Die Zahl ist kleiner als 300. <u>B</u> Die Zahl ist größer als 600 und kleiner als 650. <u>C</u>	Der Buchstabe B wurde falsch zu geordnet, da vermutlich nur die erste Zahl der Angabe beachtet wurde. Das Kind hat so vermutlich nur darauf geachtet, dass diese Zahl auch zwischen 300 und 400 liegen muss.
Die Zahl liegt zwischen 300 und 350. <u>B</u> Die Zahl ist größer als 850. <u>F</u> Die Zahl ist kleiner als 300. <u>A</u> Die Zahl ist größer als 600 und kleiner als 650. <u>D</u>	Der Buchstabe D wurde falsch zugeordnet, da vermutlich nur die erste Bedingung („größer als 600“) beachtet wurde.

Aufgabe 8 in Modul A

6 H 4 Z 1 E wurde angekreuzt	Die Ziffern wurden von links nach rechts („6 H“, „1 E“, „4 Z“), ohne Beachtung der Angaben „H“, „Z“, „E“, gelesen. Aus diesem Grund werden Einer und Zehner vertauscht.
61 + 4 wurde angekreuzt	Aufgrund eines fehlenden Stellenwertverständnisses werden die einzelnen Ziffern auch hier von links nach rechts gelesen.

6.1.3 Anregungen für den Unterricht

Im Bereich „Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen“ wird in der dritten und vierten Klasse die Zahlvorstellung weiter ausgebaut und durch die Zahlraumerweiterung werden vertiefte Einsichten in den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems gewonnen. Im Unterricht sollte dabei an bereits bekannte Darstellungen angeknüpft werden und es sollten bekannte sowie neue Strukturen in den erweiterten Darstellungen (z. B. Tausenderpunktefeld, Zehnersystem-Material, Stellenwerttafel, Ziffernkarten und Zahlenstrahl) thematisiert werden. Da sich ein tragfähiges Verständnis von Zahlen und deren Beziehungen auch dadurch auszeichnet, dass flexibel zwischen verschiedenen Darstellungsformen gewechselt werden kann, sollten zudem immer wieder unterschiedliche Darstellungen im Unterricht aufgegriffen werden und der Wechsel zwischen diesen intensiv geübt werden.

Punktefelder und Zehnersystem-Material

Ein Punktefeld hat eine feste Struktur, die sich aus der Anordnung von Punkten in Reihen und Spalten ergibt. Wichtige Merkmale sind die **Zehnergliederung** (zehn Punkte pro Zeile und Spalte) und **Fünferunterteilung** (Kraft der Fünf). Da diese eine schnelle Erfassung von Mengen ermöglichen, eignen sich Punktefelder in besonderem Maße dazu, Zahlen darzustellen (z. B. mit Abdeckwinkeln) und eine Mengenvorstellung der Zahl zu bekommen.

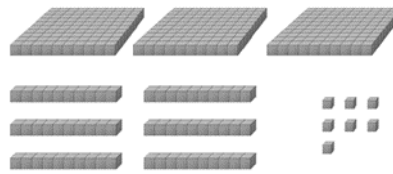
Das Zehnersystem-Material (auch als „Dienes-Material“ oder „Mehrsystemblöcke“ bezeichnet) ist ein anschauliches Material, um Zahlen gemäß dem Stellenwertsystem darzustellen. Es besteht aus verschiedenen Elementen: Einerwürfel, Zehnerstangen, Hunderterplatten und Tausenderwürfel. Durch diese Elemente können die mathematischen Zusammenhänge zwischen den Bündelungseinheiten unseres Stellenwertsystems sicht- und greifbar werden: Zehn Einer sind ein Zehner, zehn Zehner sind ein Hunderter, zehn Hunderter sind ein Tausender. Auch die Zusammenhänge zwischen den nicht direkt benachbarten Bündelungseinheiten können mit diesem Material thematisiert werden: Hundert Einer sind ein Hunderter, hundert Zehner sind ein Tausender.

Sowohl mit den Punktefeldern als auch dem Zehnersystem-Material bieten sich daher verschiedene Übungen an, die Einsichten in den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems fördern können.

Zahlen mit Material darstellen und erfassen (→ Darstellen, → Kommunizieren)

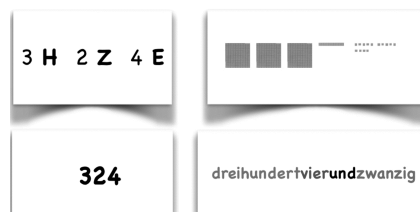
- **Blitzlesen:** Ein Kind stellt eine Zahl am Punktefeld oder mithilfe des Zehnersystem-Materials hinter einem Sichtschutz dar. Anschließend hebt das Kind den Sichtschutz kurz hoch und präsentiert einem Partnerkind die Zahldarstellung. Das Partnerkind übt auf diese Weise durch „schnelles Sehen“ die quasi-simultane Anzahlerfassung.

- **Zahlendiktat:** Die Lehrkraft oder ein Kind (legt eine Zahl und) diktiert diese der Klasse bzw. dem Partnerkind: „Ich habe 3 Hunderter, 6 Zehner und 7 Einer. Wie heißt meine Zahl?“ Der Schwierigkeitsgrad kann dadurch erhöht werden, dass die Reihenfolge der Stelle variiert wird oder einzelne Stellen ausgelassen werden.



Copyright Grafik: IQB

- **Domino bzw. Mathekette:** Jedes Kind bekommt eine Dominokarte mit einer Zahl in Ziffernschreibweise auf der linken Seite und der Darstellung einer anderen Zahl mit Zehnersystem-Material auf der rechten Seite. Die Lehrkraft legt dann eine Startkarte mit z. B. einem Bild von 5 Hundertern, 2 Zehnern und 3 Einern hin. Das Kind, das die Dominokarte mit der Zahl 523 hat, legt nun seine Karte an usw. Der Schwierigkeitsgrad kann, wie beim Zahlendiktat beschrieben, verändert werden.
- **Paare bzw. Quartette finden:** Jedes Kind erhält eine Karte (siehe Abbildung) und muss den passenden Partner bzw. die passende Gruppe finden. Die Karten können dabei auch von den Kindern selbst hergestellt werden. Weitere Karten mit anderen Zahldarstellungen können ergänzt werden (z. B. Darstellung am Hunderterfeld oder mithilfe von Stellenwerttafeln, Zahlzerlegungen). Wurden Paare erstellt, können diese auch als Memory eingesetzt werden.



Copyright Abbildung: Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik (o. D.a)

Zahlen materialgestützt oder mental verändern (→ Darstellen, → Kommunizieren)

- **„Zahl unter dem Tuch“:** Ein Kind legt eine Zahl mithilfe von Zehnersystem-Material, das Partnerkind schaut zu und benennt die Zahl. Das Kind deckt die Zahl ab, verändert diese durch Wegnehmen oder Dazulegen und präsentiert die Darstellung anschließend wieder dem Partnerkind. Dieses muss nun die neue Zahl benennen und beschreiben, wie die neue Zahl aus der alten Zahl entstanden ist (z. B. „Vorher lag dort die Zahl 61. Jetzt liegt dort die Zahl 55. Dafür hast du 1 Zehnerstange in 10 Einer entbündelt und dann 6 Einer weggenommen.“)
- **Bündeln und entbündeln:** „Vor mir liegen 2 Hunderter, 1 Zehner und 3 Einer. Ich tausche 1 Hunderter gegen Zehner aus. Wie viele Zehner habe ich jetzt?“

Stellenwerttafel

Auch die Stellenwerttafel bietet sich an, um das Stellenwertverständnis der Schülerinnen und Schüler zu fördern. Anders als beim Zehnersystem-Material liegt der Fokus dabei jedoch nicht auf dem Bündelungsprinzip, sondern auf dem Stellenwertprinzip. Um bei den Kindern das Bewusstsein für dieses Prinzip zu stärken, sollten Zahlen im Unterricht immer wieder mithilfe von Stellenwerttafeln dargestellt und abgelesen werden und Zahlen durch Wegnehmen bzw. Hinzufügen von Plättchen in Stellenwerttafeln variiert werden. Um zusätzlich einen Darstellungswechsel anzuregen, können die

folgenden Aufgaben stets darum erweitert werden, dass die Zahlen nicht nur in der Stellenwerttafel, sondern zusätzlich auch mit Zehnersystem-Material dargestellt werden. Auf diese Weise können die Darstellungsarten miteinander in Beziehung gesetzt werden und es kann z. B. deutlich werden, welchen Einfluss das Hinzufügen oder Wegnehmen eines Plättchens auf die Größe der Menge hat.

- Ein Kind füllt die Stellenwerttafel mit Plättchen (→ *Darstellen*). Das Partnerkind liest die Zahl ab. Die folgenden Aufgaben können angeschlossen werden (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*):

- Legt ein Plättchen dazu. Welche Zahlen können entstehen?
- Legt zwei Plättchen dazu. Welche Zahlen können entstehen?
- Nimmt ein Plättchen weg. Welche Zahlen können entstehen?
- Nimmt in jeder Spalte ein Plättchen weg. Welche Zahlen können entstehen?
- Legt in jeder Spalte zwei Plättchen dazu. Welche Zahlen können entstehen?
- Legt so viele Plättchen um, wie ihr wollt. Es soll die kleinstmögliche/größtmögliche Zahl entstehen. Beschreibt, wie ihr vorgegangen seid.
- Ihr dürft nur ein Plättchen umlegen. Welches Plättchen müsst ihr wie verschieben, um die Zahl möglichst groß/klein zu machen? Begründet.

H	Z	E
• •	•	• • •

- Eine leere Stellenwerttafel und Plättchen sind gegeben: „Lege ein Plättchen in die Stellenwerttafel. Welche Zahlen können entstehen? Ordne und schreibe sie auf. Begründe, warum es keine weiteren Zahlen gibt.“ (→ *Darstellen*, → *Argumentieren*).

H	Z	E

•
•
•

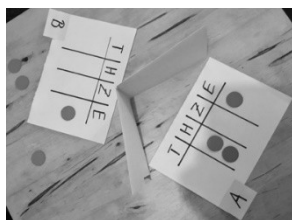
- „Die Zahl heißt 536. Ich nehme ein Plättchen weg, nun heißt meine Zahl 436. Wo habe ich das Plättchen entfernt? Begründe.“ (→ *Argumentieren*)
- „Meine Zahl hat doppelt so viele Einer wie Zehner und doppelt so viele Zehner wie Hunderter. Wie viele Plättchen könnten es sein? Welche Zahl könnte es sein? Welche Zahlen sind möglich, welche nicht?“ Da bei dieser Aufgabe teils verschiedene Lösungen richtig sind, bietet sich das Vergleichen der gefundenen Zahlen an (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*).

Die zuvor beschriebenen Aufgaben variieren im Schwierigkeitsgrad und erreichen Schülerinnen und Schüler aller Leistungsniveaus. Für besonders leistungsstarke Kinder eignen sich z. B. die folgenden Aufgabenstellungen:

- Eine kombinatorische Aufgabe mit höherem Komplexitätsgrad wäre: „Du hast vier Plättchen. Wie viele verschiedene Zahlen kannst du bilden, wenn du die Plättchen in eine Stellenwerttafel mit T, H, Z und E legst? Wie gehst du vor? Woher weißt du, dass du alle gefunden hast?“

Hierbei bietet es sich immer an, die Kinder verbalisieren zu lassen, wie sie die Zahl, die in der Stellenwerttafel liegt, interpretieren. Bei den Beschreibungen müssen die Kinder automatisch auf Fachbegriffe zurückgreifen und somit Fachsprache nutzen (→ *Kommunizieren*).

- Partnerspiel „Zahlen raten“: Kind A legt verdeckt eine Zahl, z. B. eine dreistellige Zahl mit drei Plättchen. Kind B muss die Zahl durch Fragen erraten, auf die Kind A nur mit „ja“ oder „nein“ antworten darf (Idee aus Hengartner, Hirt & Wälti 2010, S.69).



Copyright Foto: IQB

Im weiteren Unterrichtsverlauf sollten Zahlen in der Stellenwerttafel jedoch nicht nur mit Plättchen, sondern auch mit Ziffernkarten dargestellt werden.

Ziffernkarten

Aufgaben mit Ziffernkarten sind rein auf der symbolischen Ebene verortet. Entsprechend bietet sich das Darstellen von Zahlen in der Stellenwerttafel mit Plättchen und anschließend Ziffernkarten dazu an, die bildliche und symbolische Darstellungsebene miteinander zu verknüpfen und den Übergang von der bildlichen zur symbolischen Ebene fließend zu gestalten. Nach und nach können die Ziffernkarten dann auch ohne Stellenwerttafel zum Legen von Zahlen genutzt werden.

H	Z	E
3	6	7

Copyright Grafik: IQB

Folgende Aufgabenstellungen mit Ziffernkarten sind denkbar und regen zum → *Kommunizieren*, → *Argumentieren* und → *Problemlösen* an:

- Zahlen zerlegen: $567 = 5H\ 6Z\ 7E = 500 + 60 + 7$
- Ziffern ergänzen: „Welche Zahlen könnten es sein?“
- Zahlen verändern: „Verändere die Zahl mit anderen Ziffernkarten so, dass die neue Zahl um 300 größer/um 20 kleiner ist.“
- Anordnung der Ziffernkarten verändern: „Was passiert, wenn du Einer und Zehner tauschst? Welche Zahl ist größer? Wie musst du die Ziffernkarten anordnen, um die größte/kleinste Zahl zu erhalten?“
- Zahlen legen und vergleichen: Spiel „Hausnummern“ → abwechselnd Ziffernkarten mit Zurücklegen ziehen, dreistellige Zahl bilden → höchste/niedrigste Hausnummer gewinnt
- Kombinatorische Aufgaben: „Wie viele dreistellige Zahlen kannst du mit 3, 4, ... vorgegebenen Ziffernkarten bilden? Schreibe sie geordnet auf.“
- Zahlen-Rätsel: „Meine Zahl hat 2 Hunderter, doppelt so viele Einer und 5 Zehner“ oder „Wie heißt die kleinste ungerade Zahl aus den Ziffern 3, 5 und 8?“



Copyright Grafik: IQB

Zahlenstrahl

Der Zahlenstrahl eignet sich in besonderer Weise dazu, mit den Kindern einzuüben, sich im Zahlen-raum zu orientieren. Er wird bereits in Klassenstufe 1 eingeführt und in den folgenden Schuljahren entsprechend des Zahlenraums erweitert.

Die Erarbeitung des Zahlenstrahls im Anfangsunterricht sollte dabei verständnisorientiert erfolgen, indem z. B. zunächst Zahlen auf dem Boden geordnet (und aufgeklebt) werden. Anschließend kann die so entstehende Zahlenreihe, die als Vorläufer eines Zahlenstrahls angesehen werden kann, vorwärts bzw. rückwärts abgelaufen werden, wobei die Zahlen laut ausgesprochen werden. Weitere Übungen, die ein Verständnis für die Anordnung der Zahlen fördern können und die

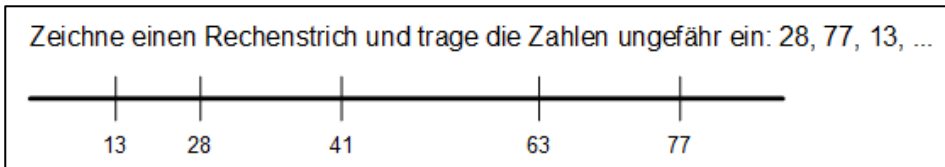


Copyright Foto: IQB

somit ein Verständnis des Zahlenstrahls vorbereiten, sind die folgenden:

- Vorgänger und Nachfolger bestimmen (z. B. „4 liegt zwischen 3 und 5.“)
- Größer-Kleiner-Vergleiche (z. B. „11 ist weiter links als 13. Deswegen ist 11 kleiner als 13.“)
- Zahlen in der Zahlenreihe suchen

Anschließend kann die Zahlenreihe in einen Zahlenstrahl überführt werden. Um zu verstehen, dass die Skalierung eines Zahlenstrahls die Orientierung im Zahlenraum unterstützen bzw. sogar notwendig für diese sein kann, können die Schülerinnen und Schüler dazu angeregt werden, Zahlen an einem Rechenstrich einzutragen. (Zu einem späteren Zeitpunkt kann der Rechenstrich genutzt werden, um Rechenwege zu veranschaulichen.)



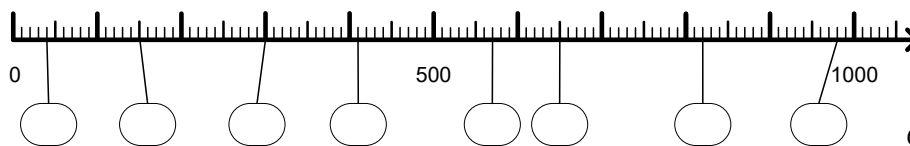
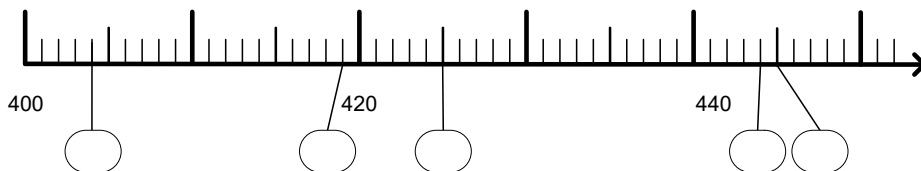
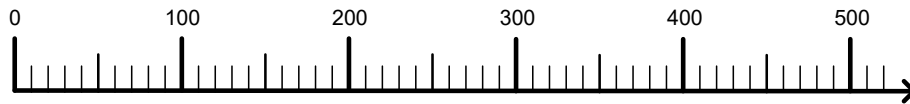
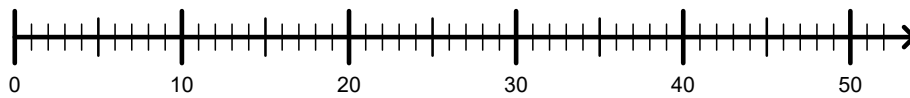
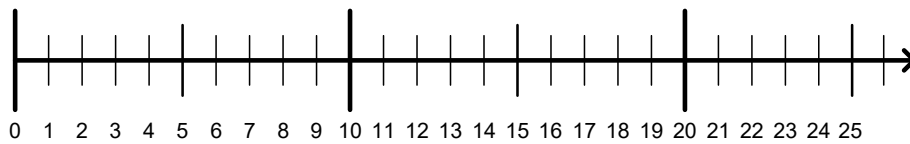
Auf diese Weise kann erarbeitet werden, wodurch sich ein Zahlenstrahl auszeichnet:

- Der Zahlenstrahl beginnt oft bei 0, es kann aber auch eine andere Startzahl geben.
- Die Zahlen liegen in gleichmäßigen Abständen auf einer Linie.
- Regelmäßige Ankerpunkte helfen bei der schnellen Orientierung auf dem Zahlenstrahl.
- Nach rechts werden die Zahlen größer, nach links werden sie kleiner.
- Der Zahlenstrahl geht unbegrenzt weiter, d. h. es gibt keine größte Zahl.

Die zuvor beschriebenen Übungen zur Zahlenreihe können dann erneut aufgegriffen und erweitert werden, da sie vielfältige Anlässe bieten, um über den Aufbau des Zahlenraums zu kommunizieren (z. B. Rolle der 10), die Vorteile der Skalierung praktisch erfahrbar zu machen (z. B. in 5er-Schritten zählen) und die Orientierung weiter zu fördern (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*).

- Zehnerneighbarn, Hunderterneighbarn bestimmen
- Sprünge auf dem Zahlenstrahl
- in Schritten zählen
- Vervollständigen von Zahlenstrahlausschnitten

Haben die Schülerinnen und Schüler ein gesichertes Verständnis erworben, wie ein Zahlenstrahl aufgebaut ist, können z. B. im Rahmen einer Mathekonferenz verschiedene Skalierungen bzw. Beschriftungen thematisiert werden (→ *Kommunizieren*).



Copyright Grafiken: IQB

Im Zuge dessen können z. B. die Eigenschaften der einzelnen Zahlenstrahle untersucht werden. Ebenso ist es möglich, die Unterschiede und Gemeinsamkeiten in den Blick zu nehmen und in der Klasse zu überlegen, wofür die Zahlenstrahle genutzt werden könnten (→ *Argumentieren*).

- Welche Zahlen stehen an den langen Strichen? Begründe.
- Welche Zahlen stehen an den kurzen Strichen? Begründe.
- Wo sind die Einer/Zehner/Hunderter? Begründe.
- Welche Zahlen können auf dem Zahlenstrahl genau bestimmt werden? Begründe.
- Für welche Zahlen können wir nur eine ungefähre Position angeben? Begründe.
- Wie kannst du bestimmen, wo eine Zahl ist, ohne zu zählen?
- Suche zur Zahl xy die Nachbarzahlen/-zehner/-hunderter und markiere sie. Was fällt dir auf?

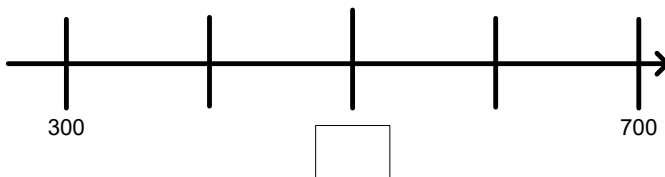
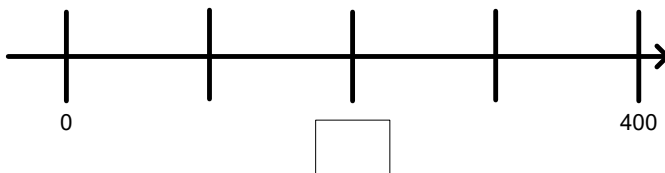
Ein entdeckendes Lernen kann durch die folgenden Übungen gefördert werden (→ *Argumentieren*, → *Problemlösen*):

- Zahlenstrahl-Puzzle: Den Kindern kann ein zerschnittener Zahlenstrahl vorgelegt werden. Sie haben dann die Aufgabe, die Teile so anzuordnen, dass ein sinnvoller Zahlenstrahl entsteht. Mögliche Impulse sind z. B.:
 - Was fällt euch auf?
 - Welche Hinweise geben euch die Abstände und Zahlen?
 - Wo könnte der Anfang liegen? Wo das Ende?
 - Wie erkennt ihr, ob zwei Teile zusammenpassen?
- Fehler finden: „Ein Kind hat die 700 zu weit rechts eingezeichnet. Warum stimmt das nicht? Begründet, warum die 700 nicht an dieser Stelle stehen kann.“

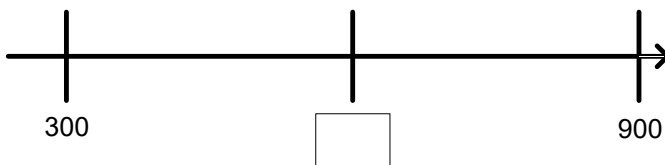
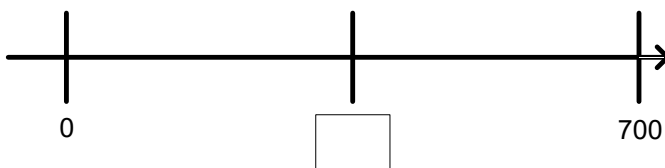
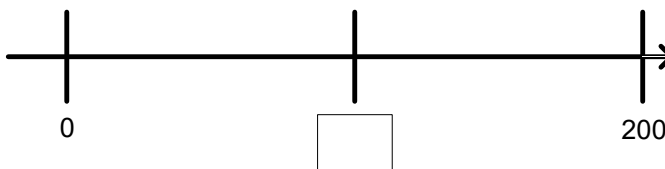
- Zahlenstrahl bauen: Die Kinder sollen eigene Zahlenstrahle (z. B. „Mein Zahlenstrahl von 0 bis 500“) gestalten.
 - Gestaltet euren eigenen Zahlenstrahl. Welche Abstände wählt ihr?
 - Was ist euch wichtig, damit euer Zahlenstrahl gut lesbar ist?
 - Vergleicht. Welcher Zahlenstrahl ist gut lesbar? Warum ist das so?

Damit die Kinder lernen, Beziehungen zwischen verschiedenen Zahlen zu erkennen, und Strategien hierfür entwickeln, können die folgenden, aufeinander aufbauenden Übungen eingesetzt werden. Hierbei ist unabdingbar, im Laufe der Zeit Zahlenstrahlausschnitte zu betrachten, die über die Zahl 100 hinausgehen und nicht mit 0 anfangen. Die Zahlenstrahlausschnitte können dabei von der Lehrkraft vorgegeben oder von den Kindern selbst entwickelt und in Partnerarbeit besprochen werden.

- „Trage die fehlende Zahl ins Kästchen ein. Beschreibe, wie du vorgehst.“ (→ *Kommunizieren*)

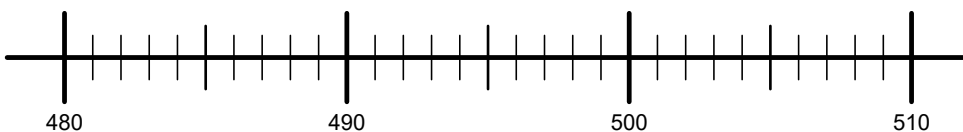


- „Welche Zahl liegt in der Mitte? Trage sie ein. Begründe.“ (→ *Argumentieren*)



Eine weitere Möglichkeit, das Verständnis für Zahlbeziehungen am Zahlenstrahl auf-/auszubauen, ist das folgende Übungsformat (vgl. Hengartner et al., 2006):

Ausschnitt aus einem Zahlenstrahl bis 1 000:



Copyright Grafiken: IQB

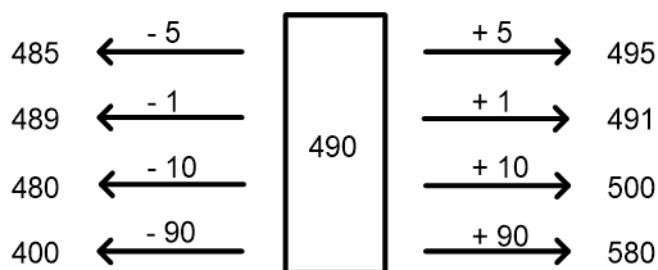
Beispiel:

492 ist gleich weit entfernt von 490 wie von 494
von 491 wie von 493

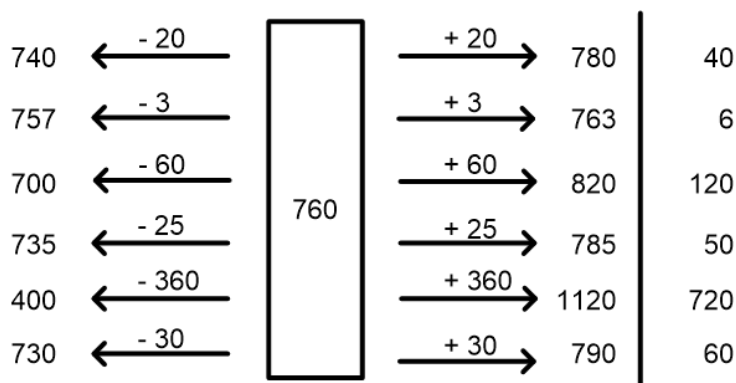
von 482 wie von 502

von 480 wie von 504

- „490 ist gleich weit entfernt von 485 und 495. Suche und notiere weitere Zahlenpaare, die gleich weit entfernt sind von 490.“



- „Wähle selbst eine Zahl zwischen 100 und 900 und schreibe sie ins Kästchen. Schreibe immer zwei Zahlen auf, die gleich weit von deiner gewählten Zahl entfernt sind. Nutze einfache und schwierige Beispiele.“
- „Bestimme jeweils den Unterschied (Differenz) zwischen der kleineren und der größeren Zahl. Schreibe die Unterschiede (Differenz) rechts neben die Beispiele.“



Copyright Grafiken: IQB

- „Addiere die kleinere Zahl mit der zugehörigen größeren Zahl und vergleiche mit der mittleren Zahl. Was fällt dir auf? Besprich dich mit einem Partnerkind. Warum ist das so? Begründe.“ (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*)

Durch das bewusste Vergleichen der Distanzen zweier Zahlen zu einer gewählten Referenzzahl wird deutlich, welche Zahl näher an bzw. weiter entfernt von der Referenzzahl liegt.

6.2 Aufgaben zu Rechnen

Aufgabe 3 in Modul A *Zahlen und Operationen*

Ergänze die fehlenden Ziffern.

	7	6	5	
-		1		
	3		2	

RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik																														
	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>-</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>							7	6	5		-	4	1	3								3	5	2						
		7	6	5																											
	-	4	1	3																											
	3	5	2																												

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.f)

Aufgabe 9 in Modul B *Zahlen und Operationen*

$8 \cdot 9$

Welcher Rechenweg passt zur Aufgabe? Kreuze an.

- ☐ $8 \cdot 8 + 9$
☐ $9 \cdot 9 + 8$
☐ $9 \cdot 9 - 8$
☐ $9 \cdot 9 - 9$

RICHTIG	Nur das 4. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)

Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren (1.2.d)
---	---

Aufgabe 7 in Modul A Zahlen und Operationen

Auf einem Tablett stehen 18 Gläser. Es werden 9 Gläser verteilt.

Wie viele sind übrig?

Kreuze die passende Rechnung an.

☐

$18 + 9$

☐

$18 - 9$

☐

$18 \cdot 9$

☐

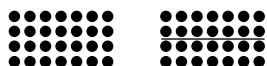
$18 : 9$

RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a)

Aufgabe 12 in Modul B Zahlen und Operationen



$$4 \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7$$

Ergänze:

$$\underline{\quad\quad} \cdot 6 = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6$$

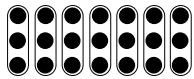
RICHTIG	8
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3); eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen (1.2.e); strukturierte Zahldarstellungen (z.B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)

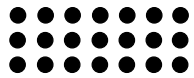
Aufgabe 10 in Modul A Zahlen und Operationen

Ira rechnet die Aufgabe $7 \cdot 3 = 21$ und zeichnet dazu dieses Bild:



Jetzt rechnet sie $3 \cdot 7 = 21$

Wie sieht das Bild dazu aus? Zeichne ein.



RICHTIG	vergleiche	Lösungsgrafik
	Richtig ist die Aufgabe, wenn drei Siebenerbündel eingezeichnet sind.	

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen (1.2.e)

Aufgabe 13 in Modul B Zahlen und Operationen

Du legst mit Ziffernkarten diese Aufgabe:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 9 & 3 \\ \hline + & 6 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Vertausche zwei Karten so, dass die Summe sich nicht ändert.

Ich vertausche die Karten _____ und _____.

RICHTIG	Eine der folgenden drei Möglichkeiten wurde genannt:
	Ich vertausche die Karten 4 [und] 6 ODER 6 [und] 4 9 [und] 2 ODER 2 [und] 9 3 [und] 1 ODER 1 [und] 3
	Richtig ist auch, wenn zwei richtige Karten markiert werden.

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
---------------------	-------------------------------

Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.f)

Aufgabe 6 in Modul A Zahlen und Operationen

Du legst mit Ziffernkarten diese Aufgabe:

$$\begin{array}{r}
 \boxed{4} \quad \boxed{9} \quad \boxed{3} \\
 + \boxed{6} \quad \boxed{2} \quad \boxed{1} \\
 \hline
 \end{array}$$

Vertausche zwei Karten so, dass die Summe kleiner wird.

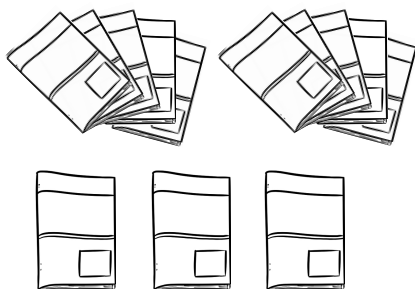
Ich vertausche die Karten _____ und _____.

RICHTIG	Eine der folgenden neun Möglichkeiten wurde genannt: Ich vertausche die Karten 2 [und] 1 ODER 1 [und] 2 4 [und] 3 ODER 3 [und] 4 4 [und] 2 ODER 2 [und] 4 4 [und] 1 ODER 1 [und] 4 9 [und] 3 ODER 3 [und] 9 9 [und] 1 ODER 1 [und] 9 6 [und] 1 ODER 1 [und] 6 6 [und] 2 ODER 2 [und] 6 6 [und] 3 ODER 3 [und] 6 Richtig ist auch, wenn zwei richtige Karten markiert werden.
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.f)

Aufgabe 14 in Modul B Zahlen und Operationen



Wie viele Hefte sind es? Kreuze die richtige Rechnung an.

- ☐ $2 \cdot 5 + 3$
- ☐ $3 \cdot 5 + 2$
- ☐ $5 + 3 \cdot 2$
- ☐ $5 + 5 \cdot 3$

RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren (1.2.d)

6.2.1 Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgaben zum Rechnen weisen unterschiedliche Schwerpunkte auf. Sie beziehen sich entweder schwerpunktmäßig auf das Operationsverständnis (Entwickeln von Grundvorstellungen, Vernetzen von Darstellungen, Nutzen von Eigenschaften und Beziehungen der Rechenoperationen) oder auf das Verstehen und Anwenden von Rechenstrategien und schriftlichen Rechenverfahren.

Die Aufgaben 7 in Modul A und 14 in Modul B erfordern von den Schülerinnen und Schülern Grundvorstellungen, entweder zur Subtraktion (Aufgabe 7 in Modul A) oder zur Multiplikation und Addition (Aufgabe 14 in Modul B). Bei Aufgabe 7 in Modul A müssen die Kinder eine Sachsituation erfassen, die den Aspekt des Veränderns anspricht, und die Subtraktion als Rechenoperation erkennen, mit der sich die Sachsituation mathematisch modellieren lässt. Bei Aufgabe 14 in Modul B müssen sie eine multiplikative Struktur (2 mal 5 Hefte) und eine additive Struktur (dazu 3 weitere Hefte) in einer Abbildung erkennen, miteinander in Beziehung setzen und schließlich einen Darstellungswechsel vollziehen, um die Abbildung in einen mathematischen Term zu übersetzen.

Ebenso wie Aufgabe 14 in Modul B beziehen sich auch die Aufgaben 9 in Modul B, 12 in Modul B und 10 in Modul A (schwerpunktmäßig) auf die Multiplikation bzw. zum Teil auch auf den Zusammenhang zwischen Multiplikation und Addition. Sie thematisieren zum Teil Rechenstrategien, bei denen mathematische Gesetzmäßigkeiten wie das Kommutativ- oder Distributivgesetz angewandt werden.

Für eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben 9 in Modul B und 12 in Modul B müssen die Schülerinnen und Schüler verstehen, dass sich Malaufgaben u. a. in leichtere Aufgaben zerlegen bzw. aus diesen zusammensetzen lassen. Hierbei kann entweder subtraktiv wie bei der Aufgabe 9 in Modul B ($8 \times 9 = 9 \times 9 - 9$) oder additiv wie bei Aufgabe 12 in Modul B ($4 \times 7 = 2 \times 7 + 2 \times 7$) vorgegangen werden. Bei Aufgabe 9 in Modul B müssen die Kinder im Zuge dessen auf die Quadrataufgabe 9×9 zurückgreifen. Bei Aufgabe 12 in Modul B müssen sie erkennen, dass eine Malaufgabe mit dem Faktor „4“ (4×7) additiv in zwei Malaufgaben mit dem Faktor „2“ ($2 \times 7 + 2 \times 7$) zerlegt wurde und daher umgekehrt die Summe aus den zwei vorgegebenen Malaufgaben mit dem Faktor „4“ ($4 \times 6 + 4 \times 6$) einer Malaufgabe mit dem Faktor „8“ (8×6) entspricht. Um die Schülerinnen und Schüler bei diesem Erkenntnisgewinn zu unterstützen, wird die additive Zerlegung von 4×7 in $2 \times 7 + 2 \times 7$ anhand eines Punktefelds visualisiert.

Aufgabe 10 in Modul A erfordert ein Verständnis für die Kommutativität der Multiplikation und dafür, wie diese anhand eines Punktefelds visualisiert werden kann. Dafür müssen die Schülerinnen und Schüler verstehen, dass der erste Faktor (der Multiplikator) angibt, wie oft der zweite Faktor (der Multiplikand) vervielfacht wird.

Die Aufgaben 3 in Modul A sowie 6 in Modul A und 13 in Modul B thematisieren jeweils einen schriftlichen Rechenalgorithmus: Aufgabe 3 in Modul A den der Subtraktion und Aufgabe 6 in Modul A und 13 in Modul B den der Addition.

Um Aufgabe 3 in Modul A richtig lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler die Idee der schriftlichen Subtraktion verstanden haben und das Verfahren anwenden können. Nur so können sie die fehlenden Ziffern im Subtrahenden und in der Differenz bestimmen.

Die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben 6 in Modul A und 13 in Modul B erfordert ein Verständnis dafür, inwiefern sich das Ergebnis bei der schriftlichen Addition durch ein Vertauschen einzelner Ziffern zwischen den bzw. innerhalb der Summanden verändert. So müssen die Kinder bei Aufgabe 13 in Modul B verstehen, dass sich das Ergebnis nicht verändert, wenn zwei Ziffern des gleichen Stellenwertes zwischen den Summanden getauscht werden (z. B. $493 + 621 = 693 + 421$). Bei Aufgabe 6 in Modul A müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass das Ergebnis kleiner wird, wenn in einem Summanden zwei Ziffern so getauscht werden, dass eine kleinere Ziffer einen höheren Stellenwert als zuvor belegt. Neben Einsichten in den schriftlichen Additionsalgorithmus und einem Bewusstsein für die Bedeutung von Stellenwerten ist dafür auch Problemlösekompetenz und das Anwenden von Lösungsstrategien (z. B. systematisches Probieren, Überprüfen gefundener Lösungen durch Kontrollrechnungen) zentral.

6.2.2 Mögliche Schwierigkeiten

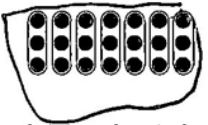
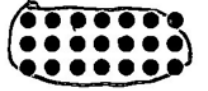
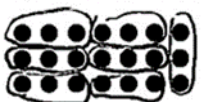
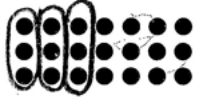
Aufgabe 7 in Modul A

Die Kinder könnten aufgrund des Signalworts „verteilen“ denken, dass die Sachsituation die Division anspricht. Dies könnte dazu führen, dass die Kinder fälschlicherweise die Rechnung $18 : 9$ auswählen.

Aufgabe 14 in Modul B

Ein typischer Fehler ist, dass nur die einzelnen Anzahlen bestimmt werden und dann die Rechnung ausgewählt wird, die diese Anzahlen enthält. Ein Kind könnte also die Rechnung $5 + 5 \times 3$ ankreuzen, da oben zwei Stapel mit jeweils fünf Heften abgebildet sind und darunter noch drei weitere Hefte liegen. Dieser Fehler könnte einerseits darauf zurückgeführt werden, dass kein Verständnis für das Mal-Zeichen bzw. die Multiplikation vorliegt, andererseits ist es möglich, dass bei der Ankreuzentscheidung nur der erste Teil der Rechnung ($5 + 5$) berücksichtigt wurde.

Aufgabe 10 in Modul A

Ira rechnet die Aufgabe $7 \cdot 3 = 21$ und zeichnet dazu dieses Bild:  Jetzt rechnet sie $3 \cdot 7 = 21$ Wie sieht das Bild dazu aus? Zeichne ein. 	Es wird veranschaulicht, dass das Ergebnis bei beiden Aufgaben gleich ist. Das Kind beachtet nicht, dass es die Tauschaufgabe einzeichnen soll.
Wie sieht das Bild dazu aus? Zeichne ein. 	Die Faktoren werden als Anzahlen eingezeichnet.
Wie sieht das Bild dazu aus? Zeichne ein.  Wie sieht das Bild dazu aus? Zeichne ein. 	Es wurde nicht erkannt, dass für die Tauschaufgabe eine andere Darstellung bzw. eine andere Gruppierung zu suchen ist. Die Rechnungen 3 mal 7 und 7 mal 3 können nicht unterschiedlich gedeutet werden.
Wie sieht das Bild dazu aus? Zeichne ein. 	Es wurde erkannt, dass eine Anzahl mal 3 genommen werden muss, aber nicht, dass diese Anzahl 7 ist.

Aufgabe 12 in Modul B

 $4 \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7$ Ergänze: <u>48</u> $\cdot 6 = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6$ $24 + 24 = 48$ Ergänze: <u>4</u> $\cdot 6$ <u>48</u> $= 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6$	Das Kind hat die Summe aus den beiden Teilaufgaben ausgerechnet. Es gelingt jedoch noch nicht, die beiden Teilaufgaben zu einer Malaufgabe zusammenzufassen.
Ergänze: <u>2</u> $\cdot 6 = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6$	Entweder wurde einer der Faktoren aus der Beispielaufgabe übernommen oder es wurde erkannt, dass hier zwei Teilaufgaben gegeben sind, bei denen jeweils die 6 multipliziert wird.

Ergänze: $\underline{4} \cdot 6 = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6$	Der erste Faktor aus der Beispielaufgabe wurde übernommen.
---	--

Aufgabe 9 in Modul B

Falsche Lösungen können darauf hindeuten, dass kein Verständnis dafür vorliegt, dass die eine Zahl bei einer Mal-Aufgabe angibt, wie oft die zweite Zahl vervielfacht wird. Ursächlich hierfür könnte sein, dass Erfahrungen mit bildlichen Darstellungen von Multiplikationsaufgaben (z. B. in Form von Punktefeldern) fehlen.

8 · 9 Welcher Rechenweg passt zur Aufgabe? Kreuze an. ☐ 8 · 8 + 9 Ist angekreuzt.	In der Aufgabe 8 x 9 wurde die Aufgabe 8 x 8 erkannt. Das Kind hat jedoch noch nicht verstanden, dass die 8 somit einmal zu wenig vervielfacht wurde. Vermutlich wurde die Rechnung mit „+ 9“ gewählt, da angenommen wurde, dass beide Zahlen aus der Aufgabe genutzt werden müssen.
☐ 9 · 9 – 8 Ist angekreuzt.	Es wurde erkannt, dass man auch 9 x 9 rechnen kann und dann noch etwas abgezogen werden muss, da das Ergebnis ansonsten zu groß wäre. Nicht erkannt wurde, dass bei der Aufgabe 9 x 9 die 9 einmal zu viel malgenommen worden ist. Vermutlich wurde die Rechnung mit „- 8“ ausgewählt, da angenommen wurde, dass beide Zahlen aus der Aufgabe genutzt werden müssen.

Aufgabe 3 in Modul A

Ergänze die fehlenden Ziffern. 	Die Ziffer an der Hunderterstelle und die Ziffer an der Einerstelle des Subtrahenden wurden nicht als fehlend erkannt. Stattdessen wurde das Ergebnis angepasst. Vermutlich ist dem Kind das Aufgabenformat nicht bekannt.
	Das schriftliche Subtrahieren ist noch nicht gefestigt. Im ersten Beispiel wurde addiert, anstatt subtrahiert. Das zweite Beispiel zeigt eine Mischform der beiden Rechenoperationen (an der Einer- und Hunderterstelle wurde subtrahiert, an der Zehnerstelle addiert).
	Es wurden nicht alle zu ergänzenden Ziffern eingetragen bzw. als fehlend erkannt.

$$\begin{array}{r}
 15 \ 14 \ 13 \ 12 \ 11 \\
 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \\
 - \ 2 \ 1 \ 10 \ 9 \\
 \hline
 4 \ 3 \ 5 \ 2 \ 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7 \ 6 \ 5 \ 4 \\
 - \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \\
 \hline
 3 \ 2 \ 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 13 \ 12 \ 11 \ 10 \ 9 \\
 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \\
 - \ 13 \ 1 \ 12 \ 11 \\
 \hline
 10 \ 9 \ 8 \ 7 \ 6 \\
 5 \ 3 \ 4 \ 2 \ 1
 \end{array}$$

Es wurde nicht erkannt, dass es sich um eine Aufgabe zum schriftlichen Subtrahieren handelt. Die Ziffern wurden im Sinne einer Zahlenfolge ergänzt.

Aufgabe 13 in Modul B

Du legst mit Ziffernkarten diese Aufgabe:

$$\begin{array}{r}
 \boxed{4} \ \boxed{9} \ \boxed{3} \\
 + \boxed{6} \ \boxed{2} \ \boxed{1} \\
 \hline
 11 \ 0 \ 4
 \end{array}$$

a) Vertausche zwei Karten so, dass die Summe sich nicht ändert.

Ich vertausche die Karten 2 und 1.

a) Vertausche zwei Karten so, dass die Summe sich nicht ändert.

Ich vertausche die Karten 4 und 9.

Die häufigste Fehllösung beruht auf der Fehlvorstellung, dass der Tausch von zwei benachbarten Ziffernkarten die Summe der Additionsaufgabe nicht verändert. Dies deutet auf ein fehlerhaftes Stellenwertverständnis hin.

a) Vertausche zwei Karten so, dass die Summe sich nicht ändert.

Ich vertausche die Karten 3 und 2.

a) Vertausche zwei Karten so, dass die Summe sich nicht ändert.

Ich vertausche die Karten 1 und 4.

Eine weitere Fehlvorstellung ist, dass der Tausch von zwei diagonal liegenden Ziffernkärtchen die Summe nicht verändert. Auch dies deutet auf ein fehlerhaftes Stellenwertverständnis hin.

a) Vertausche zwei Karten so, dass die Summe sich nicht ändert.

Ich vertausche die Karten 603 und 421.

Das Kind hat nicht die Karten benannt, die vertauscht werden sollen, sondern die beiden neuen Summanden aufgeschrieben. Es wurden zwei Karten so vertauscht, dass sich die Summe nicht verändert. Die Aufgabe wurde also richtig bearbeitet, aber das Format nicht erfasst.

a) Vertausche zwei Karten so, dass die Summe sich nicht ändert.

Ich vertausche die Karten 493 und 621.

Vermutlich wurde nicht verstanden bzw. überlesen, dass nur zwei Karten vertauscht werden sollen. Der vorgeschlagene Tausch verändert die Summe nicht.

a) Vertausche zwei Karten so, dass die Summe sich nicht ändert.

Ich vertausche die Karten 49 und 62.

a) Vertausche zwei Karten so, dass die Summe sich nicht ändert. Ich vertausche die Karten <u>0</u> und <u>0</u>.	Es wurden Ziffernkarten gewählt, die zwar zu einer richtigen Lösung führen würden, aber nicht in der Grundaufgabe enthalten sind.
--	--

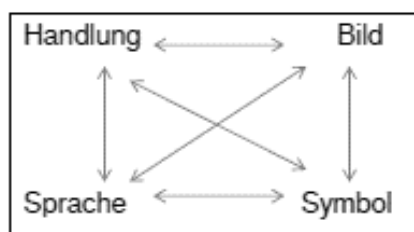
Aufgabe 6 in Modul A

Vertausche zwei Karten so, dass die Summe kleiner wird. Ich vertausche die Karten <u>4</u> und <u>6</u>. Vertausche zwei Karten so, dass die Summe kleiner wird. Ich vertausche die Karten <u>3</u> und <u>1</u>.	Die häufigste Fehllösung beruht auf der Fehlvorstellung, dass der Tausch von zwei Ziffernkarten des gleichen Stellenwertes zu einer kleineren Summe führen würde. Dies deutet auf ein fehlerhaftes Stellenwertverständnis hin.
Vertausche zwei Karten so, dass die Summe kleiner wird. Ich vertausche die Karten <u>3</u> und <u>2</u>. Vertausche zwei Karten so, dass die Summe kleiner wird. Ich vertausche die Karten <u>6</u> und <u>9</u>.	Vermutlich liegt den Lösungen die Fehlvorstellung zugrunde, dass der Tausch einer größeren Ziffer der oberen Zahl mit einer kleineren Ziffer der unteren Zahl automatisch zu einer Verringerung der Summe führen würde. Die Bedeutung der Stelle wurde vernachlässigt.
Vertausche zwei Karten so, dass die Summe kleiner wird. Ich vertausche die Karten <u>9</u> und <u>4</u>.	Das Kind hat zwei benachbarte Ziffern vertauscht, ohne zu beachten, ob sich dadurch die Summe verringert.
Vertausche zwei Karten so, dass die Summe kleiner wird. Ich vertausche die Karten <u>493</u> und <u>621</u>. Vertausche zwei Karten so, dass die Summe kleiner wird. Ich vertausche die Karten <u>934</u> und <u>621</u>. Vertausche zwei Karten so, dass die Summe kleiner wird. Ich vertausche die Karten <u>321</u> und <u>412</u>.	Das Kind hat nicht die Karten benannt, die vertauscht werden sollen, sondern die zwei Summanden aufgeschrieben. Im ersten Fall wurden die Summanden aus der Aufgabenstellung übernommen, im zweiten Fall wurde nicht verstanden bzw. überlesen, dass nur zwei Karten vertauscht werden sollen, und im letzten Fall wurden keine Karten vertauscht, sondern neue Summanden aus den Karten gebildet. Nur im letzten Fall verringert sich die Summe.

6.2.3 Anregungen für den Unterricht

Aufbau von Operationsverständnis

Ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts der Grundschule ist es, dass die Schülerinnen und Schüler ein tragfähiges Verständnis der vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) aufbauen. Dazu müssen sie Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen entwickeln und sowohl Eigenschaften als auch Zusammenhänge zwischen den Rechenoperationen erkennen, verbalisieren und flexibel nutzen können (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*). Zudem ist es wichtig, dass sie lernen, verschiedene Darstellungsformen (Handlungen, Bilder, symbolische Terme und gesprochene und geschriebene Sprache) zu verwenden und ineinander zu überführen (→ *Darstellen*, → *Modellieren*).



Copyright Abbildung: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB)

Entwickeln von Grundvorstellungen

Voraussetzung für die Entwicklung von tragfähigen Grundvorstellungen zu Rechenoperationen sind mathematische Handlungserfahrungen. Indem Kinder vielfältige Handlungen mit konkretem Material durchführen, reflektieren und ihre Handlung versprachlichen, bauen sie Grundvorstellungen auf.

Dabei können u. a. die folgenden Grundvorstellungen unterschieden werden (Hinweis: Dies ist eine Möglichkeit der Unterscheidung. In der Literatur lassen sich auch andere Bezeichnungen finden.):

Addition Verbinden (Teil-Teil-Ganzes, statisch): - In der gelben Schale liegen 4 Äpfel, in der roten Schale liegen 7 Äpfel. Wie viele Äpfel sind das zusammen? Verändern (Teil-Teil-Ganzes, dynamisch): - In der gelben Schale liegen 4 Äpfel. Malte legt 7 Äpfel in die rote Schale. Wie viele Äpfel sind das zusammen? Vergleichen (disjunkte Mengen, statisch): - In der gelben Schale liegen 4 Äpfel, in der roten Schale liegen 3 Äpfel mehr. Wie viele Äpfel liegen in der roten Schale? Ausgleichen (disjunkte Mengen, dynamisch): - In der gelben Schale liegen 4 Äpfel. Malte legt 3 Äpfel dazu, damit in der gelben und in der roten Schale gleich viele Äpfel liegen. Wie viele Äpfel liegen in der roten Schale?	Subtraktion Verbinden (Teil-Teil-Ganzes, statisch): - Anna und Mohammed haben zusammen 8 Murmeln. Anna hat 6 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Mohammed? Verändern (Teil-Teil-Ganzes, dynamisch): - Anna hat 8 Murmeln. Sie gibt Mohammed 6 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Anna nun noch? Vergleichen (disjunkte Mengen, statisch): - Anna hat 8 Murmeln. Mohammed hat 6 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Mohammed weniger als Anna? Ausgleichen (disjunkte Mengen, dynamisch): - Anna hat 8 Murmeln. Sie legt 6 Murmeln weg, damit sie genauso viele Murmeln wie Mohammed hat. Wie viele Murmeln hat Mohammed?
Multiplikation Räumlich-simultan, statisch: - Auf dem Tisch stehen 4 Vasen mit jeweils 5 Blumen. Wie viele Blumen sind das zusammen? Zeitlich-sukzessiv, dynamisch: - Nina geht dreimal in den Garten und bringt jedes Mal 4 Blumen mit. Wie viele Blumen hat sie mitgebracht?	Division Aufteilen (gesucht: Anzahl der Teilmengen): - Marc hat 28 Bonbons. Er möchte immer 4 Bonbons in eine Tüte packen. Wie viele Tüten kann er packen? Verteilen (gesucht: Anzahl pro Teilmenge): - Marc hat 28 Bonbons. Er will sie gerecht mit seinen 3 Freunden teilen. Wie viele Bonbons bekommt jeder?

Zentral ist, dass die Kinder im Mathematikunterricht zu all diesen Grundvorstellungen Erfahrungen sammeln, damit sie die Bedeutungsvielfalt der Rechenoperationen erfassen. Eine begriffliche Unterscheidung wird von den Schülerinnen und Schülern nicht verlangt. Es sollte beim Verbalisieren von Handlungen und beim Besprechen von Lösungen jedoch darauf geachtet werden, dass sich die

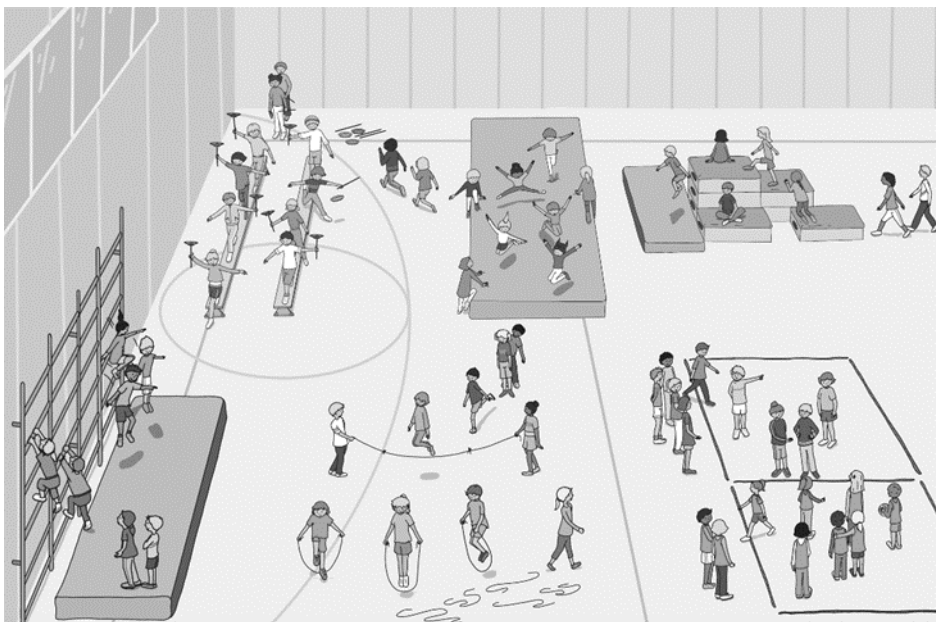
Kinder nicht (nur) auf Signalwörter wie z. B. „hinzukommen“, „wegnehmen“ oder „verteilen“ fokussieren, sondern immer den gesamten Kontext berücksichtigen. Dies wird z. B. durch die Rechengeschichte „Marc hat 28 Bonbons. Er verteilt 20 Bonbons in seiner Klasse. Wie viele Bonbons hat er noch?“ deutlich, bei der trotz des Signalwortes „verteilen“ nicht dividiert, sondern subtrahiert werden muss.

Vernetzen von Darstellungsebenen

Um Grundvorstellungen aufzubauen, müssen konkrete Handlungen mit geeigneten Materialien als gedankliche Handlungen verinnerlicht werden. Damit dies gelingt, müssen verschiedene Darstellungsformen (Handlungen, Bilder, symbolische Terme, gesprochene und geschriebene Sprache) miteinander vernetzt werden. Die folgenden Übungen dienen dazu, das flexible Ineinander-Überführen der Darstellungsformen mit den Schülerinnen und Schülern zu thematisieren. Dabei sollten die Kinder stets dazu angeregt werden, zu erklären und begründen, warum die verschiedenen Darstellungsformen zusammenpassen (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*). Auch nach der Beendigung der eigentlichen Erarbeitungssequenz sollten solche Übungen regelmäßig Teil des Unterrichts sein.

Wimmelbilder und Eigenproduktionen

In einem ersten Schritt können die Kinder anhand von Bildern, die ihrer Lebenswelt entsprechen (wie z. B. Wimmelbilder), Situationen beschreiben, die sich mathematisieren lassen. Zu diesen sollen dann passende Terme formuliert werden. Dabei werden verschiedene Grundvorstellungen zu den Operationen angesprochen (vgl. Beispiele). Ebenso können die Kinder eigene Bilder, Fotografien, Geschichten oder Spielszenen erstellen, zu denen dann andere Kinder versprachlichen, was sie sehen, und passende Terme zu den Versprachlichungen finden. Da viele Darstellungen mehrdeutig sind, kann der Situation erst nach der Versprachlichung ein passender Term zugeordnet werden. Gleichzeitig bietet diese Vielfalt an Deutungsmöglichkeiten den Kindern die Möglichkeit, in den Austausch zu treten und Zusammenhänge zwischen den Rechenoperationen (z. B. die Subtraktion als Umkehroperation der Addition) zu erkunden. (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*).



(Wienhues et al., 2022)

Beispiele:

5 Kinder sind auf der Sprossenwand. 3 springen runter. Es sind noch 2 Kinder da. (Verändern)

$$5 - 3 = 2$$

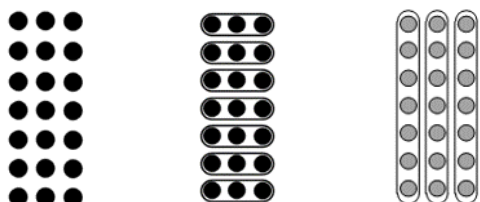
2 Kinder sind links an der Sprossenwand, 3 Kinder sind rechts. Insgesamt sind es 5 Kinder. (Verbinden)

$$2 + 3 = 5$$

- Auseinandersetzung mit Anschauungsmaterialien

Auch in der Auseinandersetzung mit Anschauungsmaterialien wie z. B. Hunderterfeldern sollten die Kinder zur Darstellungsvernetzung angeregt werden. Dabei sollten die Handlungen am Material nicht nur ausgeführt, sondern auch beschrieben werden. Die Beschreibungen sollten anschließend in Terme und/oder zeichnerische Darstellungen übersetzt werden, um alle Darstellungsformen miteinander in Beziehung zu setzen. Dies kann z. B. wie folgt aussehen:

Die Kinder erzeugen ein Punktebild durch Abdecken eines Hunderterfeldes mit einem Abdeckwinkel (z. B. „Ich lege meinen Abdeckwinkel so auf das Hunderterfeld, dass es 7 Zeilen mit jeweils 3 Punkten sind.“). Dann beschreiben sie, welche Multiplikationsaufgabe zum Punktebild passt, begründen ihre Entscheidung (z. B. „Es passt 7×3 , weil in jeder Zeile ein Dreier ist und es insgesamt 7 Dreier sind.“) und stellen diese zeichnerisch dar. (→ *Argumentieren*, → *Darstellen*)



Copyright Grafiken: IQB

Da neben 7×3 auch die Aufgabe 3×7 im Punktefeld gesehen werden kann (z. B. „Es passt auch 3×7 , weil in jeder Spalte ein Siebener ist und es insgesamt 3 Siebener sind“), können die Schülerinnen und Schüler ein Verständnis für die Kommutativität der Multiplikation entwickeln.

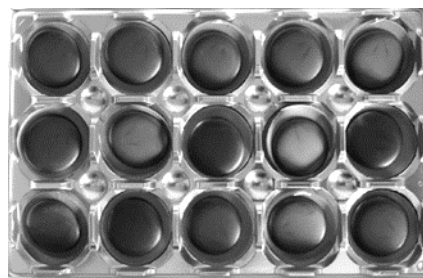
Ziehen von Rechenzeichenkarten



Ein Kind zieht eine Karte und führt passend zum Rechenzeichen eine Handlung mit Material (z. B. Muggelsteine) aus. Das zweite Kind versprachlicht die Handlung in Form einer Sachsituation. Das dritte Kind notiert den zugehörigen Term bzw. die zugehörige Gleichung. Die Übung ist auch in jeder beliebigen anderen Reihenfolge möglich. (→ *Kommunizieren*, → *Modellieren*)

Malausstellung

Die Kinder sammeln Verpackungen und finden zu diesen Rechenaufgaben, z. B. 4 Kaugummipäckchen mit je 5 Kaugummis ($5 + 5 + 5 + 5 = 20$ oder $4 \times 5 = 20$). Dabei entdecken die Kinder, dass es Verpackungen gibt, zu denen man mehrere Aufgaben finden kann (z. B. eine Pralinenpackung, in der die Pralinen waagerecht und senkrecht in Reihen angeordnet sind: $3 \times 5 = 15$ oder $5 \times 3 = 15$ oder $5 + 5 + 5 = 15$ oder $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$). Auf diese Weise kann sowohl die Kommutativität der Multiplikation als auch die Multiplikation als wiederholte Addition erarbeitet werden. (→ *Argumentieren*)



Erkennen von Zusammenhängen – Operation und Umkehroperationen

Addition – Subtraktion:

Handlung: Der Schüler Martin soll zuerst 10 Hefte und dann 7 Hefte holen. Nun hat er auf seinem Tisch 17 Hefte. Die Schülerinnen und Schüler formulieren gemeinsam die zugehörige Gleichung ($10 + 7 = 17$). Im nächsten Schritt wird Martin gebeten, die 7 Hefte wieder zurückzubringen. Erneut formulieren die Schülerinnen und Schüler die zugehörige Gleichung ($17 - 7 = 10$).

Multiplikation – Division

In der Klasse sind 28 Kinder. Die Lehrkraft teilt sie in Vierergruppen ein und fragt die Schülerinnen und Schüler, wie viele Gruppen es sind? Die Schülerinnen und Schüler formulieren gemeinsam die zugehörige Gleichung ($28 : 4 = 7$). In der Klasse sind jetzt 7 Gruppen mit jeweils 4 Kindern. Die Lehrkraft fragt nun, wie viele Kinder es insgesamt sind. Erneut formulieren die Schülerinnen und Schüler gemeinsam die zugehörige Gleichung ($7 \times 4 = 28$).

- Aufgabe des Tages

Eine Aufgabe wird vorgegeben und von den Kindern auf verschiedene Weise dargestellt (z. B. als Term, mit Anschauungsmaterialien, am Rechenstrich, mit einem Bild aus dem Alltag und/oder in Form einer Rechengeschichte). Dabei wird stets beschrieben, warum die gewählte Darstellung zur Aufgabe des Tages passt. (→ *Darstellen*, → *Modellieren*, → *Argumentieren*)

Nutzen von Eigenschaften und Beziehungen der Rechenoperationen (am Beispiel der Multiplikation)

Damit Schülerinnen und Schüler Malaufgaben sicher und schnell lösen können, müssen sie über verschiedene Rechenstrategien verfügen und diese in Abhängigkeit von der konkreten Aufgabe flexibel einsetzen können. Voraussetzung dafür ist, dass sie die Kernaufgaben ($\times 1$, $\times 2$, $\times 5$, $\times 10$, Quadrataufgaben) des kleinen Einmaleins sicher beherrschen und diese in Beziehung zu anderen Malaufgaben setzen können. Um diese Beziehungen zu erarbeiten, bietet sich die Arbeit mit Punktefeldern an. Die Beziehungen sollten dabei stets von den Schülerinnen und Schülern versprachlicht und erklärt werden (→ *Kommunizieren*).

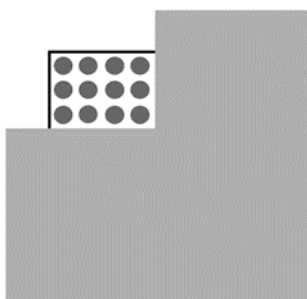


„Ich sehe drei Siebener, das sind 3×7 .“

„Ich sehe $3 \times 5 + 3 \times 2$.“

„Ich sehe sieben Dreier, also 7×3 .“

„Ich sehe $5 \times 3 + 2 \times 3$.“



Copyright Grafiken: IQB

Impuls: „Zeige 4×4 .“

Verbalisierung: „Ich sehe 4 Vierer, also 16.“

Impuls: „Mache daraus 3×4 .“

Verbalisierung: „Ich schiebe eine Reihe nach oben, es kommt ein Vierer weg, also 3 Viererreihen. Das sind 12.“

Impuls: „Zeige 4×4 . Schiebe zwei Spalten nach rechts. Was passiert? Welche Aufgabe entsteht?“

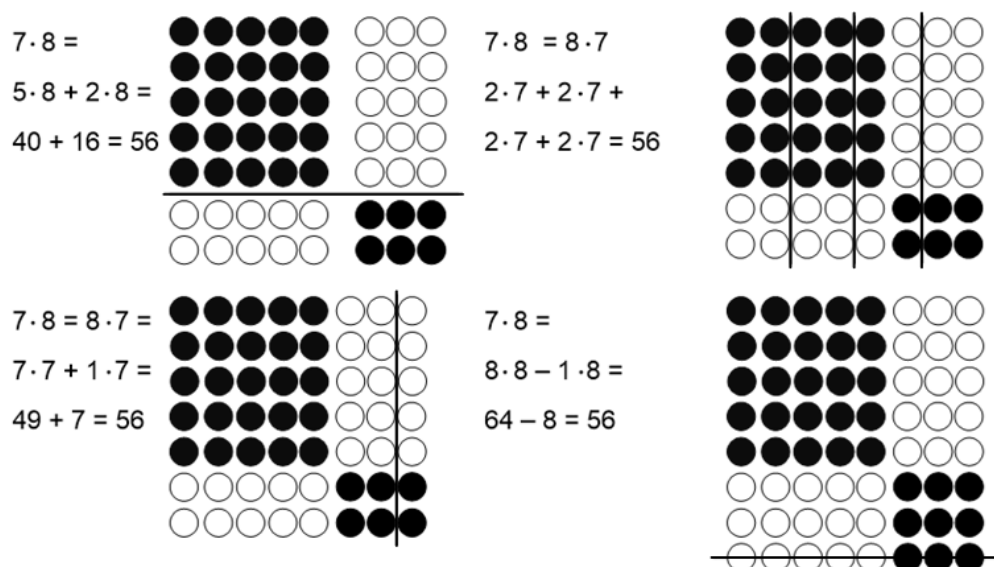
Verbalisierung: „Es werden in jeder Zeile zwei mehr. Es entsteht die Aufgabe 4×6 .“

Haben die Schülerinnen und Schüler die Kernaufgaben und deren Beziehungen zu anderen Malaufgaben erarbeitet, können die verschiedenen Rechenstrategien (Nutzen von Tauschaufgaben

und Nachbaraufgaben, Verdoppeln oder Halbieren eines Faktors, Zerlegen eines Faktors) erarbeitet werden. Am Beispiel der Aufgabe 7×8 könnte dies wie folgt aussehen:

- $7 \times 8 = 5 \times 8 + 2 \times 8$ (Zerlegen eines Faktors)
- $7 \times 8 = 8 \times 8 - 1 \times 8$ (Nutzen einer Nachbaraufgabe)
- $8 \times 7 = 2 \times 7 + 2 \times 7 + 2 \times 7$ (Zerlegen eines Faktors)
- $8 \times 7 = 7 \times 7 + 1 \times 7$ (Nutzen einer Nachbaraufgabe)

Es sind noch weitere Strategien möglich. Die Strategien sollten an Punktefeldern veranschaulicht werden und die Veranschaulichungen sprachlich begleitet werden ($\rightarrow$ *Darstellen*, $\rightarrow$ *Kommunizieren*). Die Darstellungen können dann als Anlass dienen, um über die Strategien und deren Eignung bei verschiedenen Malaufgaben zu reflektieren ($\rightarrow$ *Argumentieren*).



Copyright Grafik: IQB

Verstehen und Anwenden schriftlicher Rechenverfahren

Neben einem Operationsverständnis sollten die Schülerinnen und Schüler auch ein gesichertes Verständnis für die schriftliche Addition und Subtraktion (und in Jahrgangsstufe 4 auch für die Multiplikation) aufbauen. Dieses Verständnis sollte ebenfalls material- bzw. handlungsgestützt erarbeitet werden, wie im Folgenden am Beispiel der schriftlichen Addition skizziert wird.

Zur verständnisbasierten Erarbeitung der schriftlichen Addition kann das Dienes-Material genutzt werden. Mit diesem Material lassen sich Zahlen stellengerecht legen (Einer rechts, Zehner links daneben, Hunderter links daneben, usw.), anordnen und schrittweise addieren:

Schriftliche Addition

		Hunderterstelle	Zehnerstelle	Einerstelle	
		H	Z	E	
1. Zahl		1	3	5	
2. Zahl +			8	4	
Übertrag		1			
Summe		2	1	9	

bündeln
10Z = 1 H

Ich beginne an der
Einerstelle und rechne
von oben nach unten
 $5 + 4 = 9$

Zuerst werden die Einer zusammengefasst: „5 Einer plus 4 Einer ergeben 9 Einer.“ Im Anschluss werden die Zehner zusammengefasst: „3 Zehner plus 8 Zehner ergeben 11 Zehner. 10 Zehner werden zu 1 Hunderterplatte gebündelt.“ Der verbleibende Zehner wird notiert: „Ich schreibe 1 Zehner und merke mir 1 Hunderter“. Zum Schluss werden die Hunderter zusammengefasst und stellengerecht notiert: „1 Hunderter plus 1 Hunderter (gemerkt) ergeben 2 Hunderter. Ich schreibe 2 Hunderter.“ (→ *Kommunizieren*)

Auch für die Einführung der schriftlichen Subtraktion eignet sich das Dienes-Material. Vor allem der Vorgang des Entbündelns beim Abziehverfahren kann mit diesem (z. B. Tausch 1 Zehnerstange in 10 Einer oder Tausch 1 Hunderterplatte in 10 Zehnerstangen) gut veranschaulicht werden.

Sobald das Verfahren der schriftlichen Addition bzw. Subtraktion unter Einbezug des Materials verständnisbasiert erarbeitet worden ist, kann auf symbolischer Ebene weitergearbeitet werden. Ziel sollte dann sein, das Ausführen der schriftlichen Addition und der schriftlichen Subtraktion durch vielfältige Übungen zu festigen. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben kann dabei über die folgenden Aspekte variiert werden:

- Aufgaben mit Stellenübergang (Bündeln / Entbündeln an der Zehnerstelle, Erweitern an der Zehner- und Einerstelle)
- Aufgaben mit Stellenübergang (Bündeln / Entbündeln an der Hunderterstelle, Erweitern an der Hunderter- und Zehnerstelle)
- Aufgaben mit mehreren Stellenübergängen (Bündeln / Entbündeln an mehreren Stellen, Erweitern an mehreren Stellen)
- Aufgaben mit der Ziffer „0“ an unterschiedlichen Stellen

Wichtig hierbei ist, dass immer auf das stellengerechte Schreiben der Zahlen geachtet wird. Anfangs bietet es sich daher an, die Zahlen entweder in eine Stellenwerttabelle einzutragen oder die Stellen-

werte (H, Z, E) als Orientierungshilfen über den Aufgaben zu notieren. Zu einem späteren Zeitpunkt können die Kinder nur noch daran erinnert werden, die einzelnen Zahlen erst einmal stellengerecht untereinander zu schreiben, bevor mit dem Rechnen begonnen wird.

Im weiteren Verlauf sollten dann Aufgabenvariationen mit problemhaltigen Aufgabenstellungen eingesetzt werden, die einen kreativen Umgang und ein vertieftes Verständnis des schriftlichen Rechnens unterstützen, z. B.:

- Lücken- oder Klecksaufgaben, bei denen fehlende Ziffern ergänzt werden müssen
- Fehlerhafte Aufgabenlösungen untersuchen, Rechenfehler beschreiben und diese berichtigen (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*)
- „Suche Aufgaben mit einem möglichst kleinen Ergebnis. Wie gehst du vor?“
- „Suche Aufgaben mit einem möglichst großen Ergebnis. Wie gehst du vor?“
- „Ziehe sechs Ziffernkarten und bilde zwei dreistellige Zahlen. Addiere schriftlich. Das Ergebnis soll a) nahe an 500 liegen b) zwischen 300 und 700 liegen c) unter 500 liegen, ...“
- „Ziehe sechs Ziffernkarten und bilde zwei dreistellige Zahlen. Subtrahiere schriftlich. Das Ergebnis soll a) nahe an 100 liegen b) zwischen 200 und 600 liegen c) über 400 liegen, ...“
- „Suche Aufgaben, deren Ergebnis ein Zahlenmuster (IRI, ANNA-Zahl) ist und einen Übergang an der Zehnerstelle hat. Beschreibe, wie du die Ziffern legen musst.“
- „Suche Aufgaben, bei denen das Ergebnis eine Drillingszahl (drei gleiche Ziffern) ist.“
- „Finde Aufgaben, die im Ergebnis eine Null an der Zehnerstelle haben. Wie gehst du vor?“
- Lernumgebung: „Triff die Tausend“ (schriftliche Addition)

Bei all diesen Aufgaben bietet sich die Arbeit mit Ziffernkärtchen an. Weitere Anregungen zum schriftlichen Addieren mit Ziffernkärtchen und zur Lernumgebung „Triff die Tausend“ finden sich unter <https://pikas.dzlm.de/unterricht/gute-aufgaben/zahlen-und-operationen/schriftliches-addieren-mit-ziffernkarten> (Zuletzt abgerufen am 17.02.2026).

6.3 Aufgaben zu In Kontexten rechnen

Aufgabe 12 in Modul A *Zahlen und Operationen*

Dario nimmt 9 € aus dem Sparschwein. Er kauft damit den Ball. Danach gibt ihm Oma 20 €, die er in das Sparschwein steckt. Jetzt sind 80 € im Sparschwein.

Zu Beginn waren _____ € im Sparschwein.



RICHTIG	69 [€]
---------	--------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	IV

Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a); einfache kombinatorische Aufgaben (z.B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen (1.3.e); Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)

Aufgabe 10 in Modul B Zahlen und Operationen

Daniela hat 14 € gespart.

Wenn sie noch 26 € mehr spart, hat sie halb so viel Geld wie Hannes.

Hannes hat vier Mal so viel Geld wie Tom.

Tom hat _____ €.

RICHTIG	20 [€]
---------	--------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a); einfache kombinatorische Aufgaben (z.B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen (1.3.e); Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)

Aufgabe 11 in Modul B Zahlen und Operationen

Konrad sagt:

Ich denke mir zwei Zahlen.
Wenn ich die Zahlen addiere, erhalte ich 20.
Wenn ich die eine von der anderen
subtrahiere, erhalte ich 6.



Die Zahlen sind _____ und _____.

RICHTIG	13 [und] 7 ODER 7 [und] 13
---------	----------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z.B. systematisch probieren) (1.2); mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)

Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	einfache kombinatorische Aufgaben (z.B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen (1.3.e)
---	--

6.3.1 Aufgabenbezogener Kommentar

Bei der Bearbeitung von Aufgaben aus dem Bereich „In Kontexten rechnen“ wenden die Kinder mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten in der Auseinandersetzung mit (realitäts-bezogenen) Sachkontexten an.

Zu Beginn des Lösungsprozesses müssen die zur Bearbeitung erforderlichen Informationen aus dem Sachkontext, der in Form eines Textes und/oder eines Bildes vorliegt, entnommen werden. Der Sachkontext ist dabei i. d. R. eine Situation aus der Erfahrungswelt der Kinder und stellt eine Verbindung zwischen dem Mathematikunterricht und der Lebenswirklichkeit her. Anschließend muss ein mathematisches Modell aufgestellt werden, das zum Sachkontext passt. Dazu werden die gegebenen Informationen in die Sprache der Mathematik übersetzt und durch eine oder mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpft. Nachdem die Rechenoperationen ausgeführt wurden, muss das mathematische Ergebnis im Hinblick auf den Sachkontext interpretiert werden. (→ *Modellieren*)

Dabei kann zwischen klassischen Sachaufgaben und Problemlöseaufgaben (auch „Knobelaufgaben“ oder „Rätselaufgaben“ genannt) unterschieden werden. Letztere zeichnen sich i. d. R. dadurch aus, dass keine mathematischen Standardverfahren zur Lösung des Problems zur Verfügung stehen. Neben Kompetenzen im Bereich des Modellierens und der Texterschließung ist daher auch eine Problemlösekompetenz von Bedeutung. Dazu zählt u. a. die Anwendung von Problemlösestrategien („heuristische Strategien“). Ziel sollte sein, die Kinder weg von einem zufälligen Probieren hin zu einem systematischen Vorgehen zu führen. (→ *Problemlösen*)

Die Bearbeitung von Aufgabe 12 in Modul A erfordert die Fertigkeit, „rückwärts“ zu rechnen. Die Schülerinnen und Schüler müssen erkennen, dass sie die Rechenoperationen, die der Sachkontext nahelegt, umdeuten müssen, um ausgehend von dem Endergebnis den Anfangszustand zu rekonstruieren. Konkret bedeutet dies, dass sie die nahegelegte Addition („Oma steckt Dario 20 € in das Sparschwein“) in eine Subtraktionsaufgabe ($80\text{ €} - 20\text{ €}$) und die nahegelegte Subtraktion („Der Ball kostet 9 €“) in eine Additionsaufgabe ($60\text{ €} + 9\text{ €}$) übersetzen müssen.

Bei Aufgabe 10 in Modul B müssen die Kinder zunächst die Information „26 € mehr“ in eine Additionsaufgabe übersetzen. Anschließend müssen sie die Formulierungen „halb so viel“ und „vier Mal so viel“ als Rechenoperationen deuten und erkennen, dass auch hier die Umkehroperationen ($\times 2$ und $: 4$) ausgeführt werden müssen, um das ersparte Geld von Tom zu berechnen.

Aufgabe 11 in Modul B stellt eine Problemlöseaufgabe dar. Die Schülerinnen und Schüler müssen zwei Zahlen finden, für die die folgenden zwei Bedingungen gelten: Die Summe der Zahlen ergibt 20 und die Differenz der Zahlen beträgt 6. Dies kann ihnen u. a. durch ein (systematisches) Probieren und mithilfe des Wissens über die Konstanz der Summe gelingen: Wenn ein Summand um einen Wert verkleinert und der andere Summand um den gleichen Wert vergrößert wird, bleibt das Ergebnis gleich. Ausgehend von dieser Erkenntnis können die Kinder die verschiedenen Zahlenpaare, die in Summe 20 ergeben, systematisch auf die zweite Bedingung hin überprüfen. Aus fachsprachlicher Sicht müssen ihnen dafür die Begriffe „addieren“ und „subtrahieren“ vertraut sein.

6.3.2 Mögliche Schwierigkeiten

Aufgabe 12 in Modul A

Zu Beginn waren <u>89</u> € im Sparschwein.	Es wurde nicht berücksichtigt, dass Dario die 20 € nach dem Kauf geschenkt bekommen hat. Die 20 € hätten daher noch subtrahiert werden müssen.
Zu Beginn waren <u>109</u> € im Sparschwein.	Es wurde nicht berücksichtigt, dass Dario die 20 € nach dem Kauf geschenkt bekommen hat. Die 20 € wurden fälschlicherweise addiert anstatt subtrahiert.
Zu Beginn waren <u>57</u> € im Sparschwein.	Die 9 € hätten addiert anstatt subtrahiert werden müssen, um das Herausnehmen der 9 € rückgängig zu machen.
Zu Beginn waren <u>71</u> € im Sparschwein.	Die 9 € hätten addiert anstatt subtrahiert werden müssen, um das Herausnehmen der 9 € rückgängig zu machen. Zudem wurde nicht berücksichtigt, dass Dario die 20 € nach dem Kauf geschenkt bekommen hat. Die 20 € hätten daher noch subtrahiert werden müssen.
Zu Beginn waren <u>9</u> € im Sparschwein. Zu Beginn waren <u>80</u> € im Sparschwein.	Es wurde der im Text zuerst/zuletzt genannte Geldwert notiert. Der Sachkontext wurde nicht erfasst.

Aufgabe 10 in Modul B

Tom hat <u>320</u> €.	Das Ersparnis von Hannes (80 €) wurde richtig berechnet. Da Hannes viermal so viel Geld wie Tom hat, hätte anschließend jedoch dividiert ($80 € : 4$) anstatt multipliziert ($80 € \times 4 = 320 €$) werden müssen.
Tom hat <u>160</u> €.	Es wurde nicht berücksichtigt, dass Daniela halb so viel Geld wie Hannes hat. Das somit falsch berechnete Ersparnis von Hannes (40 €) wurde zudem mit dem Faktor 4 multipliziert ($40 € \times 4 = 160 €$), anstatt es durch 4 zu dividieren.
Tom hat <u>10</u> €.	Es wurde nicht berücksichtigt, dass Daniela halb so viel Geld wie Hannes hat. Das somit falsch berechnete Ersparnis von Hannes (40 €) wurde dann jedoch korrekt durch 4 dividiert ($40 € : 4 = 10 €$).
Tom hat <u>56</u> €.	Es wurde nur mit einem der beiden Ausgangsbeträge (14 €) gerechnet und nicht berücksichtigt, dass Daniela halb so viel Geld wie Hannes hat. Das somit falsch berechnete Ersparnis von Hannes (14 €) wurde zudem mit dem Faktor 4 multipliziert, anstatt es durch 4 zu dividieren.
Tom hat <u>52</u> €.	Es wurde nur mit einem der beiden Ausgangsbeträge (26 €) gerechnet. Das somit falsch bestimmte Ersparnis von Daniela (26 €) wurde dann jedoch korrekt verdoppelt, um das Ersparnis von Hannes zu bestimmen ($26 € \times 2 = 52 €$). Der letzte Rechenschritt (durch 4 dividieren), um das Ersparnis von Tom zu berechnen, wurde nicht durchgeführt.

Aufgabe 11 in Modul B

Konrad sagt: Ich denke mir zwei Zahlen. Wenn ich die Zahlen addiere, erhalte ich 20. Wenn ich die eine von der anderen subtrahiere, erhalte ich 6.  Die Zahlen sind <u>14</u> und <u>6</u>. Die Zahlen sind <u>10</u> und <u>10</u>. Die Zahlen sind <u>12</u> und <u>8</u>.	Es wurde nur der erste Teil der Aussage (die Summe der zwei Zahlen ist 20) beachtet.
Konrad sagt: Ich denke mir zwei Zahlen. Wenn ich die Zahlen addiere, erhalte ich 20. Wenn ich die eine von der anderen subtrahiere, erhalte ich 6.  Die Zahlen sind <u>10</u> und <u>4</u>.	Es wurde nur der zweite Teil der Aussage (die Differenz der zwei Zahlen ist 6) beachtet.
Konrad sagt: Ich denke mir zwei Zahlen. Wenn ich die Zahlen addiere, erhalte ich 20. Wenn ich die eine von der anderen subtrahiere, erhalte ich 6.  Die Zahlen sind <u>20</u> und <u>6</u>. Die Zahlen sind <u>6</u> und <u>20</u>.	Es wurden lediglich die Zahlen aus der Sprechblase abgeschrieben.

6.3.3. Anregungen für den Unterricht

Um eine Sachaufgabe richtig lösen zu können, muss der Sachkontext verstanden und sachgemäß mathematisiert werden: Was ist die Ausgangssituation? Welche Informationen sind gegeben und welche davon sind relevant? Mit welchen Rechenoperationen müssen die relevanten Informationen verknüpft werden? Kinder, die sich nur oberflächlich mit dem Sachkontext auseinandersetzen, überlesen ggf. wichtige Hinweise, die sie zur korrekten Bearbeitung der Aufgabe benötigen. Aufgabe der Lehrkraft ist daher, die Schülerinnen und Schüler beim sinnerfassenden Lesen zu unterstützen.

Ideen zur Unterstützung des sinnerfassenden Lesens

Haben die Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten beim Verständnis eines Sachkontextes, bieten sich Zugänge an, die das sinnerfassende Lesen der Aufgabenstellung und der damit zusammenhängenden mathematischen Problemstellung zum Ziel haben. Die Kinder sollten also dazu angeregt werden, den Sachkontext hinsichtlich wichtiger Informationen und deren Zusammenhänge zu untersuchen. Da die bloße Orientierung an „Signalwörtern“ dabei i. d. R. wenig zielführend ist, müssen die gefundenen Informationen stets im jeweiligen Sachkontext interpretiert und bewertet werden.

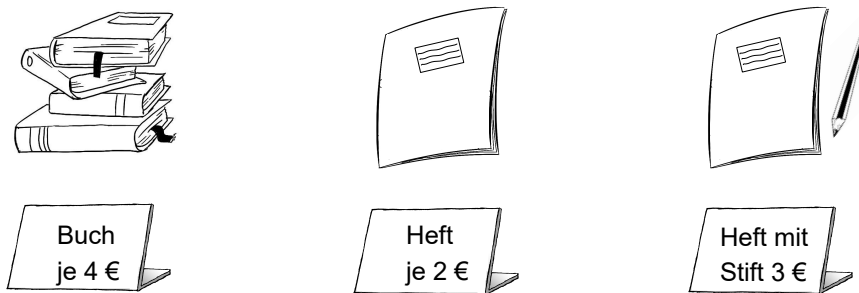
Mögliche Herangehensweisen, um mit den Kindern einzuüben, die Aufmerksamkeit auf relevante Informationen zu richten, sind die folgenden.

Mit dem Bus zur Oma

Lena besucht ihre Oma. Sie fährt um 15 Uhr mit dem Bus los. Der Bus fährt 20 Minuten. Dann muss sie noch 10 Minuten zu Fuß gehen. Wann ist sie bei Oma?

- Die Schülerinnen und Schüler geben den Text mit eigenen Worten wieder oder stellen sich gegenseitig Fragen zum Text und beantworten diese (z. B. „Wann fährt Lena los?“, „Wie lange fährt der Bus?“).
- Die Schülerinnen und Schüler erstellen ein Bild von der Situation, indem sie eine Skizze oder ein Bild passend zur Sachsituation anfertigen. Hierbei können zur Verdeutlichung die Zahlen aus dem Text dazu geschrieben werden. Je nach Aufgabe können auch Tabellen oder Diagramme erstellt werden. Dabei ist zu beachten, dass derartige Strategien bewusst im Unterricht thematisiert werden, um sie langfristig nutzbar zu machen. Die Strategien stellen demnach einen eigenen Lerngegenstand dar.

Eine weitere Möglichkeit, um das Verständnis von Sachkontexten zu fördern, ist das Nachstellen dieser Kontexte. Insbesondere Einkaufssituationen, in denen z. B. Schulbücher, Bücher aus der Klassen- oder Schulbücherei oder Hefte gekauft werden müssen, bieten sich hierfür an. Damit der Fokus ausschließlich auf dem Verstehen des Sachkontextes liegt, sollten Preisschilder mit kleineren Eurobeträgen ohne Cent-Angaben verwendet werden. Mit einer Geldbörse und Spielgeld kann die Situation realistisch und für die Kinder motivierend umgesetzt werden.



Copyright Grafiken: IQB

Sinnvoll ist zudem, die Schülerinnen und Schüler immer wieder dazu zu ermutigen, ihre Lösungen zu hinterfragen und zu überprüfen, ob das gefundene Ergebnis eine Lösung des Sachkontextes darstellt (siehe auch Didaktischer Kommentar „Überschlagen und Plausibilitätsprüfung“). Sofern möglich, sollten die Schülerinnen und Schüler sich dafür in Partnerarbeit oder in Kleingruppen ihre Lösungswege gegenseitig vorstellen und gemeinsam überlegen, ob und warum ihre Ergebnisse stimmen können (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*).

Da es für das Lösen von Sachaufgaben jedoch nicht ausreicht, die Sachkontexte nur zu erschließen, müssen die Schülerinnen und Schüler auch lernen, Sachkontexte angemessen zu mathematisieren, d. h. in eine oder mehrere Rechnung(en) zu übersetzen. Voraussetzung dafür ist, dass sie über Grundvorstellungen zu den vier Grundrechenarten verfügen. Anregungen, wie die Entwicklung von Grundvorstellungen im Unterricht gefördert werden kann, können dem Didaktischen Kommentar „Rechnen“ entnommen werden.

Viele Sachkontexte legen dabei einen eindeutigen Lösungsweg nahe, der auf den bekannten Rechenverfahren basiert (→ *Modellieren*). Ist dies nicht der Fall, da eine problemhaltige Sachaufgabe vorliegt, müssen die Kinder zur Lösung der Aufgabe heuristische Strategien anwenden können (→ *Problemlösen*).

Ideen zur Förderung heuristischer Strategien

Der Begriff „Heuristik“ bedeutet „Entdeckung“. Heuristische Strategien sollen den Schülerinnen und Schülern dementsprechend helfen, den Kern eines Problems bzw. einer problemhaltigen (Sach-) Aufgabe zu entdecken. Zu den heuristischen Strategien gehören u. a. das systematische Probieren, das Zerlegen in Teilprobleme, das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten sowie das Wechseln

der Darstellungsform (z. B. Anfertigen einer Skizze oder Tabelle). Sie können sowohl einzeln als auch in Kombination angewandt werden.

Nachfolgend wird exemplarisch aufgezeigt, welche Aufgabenformate sich eignen, um die Kinder an verschiedene Lösungsstrategien heranzuführen. Entscheidend dabei ist, dass stets gemeinsam reflektiert wird, welche Strategien warum jeweils (nicht) hilfreich waren, um eine angemessene Verwendung der Strategien zu fördern und diese nachhaltig bei den Schülerinnen und Schülern zu festigen (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*).

Beispiel „Zahlenrätsel“

Finde die Zahlen

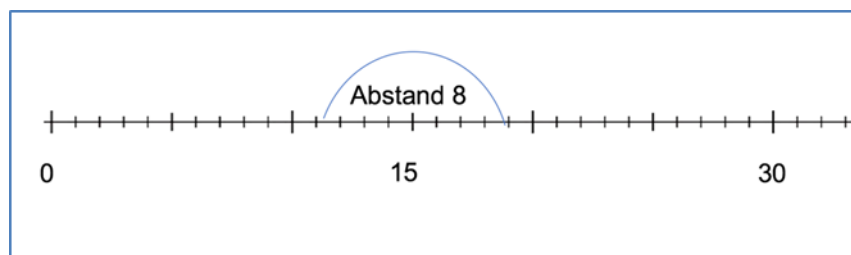
Zwei Zahlen haben die Summe 30.

Eine Zahl ist um 8 größer.

Wie heißen die Zahlen?

Zahlenrätsel eignen sich u. a., um mit den Schülerinnen und Schülern das systematische Probieren einzuüben, ggf. auch unter Zuhilfenahme von Materialien. So können die Kinder bei der obigen Aufgabe z. B. 30 Plättchen nehmen, um die Gesamtmenge zu repräsentieren, und diese in zwei Hälften teilen („Ich habe zwei Zahlen, die zusammen 30 ergeben“). Anschließend wird so lange ein Plättchen systematisch von der einen Hälfte zur anderen Hälfte verschoben, bis zwischen den zwei Mengen ein Unterschied von 8 erreicht ist („Jetzt ist eine Zahl um 8 größer als die andere.“).

Dem Nachstellen der Situation mit Material liegt dabei die Strategie zugrunde, nach dem Halbieren den Abstand zwischen den beiden Zahlen zu verteilen. Dies lässt sich auch unter zur Hilfenahme eines Zahlenstrahls umsetzen: „Markiere auf dem Zahlenstrahl die Zahl, die 30 ergibt, wenn man sie verdoppelt. Suche nun ausgehend von dieser Zahl zwei Zahlen, deren Summe 30 ist und deren Unterschied 8 beträgt“. Da der Unterschied zwischen den beiden Zahlen 8 betragen soll, müssen beiden Zahlen um den Wert 4 gegensinnig verändert werden ($15 - 4 = 11$ und $15 + 4 = 19$).



Copyright Grafik: IQB

Soll das Zahlenrätsel rein auf der symbolischen Ebene gelöst werden, eignet sich eine Tabelle, um Zwischenschritte festzuhalten und ausgehend von diesen (systematisch) zur richtigen Lösung zu gelangen, z. B.:

Erste Zahl	Zweite Zahl	Summe	Unterschied
15	15	30	0
16	14	30	2
17	13	30	4
18	12	30	6

19	11	30	8
----	----	----	---

Haben die Schülerinnen und Schüler erste Erfahrungen mit den heuristischen Strategien gemacht, können anspruchsvollere Zahlenrätsel, bei denen zusätzlich ein Sachkontext erfasst werden muss, im Unterricht thematisiert werden, z. B.:

Alter der Geschwister

Zwei Geschwister sind zusammen 14 Jahre alt.

Der große Bruder ist 6 Jahre älter als die kleine Schwester.

Wie alt sind die Kinder?

Sticker

Tom und Ben haben zusammen 24 Sticker.

Wenn Tom 3 seiner Sticker Ben schenkt, haben sie gleich viele.

Wie viele Sticker hatte Ben?

Beispiel „Anfangssituation gesucht“

Kastanien

Mia hat Kastanien gesammelt.

Die Hälfte ihrer Kastanien schenkt sie Bea.

Tom bekommt anschließend 6 Kastanien und die restlichen 5 Kastanien behält Mia selbst.

Wie viele Kastanien hatte Mia gesammelt?

Aufgaben, bei denen die Anfangssituation gesucht ist, eignen sich, um die Strategie „Rückwärtsarbeiten“ einzuführen. Die Schülerinnen und Schüler können hier spielerisch mit echten Kastanien, Plättchen oder Muggelsteinen die Handlungen nachstellen, diese in Rechnungen übersetzen und so entdecken, dass sie die Handlungen aus der Aufgabe nur in umgekehrter Reihenfolge nachvollziehen können und die Aufgabe daher auch nur durch ein „Rückwärtsrechnen“ gelöst werden kann. Auf diese Weise lernen die Kinder, dass es manchmal sinnvoll oder sogar erforderlich ist, mit dem Wert am Ende der Geschichte zu beginnen und die Rechenoperationen invers durchzuführen.

Weitere Ideen und Materialien zur Behandlung von Sachaufgaben (u. a. zum sinnerfassenden Lesen und den heuristischen Strategien) lassen sich bei PIKAS finden:

- https://pikasdigi.dzlm.de/sites/pikasdgi/files/uploads/Unterricht/Webunterricht/bearbeitungshilfen_sachaufgaben.pdf (Zuletzt abgerufen am 17.02.2026)
- <https://pikas.dzlm.de/unterricht/größen-und-messen/sachsituationen/sachrechenprobleme-lösen> (Zuletzt abgerufen am 17.02.2026)

6.4 Aufgaben zu Überschlagen und Plausibilitätsprüfung

Aufgabe 5 in Modul B Zahlen und Operationen

Das Ergebnis der Rechnung liegt zwischen 700 und 800.
Überschlage und kreuze an.

	stimmt	stimmt nicht
$385 + 396$	☐	☐
$292 + 578$	☐	☐
$599 + 123$	☐	☐

RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik		
		stimmt	stimmt nicht
	385 + 396	☒	☐
	292 + 578	☐	☒
	599 + 123	☒	☐

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren (1.2.g)

Aufgabe 11 in Modul A Zahlen und Operationen

Setze ein: < oder > oder =

$360 + 650$ ☐ 1000

$760 + 140$ ☐ 1000

$384 + 598$ ☐ 1000

$623 + 410$ ☐ 1000

RICHTIG	$[360 + 650] > [1000]$ $[760 + 140] < [1000]$ $[384 + 598] < [1000]$ $[623 + 410] > [1000]$
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III

Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren (1.2.g)

Aufgabe 9 in Modul A *Zahlen und Operationen*

Matti löst diese Aufgabe:

Sinas Mutter hat 76 € in der Geldbörse.
 Sie kauft Äpfel für 2 €, Birnen für 3 € und eine Zitrone für 29 ct.
 Wie viel Geld hat sie noch übrig?

Matti rechnet: $76 - 2 - 3 - 29 = 42$

Er antwortet: Sie hat noch 42 € übrig.

Seine Antwort ist falsch.

Woran kann man das erkennen, **ohne zu rechnen**?



RICHTIG	Es wurde eine Begründung gegeben, aus der hervorgeht, dass das Ergebnis nicht nur aus ganzen Euro bestehen kann, z. B.: - <i>Wegen 29 ct muss das Ergebnis eine Kommazahl sein.</i> ODER in der konkret auf den Fehler Bezug genommen wird, dass Matti mit 29 Euro statt mit 29 Cent gerechnet hat, z. B.: - <i>Er hat für die Zitronen mit € statt ct gerechnet.</i> ODER es wird mit einem Überschlag begründet, z. B.: - <i>Er muss weniger als 6 € abziehen. Das Ergebnis muss größer sein.</i>
FALSCH	Es wurde keine, eine falsche oder eine unvollständige Begründung gegeben, z. B.: - <i>Er hat falsch gerechnet.</i> - <i>Die Mutter hat nur Euro in der Geldbörse und keine Cent.</i> ODER Antworten, in denen ausschließlich gerechnet wurde.

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1); Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	das Ergebnis auf Plausibilität prüfen (1.3.b); Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte kennen (4.1.a)

Aufgabe 8 in Modul B Zahlen und Operationen

In einer Packung sind 4 kleine Kuchen.

Fatma möchte an ihrem Geburtstag für jedes Kind einen kleinen Kuchen mitbringen.

In der Klasse sind 22 Kinder.



Hat sie recht? Kreuze an.

☐ ja

☐ nein

Begründe.



RICHTIG	NEIN wurde angekreuzt UND es wurde eine Begründung gegeben, die aussagt, dass 5 Packungen nicht ausreichen, z. B.: - 5 Pakete sind zu wenig, weil $5 \cdot 4$ nur 20 ist. - $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$ das reicht nicht. - Es reicht nicht, sie muss 6 Packungen kaufen. - So würden zwei Kinder keinen Kuchen bekommen.
FALSCH	JA wurde angekreuzt UND/ODER es wurde keine, eine falsche oder eine unvollständige Begründung gegeben, z. B.: - $5 \cdot 4 = 20$ - Dann bleibt was übrig. - Sonst reicht das nicht.

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)

6.4.1 Aufgabenbezogener Kommentar

Bei den Aufgaben zum Überschlagen und zur Plausibilitätsprüfung steht das Nutzen vorhandener Zahlbeziehungen im Vordergrund. Eine exakte Rechnung oder ein Ergebnis sind nicht gefordert.

Das Überschlagen stellt eine hilfreiche, alltagsnahe Strategie zur ungefähren Bestimmung eines Ergebnisses dar. Dabei ist der Grad der Genauigkeit des Überschlags abhängig von dem jeweiligen Kontext bzw. der jeweiligen Aufgabenstellung. Im Alltag ist das Überschlagen i. d. R. in Kontexte (z. B. beim Umgang mit Größen) eingebettet.

Im Zentrum des Überschlagens steht das Vereinfachen des Zahlenmaterials (z. B. durch Runden) innerhalb der Rechnung. Grundlage dafür ist 1) eine grobe Größenvorstellung der gegebenen Zahlen basierend auf einem tragfähigen Stellenwertverständnis, 2) ein tragfähiges Operationsverständnis (siehe dazu auch Didaktischen Kommentar „Rechnen“) und 3) ggf. eine tragfähige Vorstellung von den gegebenen Größen, deren Einheiten und deren Beziehungen zueinander.

Dabei kann zwischen einem *direkten Überschlag* („Wie viel ist es ungefähr?“) und einem *indirekten Überschlag* („Kann das stimmen?“, „Kann es sein, dass ...“) unterschieden werden. Anders als das direkte Überschlagen zielt das indirekte Überschlagen nicht zwingend auf ein konkretes Ergebnis ab, sondern kann dazu genutzt werden, um 1) zu einem allgemeinen Lösungsansatz („Wie müsste ich vorgehen, damit...?“) zu gelangen oder um 2) eine Plausibilitätsprüfung vorzunehmen. Beiden Varianten ist gemein, dass das Ergebnis auf die Ausgangssituation rückbezogen werden muss, um zu überprüfen, ob der Überschlag hilfreich ist und zur Ausgangssituation passt.

Aufgabe 5 in Modul B und Aufgabe 11 in Modul A zielen darauf ab, Summen überschlagend zu ermitteln. Während diese bei Aufgabe 5 in Modul B anschließend in einem vorgegebenen Zahlenraum von 700 bis 800 verortet werden sollen, wird bei Aufgabe 11 in Modul A verlangt, die Summen in Relation zur Zahl 1000 zu setzen. Beide Aufgaben erfordern demnach einen indirekten Überschlag.

Gleiches gilt für Aufgabe 9 in Modul A und Aufgabe 8 in Modul B. Die Schülerinnen und Schüler können diese über einen indirekten Überschlag lösen. Entscheidend ist bei diesen Aufgaben, die Plausibilität eines vorgegebenen Ergebnisses beurteilen zu können.

Bei Aufgabe 9 in Modul A müssen die Kinder dafür sowohl einen genauen Blick auf das Zahlenmaterial als auch auf die gegebenen Einheiten werfen: Es muss erkannt werden, dass alle Beträge ohne Berücksichtigung der Einheiten € und ct miteinander verrechnet wurden. In der Begründung reicht es aus, auf diesen Fehler hinzuweisen.

Bei Aufgabe 8 in Modul B besteht die Herausforderung darin, den Kontext richtig zu erschließen und in eine passende Rechenoperation zu übersetzen („Reichen 5 Packungen mit jeweils 4 Kuchen für 22 Kinder?“). Gelingt den Schülerinnen und Schülern dies, kann die Aufgabe mithilfe einer Malrechnung und einem anschließenden Vergleich des Ergebnisses mit der vorgegebenen Anzahl an Kindern gelöst werden („Nein, 5 mal 4 gleich 20 Kuchen reichen nicht für 22 Kinder, es sind zu wenig Kuchen.“).

6.4.2 Mögliche Schwierigkeiten

Aufgabe 11 in Modul A

Obwohl bei Aufgabe 11 in Modul A ein indirektes Überschlagen verlangt wird, kann es vorkommen, dass Schülerinnen und Schüler versuchen, bei dieser Aufgabe genau zu rechnen. Dabei können aufgrund des herausfordernden Zahlenmaterials Rechenfehler entstehen. Weitere typische Fehler sind die folgenden:

$360 + 650$  1000 $760 + 140$  1000 $384 + 598$  1000 $623 + 410$  1000	Vermutlich wurden nur die Hunderter für den Überschlag genutzt. Die erste und die letzte Zeile wurden daher falsch gelöst.
$360 + 650$  1000 $760 + 140$  1000 $384 + 598$  1000 $623 + 410$  1000	Das Kind hat vermutlich nur die Zahlen direkt links neben den Kreisen berücksichtigt, d. h. jeweils nur den zweiten Summanden (richtig) mit der 1000 in Beziehung gesetzt.

Aufgabe 9 in Modul A

Hier kann insbesondere das Übersehen des Zusammenhangs zwischen den Geldbeträgen und ihrer jeweiligen Einheit zu Fehlern führen.

<u>Man muss einfach 2€ + 3€ + 29ct zusammenrechnen und dann hat man das Ergebnis.</u>	Das Kind notiert einen richtigen Ansatz zur Beantwortung der Frage: „Wie viel Geld muss Sinas Mutter bezahlen?“ Die konkrete Aufgabenstellung bleibt jedoch unberücksichtigt.
<u>Mutter hat noch die 42€ übrig aber 29€ ist 29ct sie hat 41,21€ übrig,</u>	Das Kind hat nicht erkannt, dass die Differenz zu gering ist. Es hat jedoch bemerkt, dass das Ergebnis kein glatter Euro-Betrag sein kann, da ein Cent-Betrag vorgegeben war. Daher zieht es die 29 ct nochmal ab.
<u>Das ist viel zu wenig</u>	Das Ergebnis der Plausibilitätsprüfung ist korrekt, aber es fehlt eine nachvollziehbare Begründung.

Aufgabe 8 in Modul B

Fehler bei der Bearbeitung von Aufgabe 8 in Modul B können auf Rechenfehler bzw. Unsicherheiten mit dem Kleinen 1x1 zurückzuführen sein. Ebenso ist es möglich, dass Fehler entstehen, weil die Kinder keinen Überschlag vornehmen, sondern das Ergebnis genau ausrechnen wollen.

5 weil in einer Packung 4 Kuchen sind und wenn sie 5 Packungen kauft sind es 25 Kuchen!	Das Kind hat sich verrechnet und/oder beherrscht noch nicht alle Aufgaben des Kleinen 1 x 1 sicher.
Begründe. Weil in der 4. Serie keine 22 gibt. Er streicht. Er geht nicht weiter, denn er kann nicht genau auf 22 kommen. Begründe. Weil man 22 nicht durch 4 rechnen kann.	Es wurde versucht, eine Rechnung zu finden, deren Ergebnis 22 ist. Die Sachsituation wurde nicht berücksichtigt.

6.4.3 Anregungen für den Unterricht

Um Ergebnisse hinsichtlich ihrer Plausibilität überprüfen zu können, müssen Kinder dazu in der Lage sein, diese kritisch zu hinterfragen. Ein derartiger kritischer Umgang mit Aufgabenbearbeitungen sollte im Unterricht dadurch angebahnt werden, dass sowohl fremde als auch eigene Lösungen und Antworten regelmäßig gemeinsam reflektiert werden (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*). Um grundsätzlich die Bedeutung des Hinterfragens von Lösungswegen und Ergebnissen zu verdeutlichen, eignen sich Fermi-Aufgaben.

Fermi-Aufgaben

Fermi-Aufgaben, nach dem italienischen Kernphysiker Enrico Fermi benannt, beinhalten Fragestellungen, die ohne die Sammlung weiterer Daten oder Annahmen nicht gelöst werden können. Fehlende Informationen müssen durch Schätzen oder Recherchieren ermittelt werden. Bei der Lösung müssen die Kinder mit großen Zahlen arbeiten, überschlagen und ihr Alltagswissen anwenden. Es existiert nicht „die eine richtige Lösung“, sodass die Vorgehensweisen erklärt und die gefundenen Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler überprüft, verglichen und bewertet werden müssen (→ *Argumentieren*, → *Kommunizieren*).

Beispiele

Wie viele Reiskörner passen in einen Schuhkarton?

Wie viele Blätter sind an einem Baum?

Das Rechnen selbst tritt in den Hintergrund, wichtiger sind die Schritte vor und nach dem Rechnen, das Schätzen und Recherchieren, das Übersetzen in die Sprache der Mathematik und das Interpretieren und Bewerten der Ergebnisse (→ *Modellieren*). Die Schülerinnen und Schüler werden diese Aufgaben auf verschiedenen Wegen lösen und zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen. Gemeinsam werden die Annahmen verglichen und bewertet und die Lösungen auf Plausibilität untersucht.

Als Vorübung dazu kann ein Teilbereich im Lösungsprozess in den Blick genommen werden, der die Identifizierung von nicht plausiblen Aussagen in einem Sachkontext untersucht. Gemeinsam

kann im Klassengespräch erörtert und begründet werden, welche Aussagen einen Sachverhalt unrealistisch darstellen.

Die Kinder der Klasse 4a haben Sachaufgaben gelöst.

Welche Lösungen sind nicht möglich?

Begründe deine Auswahl.

- Lina ist im Sportunterricht 15 m weit gesprungen.
- Konstantin putzt morgens und abends 3 Minuten lang seine Zähne.
- Herr Bauer schaut jeden Tag um 20.75 Uhr die Nachrichten.
- Lara ist 90 Minuten am Stück Seil gesprungen.
- Frau Müller verbraucht beim Baden 150 Liter Wasser.
- Nora ist 135 mm groß.

Wichtig ist, dass die Einschätzungen der Kinder diskutiert und begründet werden (→ *Kommunizieren*). Durch das Prüfen der Begründungsvorschläge werden Strategien der Plausibilitätsprüfung deutlich und es kann diskutiert werden, unter welchen Bedingungen eine Aussage vielleicht doch stimmen könnte (→ *Argumentieren*).

„Kann das stimmen?“- Aufgaben

Mithilfe der Impulse „Kann das stimmen? Kann das sein?“ im Rahmen einer sachbezogenen Aufgabenstellung, wird die kritische Auseinandersetzung mit mathematischen Angaben in Sachtexten bzw. Sachaufgaben herausgefordert, indem diese auf Plausibilität überprüft werden. Eine Beantwortung der Frage „Kann das stimmen?“ wird jedoch nicht mit einem „Ja“ oder „Nein“ beantwortet, sondern verlangt eine begründete Antwort (→ *Darstellen*, → *Argumentieren*, → *Begründen*). Im Unterricht werden die Begründungen der Kinder zu Beginn häufig unvollständig sein. Diese können als Diskussionsgrundlage dienen, auf der die Antworten gemeinsam im Unterrichtsgespräch weiterentwickelt werden (→ *Kommunizieren*). Ziel ist es, dass Kinder am Ende selbstständig eine vollständige Begründung formulieren können.

Beispiele für solche Aufgaben:

- „Kann es stimmen, dass sich in einem 1 km langen Stau 1000 Menschen in den Autos befinden?“
- „Kann das stimmen? Heute wird zum 1000. Mal die Sendung Blinky ausgestrahlt. Sie läuft seit knapp 10 Jahren einmal pro Woche.“

Bei diesem Format können die Kinder auch gemeinsam verschiedene Kurzmeldungen, Posts, Werbeanzeigen usw. betrachten und sich mathematische Fragestellungen überlegen. Auch in der Literatur findet man zahlreiche Sammlungen von „Kann das stimmen?“-Aufgaben – zum Beispiel bei PIKAS (<https://pikas.dzlm.de/node/725>, zuletzt abgerufen am 17.02.2026), Fragenbox vom vpm Verlag oder auch vom Verlag an der Ruhr.

Falsche Antworten im Kontext identifizieren

Antworten können auch falsch sein, weil sie nicht zur gestellten Frage passen. Daher sollten die Kinder bei der Plausibilitätsprüfung überlegen: „Passt die Antwort zur Frage?“ Als Übung werden z. B. die Frage und die gelöste Aufgabe zunächst vorgegeben und dazu eine Auswahl an Antworten

präsentiert. Die Kinder begründen, woran sie die richtige Antwort erkannt haben bzw. woran sie gemerkt haben, welche Antworten falsch sein müssen (→ *Argumentieren*).

Tom hat 9 Euro. Sein Bruder Nils hat vier Mal so viel Geld.

Wie viel Geld hat Nils?

$$9 \cdot 4 = 36$$

Welche Antwort passt?

- Nils hat vier Mal so viel Geld wie Tom.
- Nils hat 36.
- Nils hat 4 Euro mehr als Tom.
- Nils hat 36 Euro.

„Nils hat vier Mal so viel Geld wie Tom, das steht ja schon in der Aufgabe. Wenn ich wissen will, wie viel Geld Nils wirklich hat, reicht diese Antwort nicht aus.“

„Nils hat 36 ist keine vollständige Antwort. Hier fehlt die Einheit.“

„Nils hat vier Euro mehr als Tom ist falsch. Nils hat vier Mal so viel Geld wie Tom, also 36 Euro.“

Ergebnisse auf Plausibilität überprüfen

Auch unabhängig von Sachkontexten können Ergebnisse auf ihre Plausibilität geprüft werden. Hierzu können verschiedene Ergebnisse zu einer Aufgabe vorgegeben sein, die Kinder wählen dann die passende Antwort aus und begründen ihre Entscheidung (→ *Argumentieren*). Zu Beginn können die richtigen Ergebnisse sehr eindeutig sein, im weiteren Verlauf der Arbeit sollten die Kinder lernen, auch auf Details zu achten.

Lina rechnet Einmaleins Aufgaben mit 5.

Welches Ergebnis kann nicht stimmen?

32

75

50

15

Eine mögliche Begründung könnte lauten:

„32 passt nicht, weil die Ergebnisse der Einmaleins-Aufgaben mit 5 an der Einerstelle nur eine 0 oder eine 5 haben Welche Zahlen musst du addieren um über 100 (200, 300, 400, 500) zu kommen

Bauer Schmidt verpackt seine Eier in 6er Kartons. Er hat 123 Eier gesammelt.

Wie viele Kartons kann er ganz füllen?

6

20

29

123

Inhaltliche Fragen müssten vorher geklärt werden. Was bedeutet 6er Karton? Die Ergebnisse können nach Plausibilität abgearbeitet werden. Bei welchen Ergebnissen bist du sicher, dass sie nicht stimmen können?

Überschlagsrechnungen

Mithilfe des Überschlagens lassen sich Ergebnisse von Aufgaben auf Plausibilität prüfen. Um die Überschlagsrechnung zu üben, bieten sich folgende Möglichkeiten an:

Welcher Überschlag kann zu welcher Aufgabe passen?

Die Zuordnung von Überschlag und Aufgabe ist ein einfacheres Format, um den Umgang mit Überschlagsrechnungen zu üben. Solche Aufgaben lassen sich in der Schwierigkeit variieren, wenn die Zuordnungen z. B. nicht so eindeutig sind.

Verbinde die Aufgaben mit dem passenden Überschlag.	
$412 + 399$	$300 + 400$
$278 + 417$	$300 + 300$
$385 + 309$	$400 + 400$
$303 + 295$	$400 + 300$

Aufgabe sortieren

Welche Ergebnisse sind kleiner als 500?	
Welche Ergebnisse sind größer als 500?	
Welche Aufgaben haben genau das Ergebnis 500?	
$284 + 347$ $817 - 478$ $300 + 200$ $958 - 483$ $129 + 265$ $880 + 380$ $928 - 273$	
Ordne die Aufgaben zu.	
Wo musst du nicht genau rechnen?	
Begründe.	

Mögliche Lösungen mit Begründungen wären dann die folgenden:

Welche Ergebnisse sind größer als 500?

„ $284 + 347$ “, denn $200 + 300$ sind ja schon 500 und dann kommen noch die Zehner und Einer dazu.“

„ $928 - 273$ “, weil $928 - 300$ sind ja schon 628 und da habe ich ja sogar zu viel weggenommen.“

Zahlen unter der Lupe

Zu Beginn werden an der Tafel oder im Sitzkreis einige Zahlenkarten (zum Beispiel 74, 64, 92, 46, 26, 50, 47) dargeboten, die von den Kindern gemeinsam unter die Lupe genommen werden sollen ($\rightarrow$ Kommunizieren, $\rightarrow$ Argumentieren). Die Anzahl der Zahlenkarten kann dabei ebenso variieren, wie der Zahlenraum, dem sie entnommen sind.

Mögliche Fragestellungen dazu könnten sein:

- „Welche zwei Zahlen ergeben die größte Summe?“
- „Bei welchen zwei Zahlen erhält man die kleinste Differenz?“
- „Aus welchen zwei (drei, vier, ...) Zahlen kannst du eine ungerade / gerade Summe bilden?“

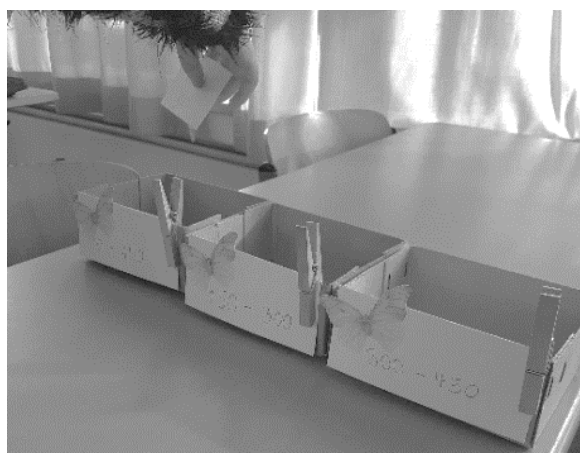
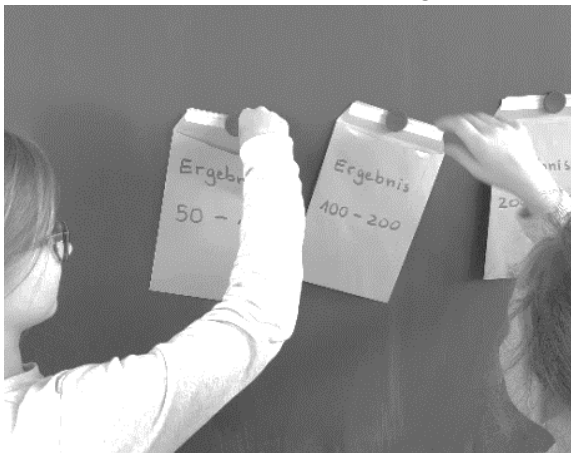
- „Welche Zahlen musst du addieren, um über 100 (200, 300, 400, 500) zu kommen?“
- „Welche zwei Zahlen musst du addieren, um möglichst nah an 100 zu kommen? Finde mehrere Paare, die ungefähr 100 ergeben.“

Bei all diesen Aufgaben sollte nicht die Lösung im Vordergrund stehen, sondern das Beschreiben und Begründen: „Beschreibe, wie du vorgehst.“, „Begründe deine Antwort.“ Mit diesen Aufgabenstellungen können Zusammenhänge erkannt werden (→ *Argumentieren*), die Fachbegriffe (→ *Kommunizieren*) werden wiederholt und das Überschlagen wird geübt.

Aufgaben erfinden

In einer weiteren Aktivität, bei der es nicht um genaue Ergebnisse geht, sollen die Kinder Aufgaben erfinden, deren Ergebnis in einem vorgegebenen Zahlenintervall liegt. Dafür können Briefumschläge aufgehängt oder Kästen aufgestellt werden, auf denen unterschiedliche Zahlenintervalle angegeben sind (zum Beispiel 1 bis 100, 100 bis 200, 200 bis 300 usw.). Nach dem Motto „Wir erfinden Aufgaben“ denken sich die Schülerinnen und Schüler Aufgaben aus, notieren diese auf Zettel und ordnen sie den entsprechenden Umschlägen bzw. Kästen zu. Eine Differenzierung ergibt sich durch die offene Aufgabenstellung, kann aber durch Vorgaben gesteuert werden.

- Erfinde nur Subtraktionsaufgaben / Multiplikationsaufgaben / Additionsaufgaben / Divisionsaufgaben.
- Erfinde Aufgaben mit drei oder mehr Summanden.
- Beide Zahlen sollen dreistellig sein.



Copyright Fotos: IQB

Danach können die Umschläge und Kästen geleert und die Aufgaben gemeinsam besprochen werden. Dabei sind verschiedene Impulse denkbar:

- Kannst du schnell sehen, ob die Aufgabe zum Umschlag passt? Begründe.
- Begründe, warum die Aufgabe in diesen Umschlag gehört.
- Wie würdest du die Aufgabe genau ausrechnen?

7. Worum geht es im Inhaltsbereich *Raum und Form* allgemein?

Die ersten geometrischen Kompetenzen entwickeln sich bei Kindern bereits ab der Geburt in der Interaktion mit ihrer Umgebung und durch eine vielfältige Wahrnehmung der Lebenswelt. Durch die Verarbeitung visueller Erfahrungen in Verbindung mit haptischen Reizen entstehen so z. B. Grundlagen für die Orientierung im Raum oder auch basale kognitive Fähigkeiten zur Klassifizierung von Objekten.

In der Schule sind diese Vorerfahrungen in vielen Bereichen Voraussetzung für gelingendes Lernen, so z. B. das sichere Erkennen von Raum-Lage-Beziehungen als Grundlage für das Lesen und Schreiben. Im Mathematikunterricht werden die vorhandenen geometrischen Fähigkeiten im Hinblick auf Objekte wie Flächen und Körper und darauf bezogene Prozesse – Bewegen (Abbildungen) – sowie das räumliche Vorstellungsvermögen allgemein anhand konkreter Handlungserfahrungen vertieft, systematisch geordnet, genutzt und spiralcurricular erweitert.

Übergreifend spielen dabei das Begriffsverständnis und das geometrische Zeichnen eine Rolle. Diese beiden Aspekte bedürfen, ebenso wie die in alle Bereiche hineinspielende Raumvorstellung, einer kontinuierlichen Förderung, die möglichst früh beginnen sollte.

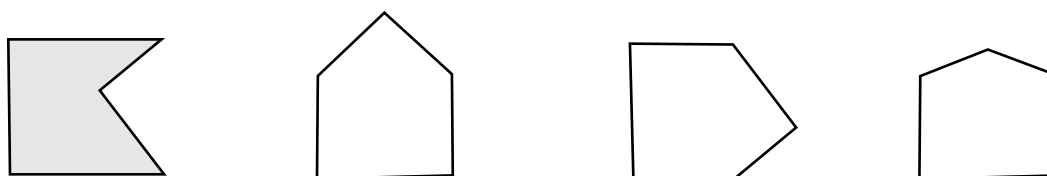
Raumvorstellung

Raumvorstellung umschreibt die Fähigkeit, „räumliche Objekte“ in Gedanken zu sehen und dabei mit den entstehenden Vorstellungsbildern aktiv umzugehen, etwa im Sinne einer mentalen Bewegung oder einer mentalen Vergrößerung bzw. Verkleinerung.

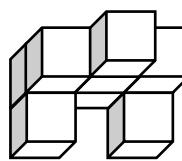
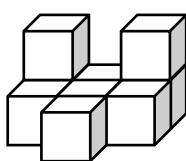
Mit „räumlichen Objekten“ assoziiert man dabei zumeist Objekte des dreidimensionalen Erfahrungsraumes, gemeint sind aber auch Objekte in einer Ebene oder in anderen „Räumen“, etwa auf einer Geraden oder auf einer Kugeloberfläche. In der Mathematik werden viele Objekte in „Räumen“ organisiert, etwa in „Zahlenräumen“, so dass der Begriff der Raumvorstellung dort eine umfassende Bedeutung erhält, der auch die Schulmathematik betrifft.

Diese Raumvorstellung ist bei den Schülerinnen und Schülern i. d. R. sehr unterschiedlich ausgeprägt; so gelingt z. B. das gedankliche Lösen kopfgeometrischer Aufgaben über mentales Operieren in ganz unterschiedlichem Maße. Da aber auch viele geometrische Sachverhalte über die räumliche Vorstellung erworben werden, ist die Förderung dieses Kompetenzbereichs von besonderer Bedeutung.

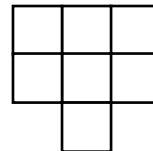
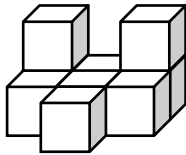
So kann z. B. die Gewinnung der Anzahl der Ecken eines Quaders oder einer vierseitigen Pyramide durch Abzählen an einem imaginären Objekt erfolgen. Auch Lagebeziehungen können in Gedanken verändert werden. Dies ist bei folgender Aufgabe erforderlich. Dort muss ein passendes Teil identifiziert werden:



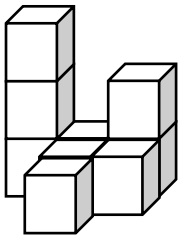
Die Fähigkeit, mental den Standort wechseln zu können, ermöglicht es, Bewegungen eines Körpers, hier eine Rotationsabbildung, als solche zu identifizieren:



Auch die Beziehung zwischen der dreidimensionalen Darstellung eines Objektes und der zweidimensionalen Ansicht von oben kann mithilfe des räumlichen Vorstellungsvermögens hergestellt werden:



Diese Fähigkeit wird unter anderem bei der Zuordnung des richtigen Bauplans zu einem Körper benötigt:



3	1	1
0	1	1
0	1	0

3	1	2
1	1	1
0	1	0

3	1	2
0	0	1
0	1	0

3	1	2
0	1	1
0	1	0

Begriffsverständnis

Um Mathematik zu verstehen und im Unterricht über mathematische Sachverhalte zu sprechen, bedarf es eines einheitlichen Begriffsverständnisses. „Begriff“ ist dabei nicht allein als formales Unterscheidungsmerkmal im Sinne einer Wort-Sachverhalt-Zuordnung zu sehen. Mathematische Begriffe müssen mit Grundvorstellungen verknüpft werden. Vollrath (1984) unterscheidet fünf Stufen **des Begriffsverständnisses**, von denen primär die ersten drei von Relevanz für die Grundschule sind:

Intuitives Begriffsverständnis

Das Kind nimmt den Begriff als Phänomen in seiner Umwelt wahr. Dies ist die Grundlage für darauf aufbauende Begriffsbildungsprozesse. Im Unterricht ist daher der handelnde Erwerb von Erkenntnissen durch praktische Tätigkeiten wichtig, also das Anknüpfen an reale Erfahrungen aus der Umwelt.

Inhaltliches Begriffsverständnis

Der Begriff wird mit Eigenschaften verbunden, die in unterschiedlichen Darstellungen oder Objekten zum selben Begriff vorhanden sind. So kann z. B. ein Würfel anhand des Wissens über seine Eigenschaften als solcher identifiziert werden, unabhängig von seiner Größe oder Lage. Besonders stark verankert ist solches Wissen, wenn es durch den Vergleich mehrerer ähnlicher Abbildungen eigenständig angewandt werden kann:

Was ist die Besonderheit von Fig. 1 gegenüber Fig. 2, 3 und 4?

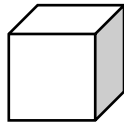


Fig. 1

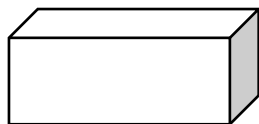


Fig. 2

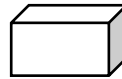


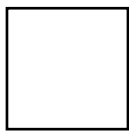
Fig. 3



Fig. 4

Integriertes Begriffsverständnis

Der Begriff ist Teil eines Begriffsnetzes innerhalb dessen Zusammenhänge erkannt werden können. Diese Fähigkeit findet in der Grundschule Anwendung, wenn Begriffshierarchien, wie bspw. die im Folgenden geschilderte, erkannt und begründet werden können:



Ein Quadrat ist zugleich ...



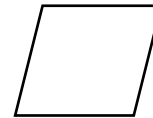
... ein Rechteck,

Ein Rechteck ist zugleich ...



... ein Parallelogramm,

... ein Parallelogramm.



... eine Raute.

Für die Primarstufe von geringerer Bedeutung im Zusammenhang mit „Raum und Form“ sind die Stufen 4 und 5:

Formales Begriffsverständnis

Dies erfordert die Kenntnis verschiedener Definitionen und die Befähigung zur Anwendung im Rahmen von Beweisen.

Strukturelles Begriffsverständnis

Dieses weit gehende Begriffsverständnis, in dem der Begriff als strukturierbares Objekt erkannt und behandelt wird, setzt u. a. die Kenntnis wichtiger Verknüpfungen von Funktionen voraus.

Geometrisches Zeichnen

Das geometrische Zeichnen ist wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts der Grundschule und entfaltet zugleich eine propädeutische Wirkung im Hinblick auf das Lernen und Arbeiten in den weiterführenden Schulen, u. a. als Grundlage für die Erstellung komplexerer Konstruktionen oder für die Darstellung in Koordinatensystemen. In der Primarstufe werden zunächst einfache geometrische Objekte zeichnerisch dargestellt.

In der praktischen Umsetzung fördert das geometrische Zeichnen die Feinmotorik der Kinder ebenso wie ihr ästhetisches Empfinden und kann so zu sorgfältiger und exakter Vorgehensweise motivieren. Durch das zeichnerische Nachvollziehen können geometrische Erkenntnisse erlangt, vertieft und gefestigt werden. Dies zeigt sich z. B. bei der Durchführung einer Achsenspiegelung an einer diagonal liegenden Achse. Sie erfordert die Kenntnis und konsequentere Anwendung der Eigenschaften einer Achsenspiegelung als der „Standardfall“ einer senkrecht liegenden Achse. Neben dem Verstehen der Aufgabenstellung und dem Wissen um die durchzuführende Zeichenhandlung ist zusätzlich die motorische Fähigkeit zur zeichnerischen Umsetzung Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung einer solchen Aufgabenstellung.

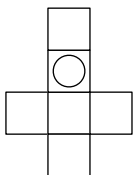
In der Grundschule findet das geometrische Zeichnen u. a. Anwendung in Form von Freihandzeichnungen, Zeichnen von Strecken, geometrischen Figuren und Mustern, Verbinden von Punkten, Vergrößerungen und Verkleinerungen und im Zeichnen und Vervollständigen symmetrischer Figuren. Werden räumliche Figuren gezeichnet, beschränkt sich dies meist auf die Konstruktion von Schrägbildern einfacher mathematischer Körper (z. B. Quader).

Den didaktischen Kommentaren zu den einzelnen Bereichen in Teil III der Didaktischen Handreichungen ist jeweils eine Tabelle vorgeschaltet, aus der ersichtlich wird, ob bei den Aufgaben zusätzlich zur eigentlichen Anforderung Raumvorstellung, Begriffsverständnis und/oder geometrisches Zeichnen notwendig sind. Aufgaben, die mit „(x)“ gekennzeichnet sind, beschreiben Aufgaben, in welchen die jeweilige Fähigkeit die Lösung unterstützen kann, aber nicht muss. Aufgaben, die mit „x“ gekennzeichnet sind, können ohne die jeweilige Fähigkeit kaum gelöst werden.

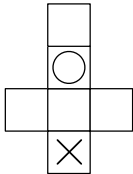
7.1 Aufgaben zu Räumliches Vorstellungsvermögen

Aufgabe 5 in Testheft B

Max faltet dieses Netz zu einem Würfel.



Welche Fläche liegt dann dem Kreis gegenüber?
Markiere die Fläche mit einem Kreuz.

RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik 
---------	---

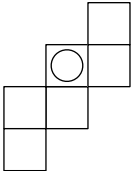
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III

Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z.B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)

Aufgabe 13 in Testheft C

Max faltet dieses Netz zu einem Würfel.



Welche Fläche liegt dann dem Kreis gegenüber?
Markiere die Fläche mit einem Kreuz.

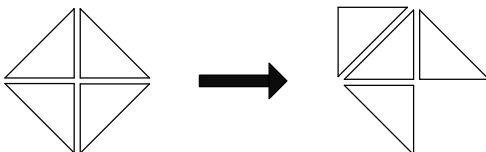
RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik
---------	------------------------------

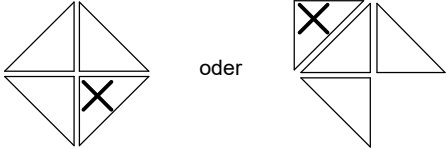
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z.B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)

Aufgabe 5 in Testheft C

Dana hat ein Dreieck verschoben. Kreuze das verschobene Dreieck an.



RICHTIG	Die Lösung gilt als richtig, wenn in einer der beiden oder in beiden Grafiken das richtige Dreieck angekreuzt bzw. markiert wurde. Vergleiche Lösungsgrafik 
---------	--

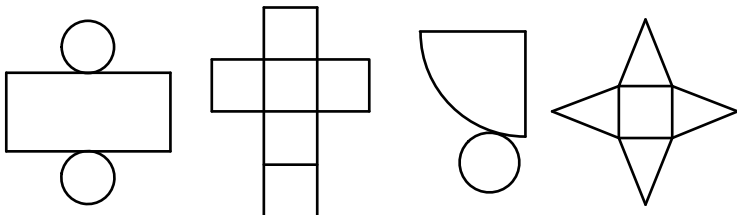
Teilaufgabenmerkmale

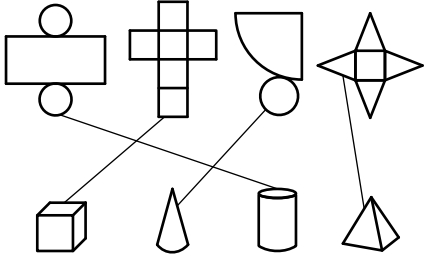
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a)

Aufgabe 3 in Testheft C

Aus diesen Netzen kann man Körper bauen.

Welche Körper entstehen beim Zusammenfallen? Verbinde.



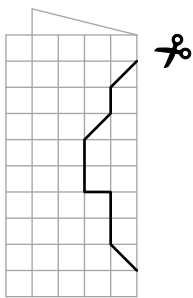
RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik 
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

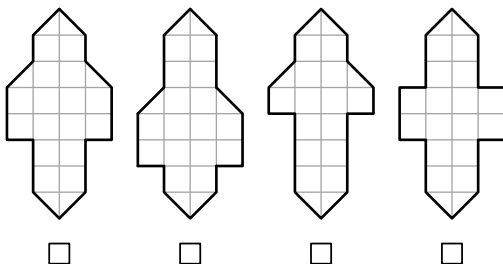
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z.B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)

Aufgabe 2 in Testheft C

Klaas hat ein Blatt Papier gefaltet. Er schneidet eine Form aus.



Wie sieht die Form aufgeklappt aus? Kreuze an.


☐
☐
☐
☐

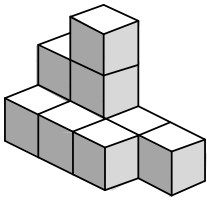
RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)

Aufgabe 4 in Testheft C

Mit wie vielen Würfeln hat Pablo die Figur gebaut?



Kreuze an.

- ☐ 8
☐ 9
☐ 10
☐ 18

RICHTIG	Nur das 3. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen (2.4.c)

7.1.1 Aufgabenbezogener Kommentar

	Raumvorstellungsaspekt	Begriffsverständnis	Zeichnen
<u>Aufgabe 5 in Testheft B</u>	x		
<u>Aufgabe 5 in Testheft C</u>	x		
<u>Aufgabe 3 in Testheft C</u>	x	(x)	
<u>Aufgabe 2 in Testheft C</u>	x	(x)	
<u>Aufgabe 4 in Testheft C</u>	x		

Über räumliches Vorstellungsvermögen zu verfügen, meint, sich ebene und räumliche Objekte mental vorstellen und gedanklich mit diesen Vorstellungsbildern operieren zu können.

So erfordert Aufgabe 5 in Testheft B von den Kindern die Fähigkeit, zwei ebene Figuren und die Anordnung ihrer Teilflächen zu vergleichen und sich die Verschiebung einer dieser Teilflächen vorzustellen. Auf diese Weise kann die Teilfläche bestimmt werden, die verschoben werden muss, damit aus der einen Figur die andere entsteht.

Während der Lösungsprozess bei Aufgabe 5 in Testheft C demnach ausschließlich in der Ebene vollzogen wird, müssen die Schülerinnen und Schüler bei den Aufgaben 5 in Testheft B, 3 in Testheft C, 2 in Testheft C und 4 in Testheft C gedanklich im Raum operieren. Sowohl bei Aufgabe 5 in Testheft B als auch bei Aufgabe 3 in Testheft C müssen sie sich die Faltung von zweidimensionalen Körpernetzen zu dreidimensionalen Körpern vorstellen.

Bei den Teilaufgaben von Aufgabe 5 in Testheft B muss jeweils ein Würfelnetz mental gefaltet werden und die gegenüberliegende Fläche einer vorgegebenen Fläche bestimmt werden. Neben dem gedanklichen Operieren sind dafür Kenntnisse über Lagebeziehungen, im Speziellen die Unterscheidung von angrenzenden (benachbarten) und gegenüberliegenden Flächen zentral. Aufgabe 13 in Testheft C weist einen höheren Schwierigkeitsgrad als Aufgabe 3 in Testheft C auf, da ein komplexeres Netz präsentiert wird, dessen mentale Faltung anspruchsvoller ist.

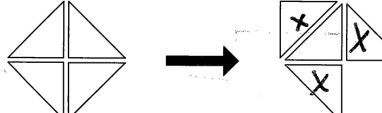
Bei Aufgabe 3 in Testheft C müssen die Schülerinnen und Schüler neben einem Würfel-netz auch ein Zylinder-, Kegel- und Pyramidenetz gedanklich falten und den perspektivischen Darstellungen der dreidimensionalen Körper zuordnen. Dafür müssen sie zuerst einen gedanklichen Wechsel vollziehen und die zweidimensionalen Darstellungen der Körper aufgrund ihrer (Primär-) Erfahrungen im Raum korrekt deuten. Die Zuordnung von Netzen zu Körpern kann dann zum einen mithilfe des räumlichen Vorstellungsvermögens erfolgen, zum anderen oder ergänzend kann Eigenschaftswissen über die Form und Anzahl der Körperflächen sowie das Wissen darum, dass zwei aufeinandertreffende Flächen eine Kante ergeben, hinzugezogen werden. Am einfachsten ist dabei vermutlich die Zuordnung vom Würfel zum Würfelnetz, da es sich bei der gewählten Kreuzform um ein sehr einprägsames Würfelnetz handelt, dessen Faltung auch mental leicht nachzuvollziehen ist. Zudem ist der Würfel den Kindern mit seinen sechs quadratischen Flächen aus dem Alltag vertraut.

Ebenso wie bei Aufgabe 5 in Testheft B, und Aufgabe 3 in Testheft C müssen sich die Schülerinnen und Schüler bei Aufgabe 2 in Testheft C erneut die Faltung einer ebenen Figur vorstellen. Gleichzeitig gilt jedoch, dass sich Aufgabe 2 in Testheft C von Aufgabe 5 in Testheft B und Aufgabe 3 in Testheft C dadurch unterscheidet, dass das Ergebnis dieses mentalen Prozesses nicht die Vorstellung eines Körpers, sondern einer ebenen Figur ist, da die Kinder gedanklich einen symmetrischen Faltschnitt herstellen müssen. Praktisch sammeln Kinder diese Handlungserfahrung zum Teil bereits vor Schuleintritt. Bei Aufgabe 2 in Testheft C wird die konkrete Handlung durch ein gedankliches Ausschneiden und Auffalten ersetzt und die Kinder müssen sich die entstehende Gesamtfigur vorstellen, um sie mit den Antwort-optionen abgleichen zu können. Im Zuge dessen können auch Kenntnisse über die Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren aktiviert werden.

Aufgabe 4 in Testheft C verlangt von den Schülerinnen und Schülern zu ermitteln, wie viele Würfel für das Bauwerk verwendet wurden. Dafür muss die Dreidimensionalität des Raumes, in der sich das Bauwerk befindet, visuell erfasst und berücksichtigt werden. Da nicht alle Seiten des Bauwerks in der Abbildung sichtbar sind, kann die Anzahl der Einheitswürfel nicht durch ein Abzählen der sichtbaren Würfel bestimmt werden. Vielmehr muss erkannt werden, dass die Würfel in der ersten Etage nicht „schweben“ können, sondern dass sich weitere Würfel darunter befinden müssen. Erst dann kann die Anzahl der Einheitswürfel ermittelt werden

7.1.2 Mögliche Schwierigkeiten

Aufgabe 5 in Testheft C

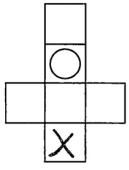
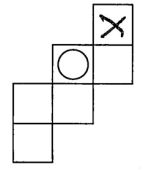
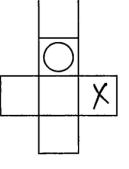
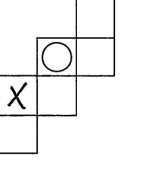
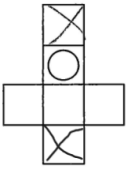
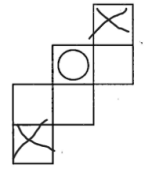
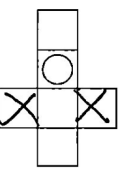
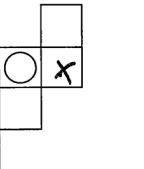
Dana hat ein Dreieck verschoben. Kreuze das verschobene Dreieck an. 	Gegebenenfalls führt die räumliche Nähe des angekreuzten Dreiecks zum verschobenen Dreieck zu dieser Fehllösung und die Kinder nehmen gedanklich keine Verschiebung, sondern eine Spiegelung des Dreiecks vor.
Dana hat ein Dreieck verschoben. Kreuze das verschobene Dreieck an. 	Es liegt kein Verständnis für das Verschieben vor. Vermutlich hat das Kind die linke und rechte Figur miteinander verglichen und die drei markierten Dreiecke ganzheitlich als neu wahrgenommen (z.B. „Es entsteht eine Rakete. Die Spitze und die Füße sind neu.“).

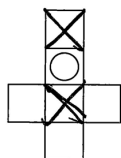
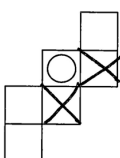
Aufgabe 2 in Testheft C

Falsche Lösungen bei dieser Aufgabe können darauf zurückgeführt werden, dass die Form und exakte Position des linken und rechten „Flügels“ nicht beachtet wurden. Gegebenenfalls werden auch die Eigenschaften der Achsensymmetrie noch nicht gesichert beherrscht.

Aufgabe 5 in Testheft B

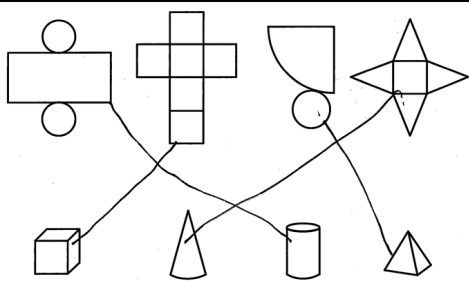
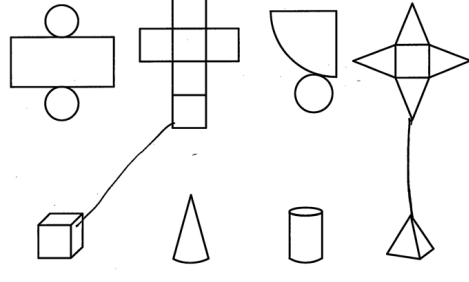
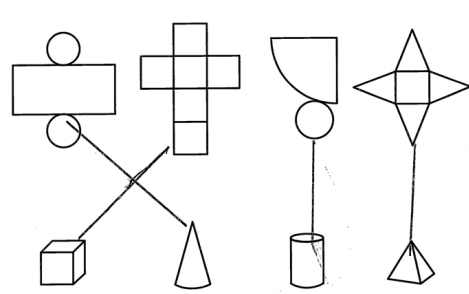
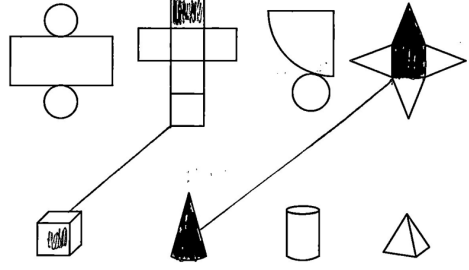
Da es sich um zwei echte Würfelnetze handelt, besteht die Schwierigkeit zum einem im Vorgang des gedanklichen Zusammenfaltens und zum anderen in der Beschreibung der Lagebeziehungen. Der gedankliche Faltvorgang des Würfelnetzes in Kreuzform und mit charakteristischer „Viererkette“ bei Teilaufgabe 3.1 lässt sich dabei vermutlich leichter nachvollziehen als der Faltvorgang beim deutlich komplexeren Würfelnetz bei Aufgabe 13 in Testheft C

a)  b) 	Die komplexe Form des rechten Würfelnetzes führt zu einem Fehler, wohingegen die Bearbeitung des einfacheren Netzes gelingt. Bei dem komplexeren Netz muss sich das Kind nacheinander mehrere Faltungen in verschiedene Richtungen vorstellen. Dies beansprucht das Arbeitsgedächtnis.
a)  b) 	Die „gegenüberliegende“ Fläche wird als die „auf dem Papier diagonal befindliche“ Fläche oder als „nach dem Falten nebeneinander“ verstanden.
a)  b) 	Die „gegenüberliegende“ Fläche wird als die „auf dem Papier am weitesten entfernte“ Fläche verstanden. Der vorgegebene Kreis wird vernachlässigt.
a)  b) 	Der Kreis wurde vernachlässigt und es wurden zwei andere gegenüberliegende Flächen gekennzeichnet. Möglicherweise ist dieses Aufgabenformat aus dem Unterricht geläufiger.

a)  b) 	Es wurden die zwei im Netz angrenzenden Flächen markiert. Vermutlich bestehen Unsicherheiten bei der Verwendung des Begriffs „gegenüber“ oder es kommt zu einer Verwechslung mit den Begriffen „nebeneinander“ oder „anliegend“.
--	---

Aufgabe 3 in Testheft C

Die Zuordnung des Würfelnetzes bereitet in der Regel keine Schwierigkeiten, da es den Kindern im Alltag und Unterricht häufiger begegnet als die übrigen Netze. Schwierigkeiten bei der Zuordnung der anderen Netze können wie folgt erklärt werden:

	Ursächlich für eine Verwechslung von Pyramide und Kegel kann die Darstellung der Körper ohne sichtbare Grundfläche sein.
	Eventuell fehlen konkrete Handlungserfahrungen zum Auf- oder Abrollen der Mantelflächen von Kegeln und Zylindern.
	Kegel und Zylinder werden leicht miteinander verwechselt, da sie beide kreisförmige Flächen besitzen. Bei der Abbildung des Zylinders ist nur ein „Kreis“ zu sehen, was dazu führen könnte, dass diese dem Kegelnetz zugeordnet wird. Des Weiteren könnten der Zylinder- und Kegelmantel zu Schwierigkeiten geführt haben, da die Kinder diese Fläche im Alltag und auch im Schrägbild als gebogen und nicht wie im Netz als rechteckig oder flach wahrnehmen.
	Die Körper werden nur in ihrer zweidimensionalen Darstellung betrachtet und die so sichtbaren Flächen (Kegel als „Dreieck“, Würfel als Quadrat) in den Netzen wiedererkannt. Vermutlich ist der Begriff „Netz“ oder das Aufgabenformat noch nicht bekannt und/oder es fehlen Handlungserfahrungen mit Netzen.

Aufgabe 4 in Testheft C

Die häufigste Fehllösung „8“ kann darauf zurückgeführt werden, dass die beiden verdeckten Würfel bei der Anzahlermittlung nicht berücksichtigt wurden. Die Fehllösung „18“ kann sich daraus ergeben, dass fälschlicherweise die sichtbaren Würfelflächen gezählt wurden, da unter dem Begriff „Würfel“ eventuell Quadrate verstanden werden.

7.1.3 Anregungen für den Unterricht

Die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens, welches sich im Verlauf der Grundschulzeit stark entwickelt, ist ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts. Um dieses auszubilden und Kompetenzen hinsichtlich Raumvorstellung aufzubauen, sollten vielfältige handlungsorientierte Lernanregungen im Unterricht angeboten und von den Schülerinnen und Schülern wahrgenommen werden. Denn: Durch konkrete Handlungserfahrungen mit ebenen Figuren und Körpern können mentale Vorstellungsbilder entstehen. Ein passives Speichern und Abrufen dieser Bilder ist jedoch nicht das, was Raumvorstellung ausmacht. Vielmehr erfordert Raumvorstellung einen aktiven Umgang mit den Vorstellungen, deren mentale Umstrukturierung und die vorstellungsmäßige Generierung neuer Bilder aus bereits vorhandenen. (vgl. <https://primakom.dzlm.de/inhalte/raum-und-form/raumvorstellung/hintergrund>, zuletzt abgerufen am 25.02.2026)

Mentales Operieren mit Objekten in der Ebene (Verschieben)

Zur Förderung der räumlichen Vorstellung in der Ebene bieten sich vielfältige Aktivitäten mit unterschiedlichen Anforderungsniveaus an:

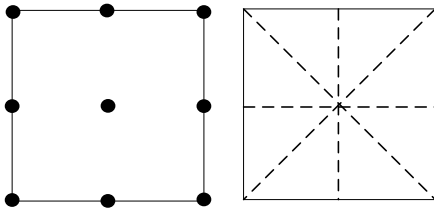
- Bei einfachen sichtbaren Verschiebungen von Gegenständen, Formen und Bildern in der Ebene (Translationen) erkennen die Kinder, dass sich beim Verschieben nur die Lage und nicht die Form oder Größe verändert.
- Werden mehrere Verschiebungen gleichzeitig durchgeführt, erhöht sich die Komplexität.
- Das höchste Anforderungsniveau besitzen Aufgaben, bei denen eine Ausgangssituation (z. B. ein Muster aus Quadraten und Dreiecken) gezeigt wird, die sich die Schülerinnen und Schüler einprägen müssen. Anschließend werden für die Kinder nicht sichtbare Verschiebungen (z. B. unter einem Tuch) vorgenommen. Die Schülerinnen und Schüler müssen dann beurteilen, welche Änderungen an der Ausgangssituation vorgenommen wurden.
- Abstrakter werden Verschiebungen, wenn z. B. auf einem Raster Plättchen nach Ansage gedanklich verschoben werden sollen: „Verschiebe das Plättchen (1 Kästchen nach oben – 2 Kästchen nach links – ...). Wo liegt das Plättchen dann?“
- Alternativ können auch nur die Ausgangs- und Endposition eines Plättchens markiert werden. Die Kinder sollen dann z. B. Fragen wie „Welchen Weg könnte das Plättchen genommen haben?“ oder „Finde den kürzesten Weg, der zu dieser Verschiebung führt.“ beantworten.

Wichtig bei all diesen Aufgaben ist, dass die Schülerinnen und Schüler vorab Gelegenheit hatten, ein entsprechendes Fachvokabular zu erwerben, mit dem sie ihr mentales Operieren sprachlich begleiten können. Als Lehrkraft bietet es sich daher an, Begriffe wie „oben“, „unten“, „rechts“, „links“, „neben“, „vorne“ und „hinten“ vorab zu besprechen und in verschiedenen Kontexten konsequent zu verwenden, bzw. deren Verwendung einzufordern. Thematisiert werden muss dabei auch, dass die Begriffe in Abhängigkeit zur Perspektive, die man einnimmt, zu verwenden sind: Ich sehe den Schrank links von mir, du siehst den Schrank rechts von dir. (→ *Kommunizieren*)

Weitere motivierende und handlungsorientierte Förder- und Fordermöglichkeiten zum Thema „Verschiebungen“ bieten spielerische Auseinandersetzungen. Im Folgenden werden daher auch Unterrichtsideen beschrieben, die sich auf Spiele aus dem Einzelhandel beziehen:

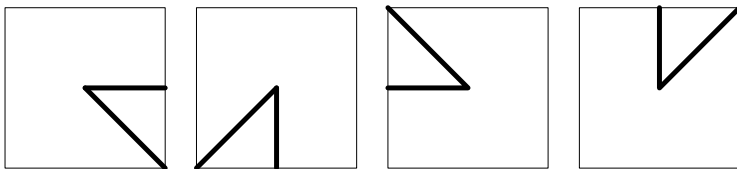
Wegespiel

Die Schülerinnen und Schüler erhalten kleine quadratische Zettel und entwickeln auf diesen eigenen Wegstücken. Jedes Wegstück besteht aus zwei Teilstücken, die jeweils vom Mittelpunkt zu einer Ecke oder einem Seitenmittelpunkt verlaufen. Die Seitenmittelpunkte und die Mitte können durch Falten oder Messen gefunden werden.



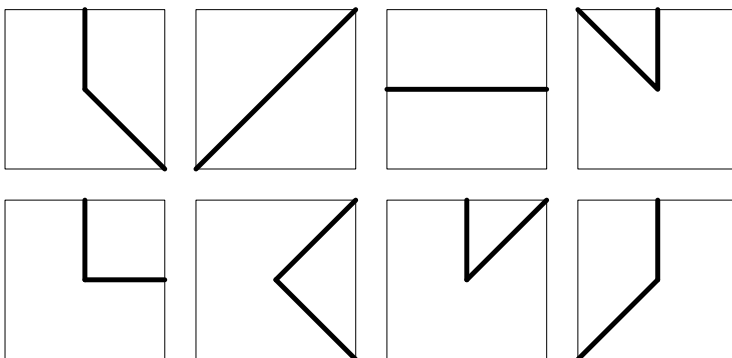
Copyright Grafiken: IQB

Ein erster Arbeitsauftrag kann sein, alle möglichen Wegstücke zu finden, wobei gedrehte Muster nicht als neues Wegstück gelten. Bei den folgenden Bildern handelt es sich also um gleiche Wegstücke:



Copyright Grafiken: IQB

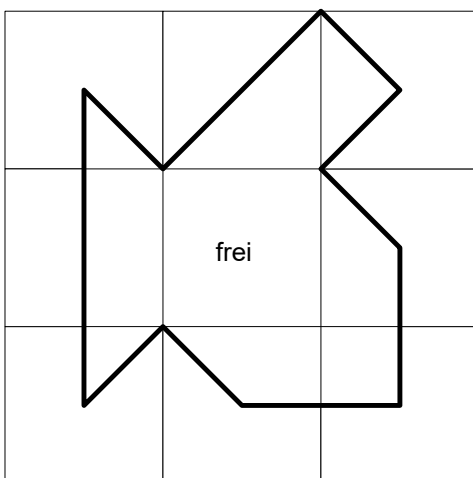
Wenn die Kinder alle Möglichkeiten gefunden haben, erhalten sie acht verschiedene Wegstücke.



Copyright Grafiken: IQB

Mit diesen Wegstücken sollen sie nun versuchen, eine zusammenhängende oder eine geschlossene Wegstrecke zu legen. Dafür müssen die Schülerinnen und Schüler die Wegstücke nicht nur (mental) verschieben, sondern auch (mental) rotieren.

Eine mögliche Lösung aus den 8 Wegstücken (hier bleibt in der Mitte eine Lücke):



Copyright Grafik: IQB

Das verrückte Labyrinth

Der Klassiker unter den Verschiebespielen ist das Spiel „Das verrückte Labyrinth“. Spielerisch gilt es, Wege im Labyrinth vorausschauend zu planen und sich vorzustellen, wie sich das Verschieben von Gängen auswirkt, um zu Schätzen oder Zielen zu gelangen. Dabei verändert sich das Labyrinth ständig - daher der Name „verrückt“ (im Sinne von „verschoben“).

Einsatzmöglichkeiten des Spiels:

- a) Orientierung im Raum
 - Die Kinder beschreiben Wege durch das Labyrinth mit Aussagen wie „Gehe zwei Felder nach rechts, dann eins nach vorne.“
 - Partnerübung: Ein Kind verschiebt, das andere beschreibt, was passiert.
 - ➔ Förderung der Raum-Lage-Beziehungen (Raumvorstellung)
- b) Geometrische Strukturen erkennen
 - Die Kinder analysieren das Muster des Labyrinths: Wo entstehen Geraden, Kreuzungen, Sackgassen? Welche Gänge bilden Winkel oder symmetrische Muster?
 - ➔ Verknüpfung mit Symmetrie oder Netzstrukturen
- c) Strategisches Denken und Planen
 - Die Kinder überlegen, wie eine Bewegung das Gesamtbild verändert, und vergleichen verschiedene Lösungswege: Was passiert, wenn ich hier statt dort schiebe?
 - ➔ Förderung des vorausschauenden Denkens und mentalen Operierens (Raumvorstellung)
- d) Wegbeschreibungen und Koordinatensysteme
 - Das Spielfeld kann mit Koordinaten (A–G/1–7) versehen werden und den Kindern die Aufgabe „Finde den kürzesten Weg von B2 nach F5“ gegeben werden.
 - ➔ Einführung in Gitter, Koordinaten und Lagebeschreibung
- e) Mathematische Muster und Kombinatorik
 - Die Kinder beantworten kombinatorische Fragen wie „Wie viele Wege führen zu einem Ziel?“ oder „Was passiert, wenn man verschiedene Kärtchen einfügt?“
 - ➔ Entdeckungen zu systematischen Veränderungen und Mustern

Rush-Hour

Eine Weiterführung dieses Gedankens stellt das Spiel „Rush-Hour“ dar. Ziel des Spiels ist es, ein Fahrzeug durch Verschieben anderer Fahrzeuge aus einem Stau hinauszuführen (Klassiker seit 1978). Digitale Varianten sind im Netz zu finden. Die zuvor beschriebenen Einsatzmöglichkeiten des Spiels „Das verrückte Labyrinth“ gelten weitestgehend auch für das Spiel „Rush Hour“.

Mentales Operieren mit Objekten im Raum (Drehen und Kippen, Falten)

a) Drehen und Kippen

Grundlage für die Fähigkeit zum gedanklichen Drehen bilden konkrete Handlungserfahrungen, die sprachlich begleitet werden. Entsprechend bieten sich Partnerarbeiten an (→ *Kommunizieren*).

Ein Kind dreht Gegenstände aus dem Alltag (z. B. ein Buch) und beschreibt die „Drehbewegung“. Das Partnerkind beschreibt die beobachteten Veränderungen.

- Kind 1: „Ich drehe das Buch im Uhrzeigersinn.“
- Kind 2: „Der Rücken des Buches wandert von der linken auf die rechte Seite.“

Bei Gegenständen mit Kanten (z. B. einem Würfel) kann die „Kippbewegung“ thematisiert werden.

- Kind 1: „Ich kippe den Würfel über die rechte untere Kante.“
- Kind 2: „Das Würfelbild mit der 1 wandert von oben nach rechts.“

Ähnlich kann beim Bewegen geometrischer Objekte vorgegangen werden. Auch hier werden zuerst konkrete geometrische Körper und Bauwerke bewegt und die Veränderungen beschrieben.

- Kind 1: „Ich kippe die Pyramide nach rechts.“

- Kind 2: „Die Spitze der Pyramide ist jetzt rechts.“

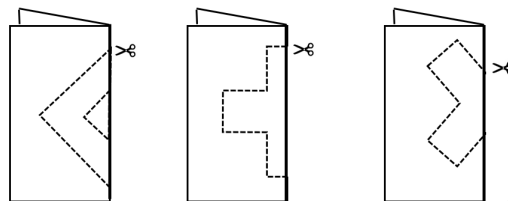
Der Schwierigkeitsgrad kann dabei ebenso wie bei den Übungen zum mentalen Operieren in der Ebene dadurch erhöht werden, dass die Drehungen und Kippbewegungen verdeckt durchgeführt werden und die Kinder sich die Ausgangssituation einprägen müssen.

a) Falten

Umgang mit Faltschnitten

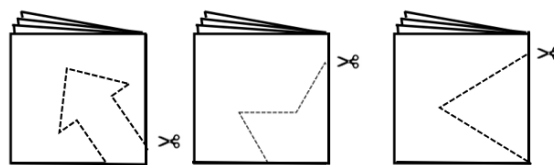
Das Herstellen von symmetrischen Figuren durch das Ausschneiden von Formen an der Faltkante eines Papiers ist vielen Kindern durch das Basteln vertraut. Der handelnde Zugang und das Untersuchen der entstehenden Gesamtfigur(en) im Hinblick auf Eigenschaften der Achsensymmetrie bilden die Basis für das mentale Operieren mit Teil- und Gesamtfigur(en).

In diesem Sinne bieten sich Übungen mit quadratischen Notizzetteln an. Durch einmaliges Falten des Quadrates entsteht an der Faltlinie eine Spiegelachse. Die Lehrkraft zeichnet ein Schnittmuster ein und die Schülerinnen und Schüler stellen durch gedankliches Operieren Vermutungen über die entstehende Gesamtfigur an. Anschließend kann die Gesamtfigur zur Kontrolle ausgeschnitten werden und das Ergebnis der mentalen Operation handelnd überprüft werden. Diese Übung kann nach Einführung durch die Lehrkraft auch in Partnerarbeit von den Kindern durchgeführt werden.



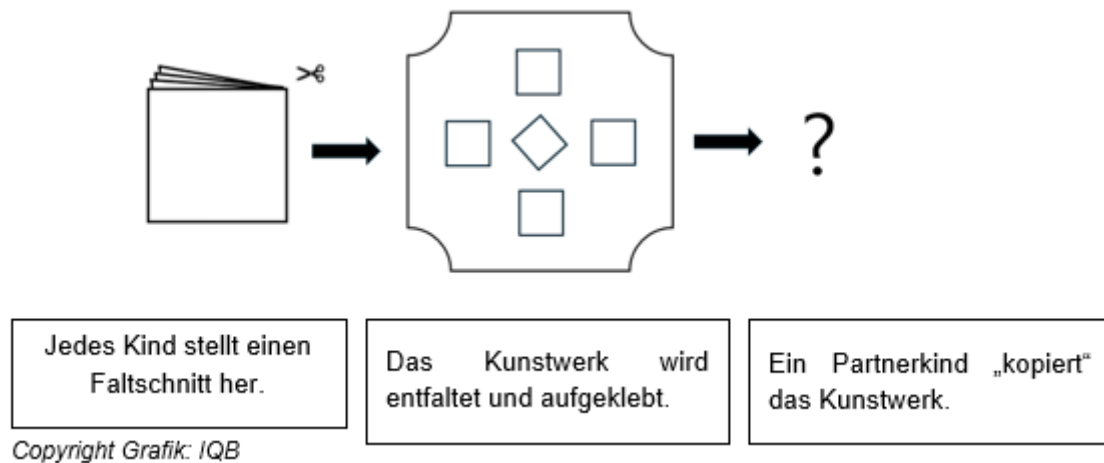
Copyright Grafik: IQB

Der Komplexitätsgrad steigt, wenn das quadratische Papier zweimal gefaltet wird. Dadurch müssen mentale Spiegelungen bzw. Faltungen an zwei Achsen vorgenommen werden, um die entstehende Schnittfigur vorhersagen zu können.



Copyright Grafik: IQB

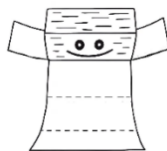
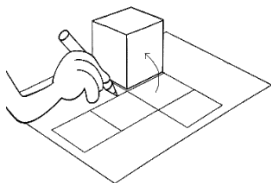
Eine weitere kognitiv aktivierende Aufgabenstellung ist die Lernumgebung „In der Kopierwerkstatt“. Jedes Kind stellt zunächst durch zweimaliges Falten eines farbigen, quadratischen Notizzettels ein eigenes „Kunstwerk“ (Faltschnitt) her. Dieser Faltschnitt wird dann auf ein weißes Papierblatt geklebt, sodass ein Zusammenfallen nicht mehr möglich ist. Nun tauschen die Schülerinnen und Schüler ihre Faltschnitte mit einem Partnerkind und versuchen das „Kunstwerk“ des jeweils anderen „zu kopieren“. Die Kopien werden dann daraufhin geprüft ob sie genau, ungenau oder sogar falsch sind. Fehlerhafte Kopien können ebenfalls aufgeklebt werden, um den Lernfortschritt beim Kopieren zu dokumentieren. Zuletzt werden die verschiedenen Lösungsstrategien gesammelt und reflektiert (→ Problemlösen, → Kommunizieren, → Argumentieren). Der Schwierigkeitsgrad hängt dabei von der Anzahl der Faltungen und der Art der Schnitte ab.



Arbeit mit Körpernetzen

Einen elementaren Zugang zum Erkunden von Flächenformen geometrischer Körper und somit auch zur Entwicklung und zum Verständnis ihrer Netze ermöglichen folgende Tätigkeiten:

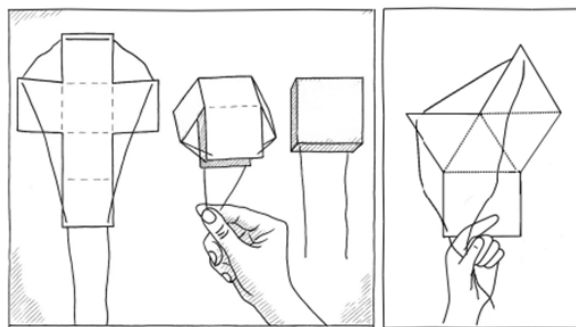
- Aufschneiden eines Körpers und Auseinanderklappen (Abwickeln),
- Stempeln mit Körpern,
- Abrollen eines Körpers und Umfahren,
- Verpacken von Körpern.



Copyright Grafiken: IQB

Das Netz eines Zylinders kann beispielsweise gut durch eine Verknüpfung des Umfahrens und Abwickelns gefunden werden. Ausgehend von einer Toilettenpapierrolle lassen sich Grund- und Deckfläche umfahren, anschließend wird die Mantelfläche aufgeschnitten und abgewickelt. Thematisiert werden muss, dass bei der Toilettenpapierrolle im Vergleich zum Zylinder die Grund- und die Deckfläche fehlen.

Bastelnetze und sogenannte Schnurzugmodelle ermöglichen umgekehrt den Übergang von der zwei- zur dreidimensionalen Darstellung. Durch das Zusammenklappen oder Ziehen der Schnüre wird deutlich, wie ein Körpernetz zu einem Körper wird, wie viele und welche Flächen sich in einer Ecke treffen und welches gemeinsame Kanten sind. Denkbar wäre auch das Erstellen eigener Stop-Motion-Filme, um den Faltvorgang zu visualisieren.



Lernumgebung „Würfelnetze“ (Copyright Grafiken: IQB)

Hatten die Schülerinnen und Schüler ausreichend Möglichkeiten, derartige konkrete Handlungserfahrungen zu machen und somit einen Zusammenhang zwischen der Ebene (z. B. Würfelnetz) und dem Raum (z. B. Würfel) herzustellen, können Übungen zum gedanklichen Auf- und Zuklappen von Netzen in den Unterricht integriert werden. Verschiedene Aufgabenstellungen, bei denen im Sinne der natürlichen Differenzierung stets eine Bearbeitung auf eigenem Niveau möglich ist, bietet hierbei die Lernumgebung „Würfelnetze“ an:

- Würfelnetze entdecken,
- falsche „Würfelnetze“ identifizieren,
- alle 11 Würfelnetze finden,
- Würfelnetze sortieren und klassifizieren,
- gegenüberliegende Flächen in Würfelnetzen kennzeichnen,
- gemeinsame Kanten und Ecken in Würfelnetzen identifizieren.

Größtenteils lassen sich die Aufgaben auch auf andere Körper wie Quader oder Pyramiden übertragen. Neben inhaltsbezogenen Kompetenzen werden auch prozessbezogene Kompetenzen gefördert, da die Schülerinnen und Schüler zum → *Problemlösen* (systematisches Probieren, Entwickeln von Strategien, um alle möglichen Netze zu finden), → *Darstellen* (Wechsel zwischen der zwei- und dreidimensionalen Ebene), → *Kommunizieren* und → *Argumentieren* (Netze prüfen, klassifizieren usw.) angeregt werden.

Als hilfreiches und unterstützendes Material (auch für das Herstellen von Quader- und Pyramidennetzen), eignet sich unter anderem das Material „Geo-Clix“ (Westermann-Verlag), „Polydron“ oder „Magnetic Polydron“ (Betzold-Verlag). Mithilfe unterschiedlicher Farben können basierend auf der Handlung Schülerlösungen überprüft werden, bei denen gegenüberliegende Flächen markiert werden sollen. Sollte dieses oder ein vergleichbares Material nicht vorhanden sein, kann alternativ mit Papier- oder Pappnetzen gearbeitet werden, die entweder nur gefaltet oder um einen Würfel gewickelt werden.

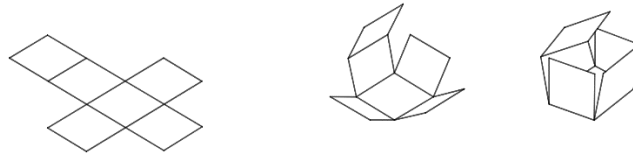
Eine digitale Möglichkeit, um dynamische Faltvorgänge zu veranschaulichen, stellt die kostenfreie App „Klipp Klapp“ dar (<https://dlgs.uni-potsdam.de/apps/klipp-klapp>, zuletzt abgerufen am 25.02.2026).

Folgende Lernumgebungen stehen in der App zur Auswahl:

- Würfel oder nicht?
- Bau ein Würfelnetz.

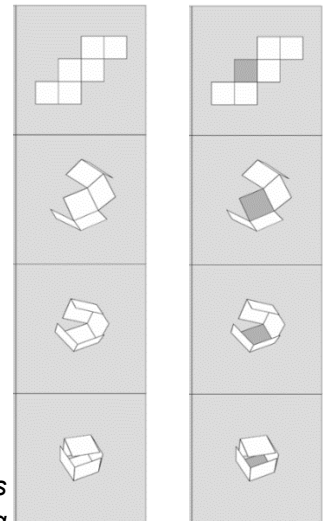
Jetzt wird es bunt!

Ziel der App ist es dabei nicht, die Primärerfahrungen mit Würfelnetzen zu ersetzen, sondern den Umgang mit Würfelnetzen zu üben, zu vertiefen und den Übergang zum rein mentalen Falten zu erleichtern. Hat ein Kind Schwierigkeiten, sich einen Faltprozess vorzustellen, hilft ein Schieberegler, mit dem das Aufklappen und Falten bei Bedarf mehr oder weniger stark animiert werden kann. In vielen Schulbüchern wird dieser Prozess mittlerweile mithilfe von Bildfolgen dargestellt.



Copyright Grafiken: IQB

In ähnlicher Weise eignet sich auch die Lernumgebung „Inter-Netzzo“, um die mentalen Faltvorgänge sichtbar zu machen. Zu jedem Würfelnetz werden hier vier Karten mit Abbildungen bereitgestellt, die den Faltvorgang schrittweise dokumentieren. Differenzierte Aufgabentypen und Varianten, diverse Aufgabenstellungen und Spielideen ermöglichen den Schülerinnen und Schülern ein Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus und ein Durchdringen der Körpernetze. So erleichtert die Färbung der Grundfläche in der rechten Abbildung beispielsweise die Orientierung.

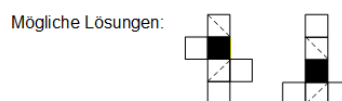
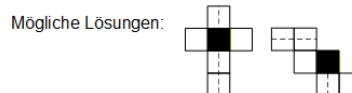
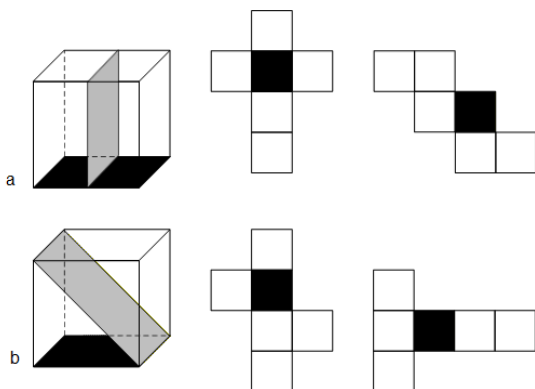


Copyright Grafiken: Deutsches
Zentrum für Lehrkräftebildung
Mathematik (o. D.b)

Eine Möglichkeit zur Weiterarbeit
Würfelschnitten:

- Welche Teilkörper entstehen?
- Welche Form hat die Schnittfläche?
- Wo verläuft die Schnittlinie im Netz?

Diese und ähnliche Aufgaben lassen sich auch auf die Arbeit mit anderen Körpernetzen übertragen.



- Umgang mit Würfelgebäuden

- Das Ermitteln der Anzahl an Würfeln in einem Würfelgebäude kann dadurch erleichtert werden, dass die Würfelgebäude in einzelne Schichten, Würfelstangen oder Quader zerlegt werden. Dies kann etagen- oder schichtweise geschehen (z. B. vorne, mittig, hinten). Differenzierungsmöglichkeiten ergeben sich unter anderem über die Anzahl der verwendeten Würfel sowie über eine Steigerung/ Verringerung der Komplexität des Würfelgebäudes.

Weitere mögliche Aktivitäten zu Würfelgebäuden sind die folgenden:

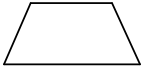
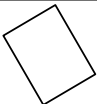
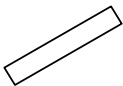
- Nach Modell, Bauplan oder Anleitung bauen, nachbauen oder umbauen und dabei Bezug auf die Anzahl der Einheitswürfel nehmen.
- Würfelgebäude verändern oder ergänzen und die Veränderung mit Bezug zur Anzahl der Einheitswürfel beschreiben.

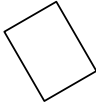
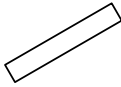
Einen digitalen Zugang zur Konstruktion und Betrachtung von Würfelgebäuden bietet die App „Klötzchen“ (<https://www.uni-potsdam.de/de/mathematikdidaktik/forschung-projekte/kloetzchen-app>, zuletzt abgerufen am 02.03.2026). Für eine Schulung von Raumvorstellung ist im Umgang mit der App erforderlich, zunächst mental zu handeln und dann die Visualisierungsangebote zu nutzen.

7.2 Aufgaben zu Körper und Flächen

Aufgabe 13 in Testheft B

Das ist ein Rechteck. Kreuze an.

	stimmt	stimmt nicht
	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐

RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik		
		stimmt	stimmt nicht
		☐	☒
		☒	☐
		☒	☐
		☒	☐

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2); mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)

Aufgabe 11 in Testheft B



Die Dose hat die Form eines geometrischen Körpers.

Wie heißt dieser Körper? _____

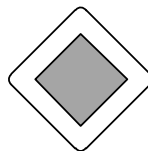
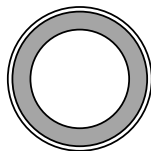
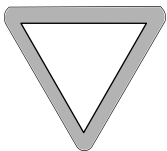
RICHTIG	Zylinder
---------	----------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen (2.2.b)

Aufgabe 1 in Testheft B

Welche Begriffe passen zu den Schildern? Verbinde. Ein Schild bleibt übrig.



Dreieck

Quadrat

Kreis

RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik
---------	---------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen (2.2.b)

Aufgabe 7 in Testheft B

Verbinde.

Der Körper hat 1 Fläche.	
Der Körper hat 8 Ecken.	
Der Körper hat 6 Kanten.	
Der Körper hat 3 Flächen.	

RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik	
	Der Körper hat 1 Fläche.	
	Der Körper hat 8 Ecken.	
	Der Körper hat 6 Kanten.	
	Der Körper hat 3 Flächen.	

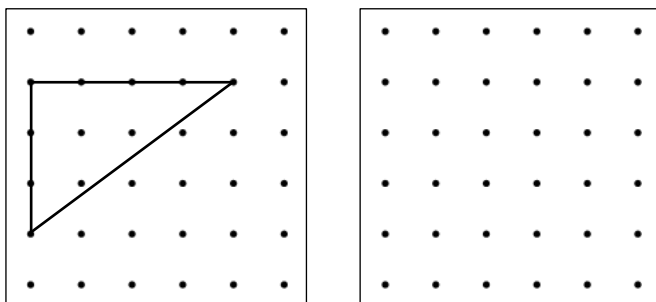
Teilaufgabenmerkmale

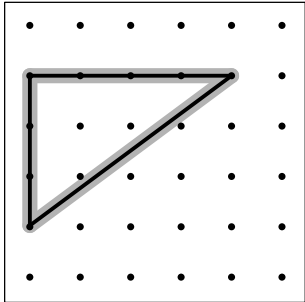
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)

Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)
---	---

Aufgabe 4 in Testheft B

Zeichne das gleiche Dreieck noch einmal daneben.



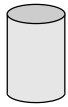
RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich ist markiert.)
	 Die Lage des gezeichneten Dreiecks auf dem Geodreieck ist unerheblich. Auch ein gespiegeltes oder gedrehtes Dreieck ist richtig.

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Grundlegende Fertigkeiten (0)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen (2.2.d)

Aufgabe 14 in Testheft C

Welche Beschreibung passt? Kreuze an.



- ☐ Der Körper hat 2 Flächen und 3 Kanten.
- ☐ Der Körper hat 2 Flächen und keine Ecken.
- ☐ Der Körper hat 3 Flächen und 3 Kanten.
- ☐ Der Körper hat 3 Flächen und keine Ecken.

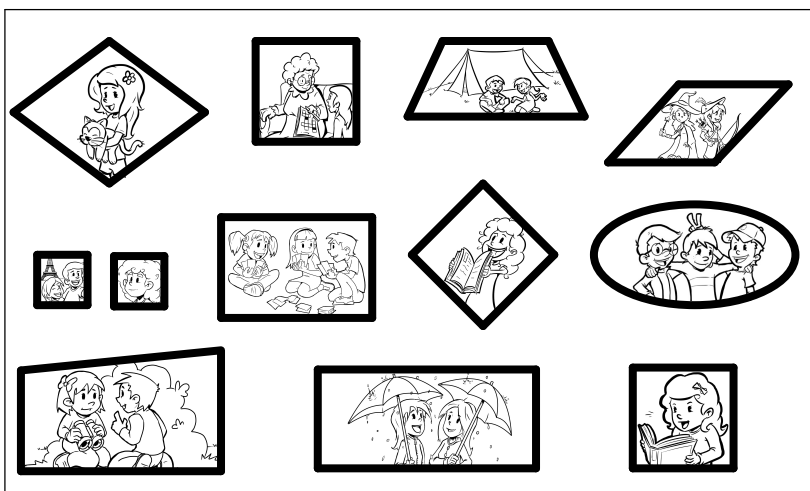
RICHTIG	Nur das 4. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)

Aufgabe 10 in Testheft C

Streiche alle Rahmen durch, die die Form eines Quadrates haben.



RICHTIG

vergleiche Lösungsgrafik

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a); Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen (2.2.b)

Aufgabe 12 in Testheft C

Ergänze die Tabelle.

Steckbrief eines Quaders:

	Anzahl
Ecken	_____
Flächen	_____
Kanten	_____

RICHTIG	[Ecken]: 8 [Flächen]: 6 [Kanten]: 12
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
---------------------	-------------------------------

Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)

7.2.1 Aufgabenbezogener Kommentar

	Raumvorstellung	Begriffsverständnis	Zeichnen
<u>Aufgabe 13 in Testheft B</u>	(x)	x	
<u>Aufgabe 11 in Testheft B</u>		x	
<u>Aufgabe 1 in Testheft B</u>		x	
<u>Aufgabe 7 in Testheft B</u>	(x)	x	
<u>Aufgabe 4 in Testheft B</u>		(x)	x
<u>Aufgabe 14 in Testheft C</u>	(x)	x	
<u>Aufgabe 10 in Testheft C</u>	(x)	x	
<u>Aufgabe 12 in Testheft C</u>	(x)	x	

Ein Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule ist es, dass Kinder ein tragfähiges Begriffsverständnis zu Körpern und ebenen Figuren aufbauen, indem sie „Geometrische Figuren (und Körper) erkennen, benennen und darstellen“ (s. Leitidee „Raum und Form“). In diesem Zusammenhang sollen sie ausgewählte Körper und ebene Figuren klassifizieren, zueinander in Beziehung setzen, auf spezifische Eigenschaften hin untersuchen und in ihrer Umwelt identifizieren können. Im Zuge dessen ist u. a. der Gebrauch einer korrekten Fachsprache und die sachgemäße Verwendung von (digitalen) Zeichenwerkzeugen unerlässlich.

Körper

Bei Aufgabe 11 in Testheft B müssen die Schülerinnen und Schüler einen Alltagsgegenstand (hier eine Suppendose) als Repräsentanten eines Zylinders erkennen und benennen.

Die Aufgaben 7 in Testheft B, 14 in Testheft C und 12 in Testheft C erfordern von den Kindern hingegen v. a. Eigenschaftswissen, da für verschiedene Körper (hier „Würfel“, „Quader“, „Zylinder“, „Dreieckspyramide“, „Kugel“) angegeben werden muss, wie viele Flächen, Kanten und Ecken diese jeweils besitzen.

Bei Aufgabe 7 in Testheft B und Aufgabe 14 in Testheft C ist dies einerseits unter Rückgriff auf ein gesichertes Faktenwissen möglich („Ich weiß, dass ein Würfel 8 Ecken hat“), andererseits können die Schülerinnen und Schüler ggf. ihr räumliches Vorstellungsvermögen nutzen und die Flächen-,

Kanten- oder Eckenanzahl gedanklich mithilfe der Abbildungen bestimmen. Letzteres setzt jedoch voraus, dass die abgebildeten Körper den Kindern prinzipiell in ihrer dreidimensionalen Darstellung bekannt sind. Aus fachsprachlicher Sicht müssen die Kinder die Begriffe „Fläche“, „Kante“ und „Ecke“ sicher verwenden können.

Gleiches gilt für Aufgabe 12 in Testheft C. Da den Kindern hier anders als zuvor jedoch keine Abbildung des Körpers zur Verfügung steht, muss der Begriff „Quader“ gesichert sein. Verfügen die Schülerinnen und Schüler über kein gesichertes Faktenwissen, sondern möchten die Aufgabe mithilfe ihres räumlichen Vorstellungsvermögens lösen, müssen sie sich zudem einen Quader vorstellen können.

Flächen

Die Aufgaben 13 in Testheft B und Aufgabe 10 in Testheft C zielen darauf ab, prototypische und untypische Beispiele für Rechtecke und Quadrate zu erkennen. Dafür müssen die Schülerinnen und Schüler vielfältige Vorerfahrungen mit ebenen Figuren gemacht haben und/oder über Eigenschaftswissen zu den Begriffen „Rechteck“ und „Quadrat“ verfügen. Des Weiteren kann das räumliche Vorstellungsvermögen zum Tragen kommen. Dies gilt bspw. in Bezug auf die ebenen Figuren in untypischen Lagen, da manche Kinder diese ggf. gedanklich drehen müssen, um sie als Begriffsrepräsentanten identifizieren zu können.

Ein weiteres Beispiel für einen Repräsentanten des Begriffs „Quadrat“ in untypischer Lage ist das Vorfahrtsschild bei Aufgabe 1 in Testheft B. Ähnlich wie bei Aufgabe 11 in Testheft B geht es hier darum, Gegenstände aus der Umwelt (hier Verkehrsschilder) als idealisierte Beispiele der Begriffe „Kreis“, „Dreieck“ und „Quadrat“ zu erkennen.

Bei Aufgabe 4 in Testheft B benötigen die Kinder ein gesichertes Verständnis von Form- und Größeninvarianz, ggf. räumliches Vorstellungsvermögen (z. B., wenn die Figur gespiegelt oder gedreht gezeichnet wird) und insb. zeichnerisch-motorische Fähigkeiten, um die vorgegebenen Strecken und Winkel erfassen und exakt nachzeichnen zu können.

7.2.2 Mögliche Schwierigkeiten

Körper

Aufgabe 11 in Testheft B

 Die Dose hat die Form eines geometrischen Körpers. Wie heißt dieser Körper? <u>Suppe</u> Wie heißt dieser Körper? <u>Dose</u>	Das Kind weiß noch nicht, was ein geometrischer Körper ist, und/oder hat noch kein gesichertes Verständnis des Fachbegriffs „Zylinder“. Es verwendet daher einen Alltagsbegriff.
Wie heißt dieser Körper? <u>Kreis</u>	Anstelle von Begriffen für geometrische Körper werden Begriffe zur Bezeichnung ebener Figuren verwendet – ein typischer Fehler. Entweder sind die Begriffe noch nicht gesichert und/oder der Übergang von der

Wie heißt dieser Körper? <u>Quadrat</u>	zweidimensionalen Flächenwahrnehmung zur dreidimensionalen Körperwahrnehmung wurde noch nicht vollzogen.
Wie heißt dieser Körper? <u>Rund</u> Wie heißt dieser Körper? <u>viereckig</u>	Das Kind nennt eine geometrische Eigenschaft. Auch hier scheint der Begriff des geometrischen Körpers noch nicht gesichert und/oder die Wahrnehmung zweidimensional zu sein. Letzteres könnte bedeuten, dass das räumliche Vorstellungsvermögen noch nicht hinreichend entwickelt ist.
Wie heißt dieser Körper? <u>Kegel</u> Wie heißt dieser Körper? <u>Kugel</u> Wie heißt dieser Körper? <u>Prisma</u> Wie heißt dieser Körper? <u>Quader</u>	Das Begriffsverständnis zu Körpern ist noch nicht gefestigt. Auch begrenzte Alltagserfahrungen im Umgang mit entsprechenden Objekten (in diesem Fall (Suppen-)Dosen) könnten ursächlich sein.

Aufgabe 7 in Testheft B

Verbinde.	Der Würfel und die Kugel werden richtig zugeordnet, da sie vermutlich aus den vorherigen Schuljahren bekannt sind und/oder in der kindlichen Erfahrungswelt häufig vorkommen. Die Körper „Zylinder“ und „Pyramide“ sowie deren Eigenschaften sind entweder noch nicht bekannt oder die drei Flächen werden der Dreieckspyramide zugeordnet, da eine nicht sichtbare Seite (wie die Grundfläche) nicht mitgezählt wurde, und die sechs Kanten werden dem Zylinder zugeordnet, da sich das Kind vielleicht am Netz eines Zylinders (ein Rechteck mit vier Seiten und zwei Kreise mit je einer Seite) orientiert.
Verbinde.	Die drei richtig verbundenen Körper sind vermutlich begrifflich gesichert. Die Dreieckspyramide wird nicht verbunden, da sie im Vergleich zur Viereckspyramide ggf. noch nicht bekannt ist bzw. in der Abbildung eine Viereckspyramide erkannt wurde.

Verbinde.

Der Körper hat 1 Fläche.

Der Körper hat 8 Ecken.

Der Körper hat 6 Kanten.

Der Körper hat 3 Flächen.

Möglicherweise werden die Begriffe „Kante“ und „Ecke“ überlesen oder sind noch nicht gesichert: Der Würfel hat 6 Flächen und nicht wie hier dargestellt 6 Kanten und eine Viereckspyramide hätte 8 Kanten anstatt 8 Ecken.

Aufgabe 14 in Testheft C

Wird fälschlicherweise eine der drei ersten Aussagen angekreuzt, mangelt es vermutlich an einem gesicherten Begriffsverständnis zum Körper „Zylinder“, einem Verständnis der Begriffe „Fläche“, „Kante“ und „Ecke“ und/oder räumlichen Vorstellungsvermögen. Eventuell wählen die Kinder die zweite Antwortoption („...2 Flächen und keine Ecken.“), da sie auf der Abbildung zwei Flächen und keine Ecken sehen. Die Grundfläche des Körpers wird nicht beachtet.

Aufgabe 12 in Testheft C

Ergänze die Tabelle.

Steckbrief eines Quaders:

	Anzahl
Ecken	8
Flächen	6
Kanten	8

Ergänze die Tabelle.

Steckbrief eines Quaders:

	Anzahl
Ecken	8
Flächen	10
Kanten	12

Die Anzahl der Kanten bzw. Flächen ist falsch. Die Eigenschaften des Quaders scheinen nicht vollständig gesichert.

Ergänze die Tabelle.

Steckbrief eines Quaders:

	Anzahl
Ecken	8
Flächen	12
Kanten	6

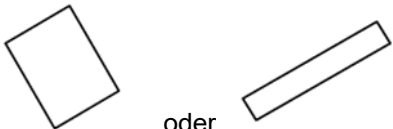
Vermutlich wurde die Flächenanzahl mit der Kantenanzahl verwechselt. Das Kind scheint kein sicheres Verständnis von Flächen und Kanten zu haben.

Flächen

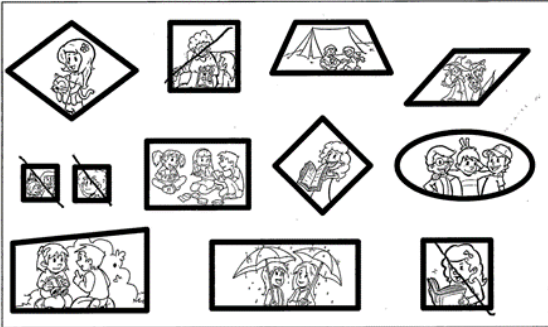
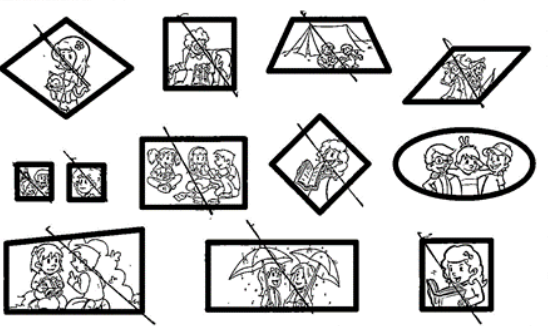
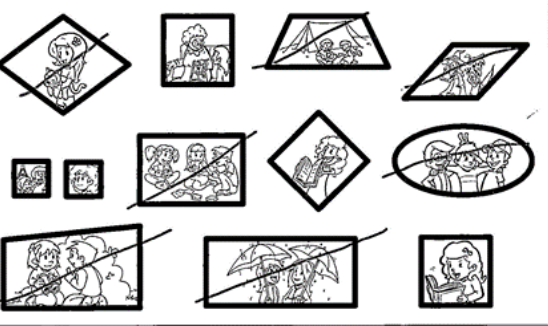
Aufgabe 13 in Testheft B

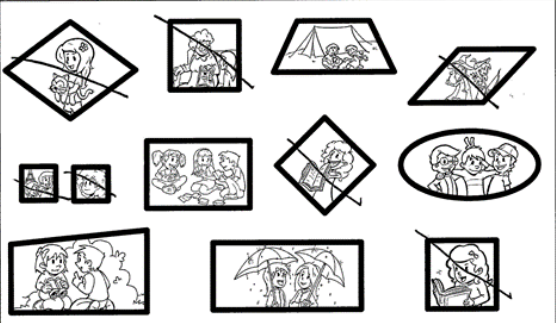
ist ein Rechteck.

Das Kind hat offenbar noch kein (vollständig) gesichertes Begriffsverständnis vom Rechteck entwickelt: Ein Rechteck ist ein Viereck, bei dem die gegenüberliegenden Seiten gleich lang und parallel zueinander sind und benachbarte Seiten senkrecht zueinanderstehen. Die Parallelität zweier Seiten überwiegt ggfs. in der Wahrnehmung.

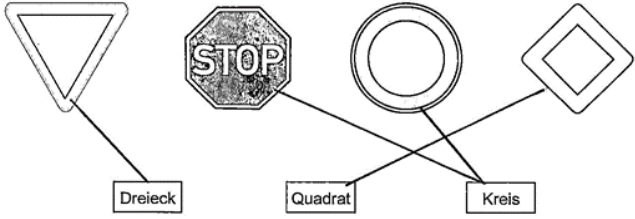
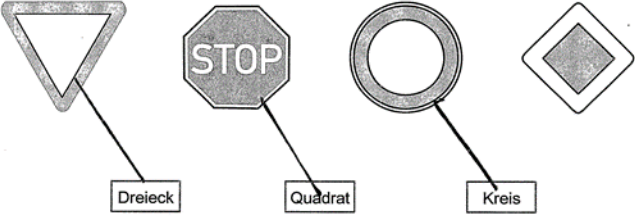
 oder ist kein Rechteck.	Die Rechtecke in untypischer Lage und/oder mit untypischer Form (hier gestreckt) werden nicht erkannt. Das Kind hat vermutlich eine prototypische Vorstellung vom Rechteck.
 ist kein Rechteck.	Die Figur wird eventuell als Quadrat bzw. quadratähnlich wahrgenommen und das Kind versteht nicht, dass auch ein Quadrat ein Rechteck ist.

Aufgabe 10 in Testheft C

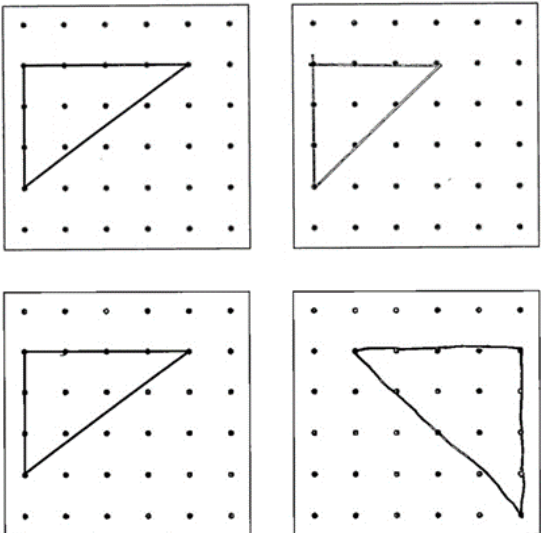
Streiche alle Rahmen durch, die die Form eines Quadrates haben. 	Das Quadrat, das auf der Spitze steht, wird noch nicht als solches erkannt. Vermutlich kennt das Kind bislang nur Quadrate in prototypischer Lage (d. h. auf einer Seite liegend).
	Der Begriff „Quadrat“ scheint noch nicht gesichert zu sein. Es werden alle Vierecke markiert.
	Es werden alle Rahmen durchgestrichen, die keine Quadrate sind. Vermutlich wurde nur die Aufgabe falsch verstanden. Das Kind könnte ein gesichertes Verständnis des Begriffs „Quadrat“ haben.

	Das Kind streicht alle Figuren durch, die augenscheinlich vier gleich lange Seiten haben, beachtet dabei aber nicht, dass ein Quadrat auch vier rechte Winkel haben muss. Es scheint kein vollständig gesichertes Verständnis des Begriffs „Quadrat“ vorzuliegen.
---	--

Aufgabe 1 in Testheft B

Welche Begriffe passen zu den Schildern? Verbinde. Ein Schild bleibt übrig. 	Das Kind hat ggf. überlesen, dass ein Schild übrigbleibt, und daher das Stop-Schild (evtl. aufgrund des „O“) falsch zugeordnet.
	Entweder ist der Begriff „Quadrat“ noch nicht gesichert oder das Vorfahrtsschild wird wegen der Lage nicht als Quadrat erkannt. Möglicherweise wurde das Achteck als Quadrat bezeichnet, da alle drei Begriffe zugeordnet werden sollen. Zudem wäre es möglich, dass nur die nicht schrägen Seiten als Seiten wahrgenommen wurden und/oder das Kind wusste, dass aus einem Quadrat durch Abschneiden der Ecken ein Achteck konstruieren werden kann.

Aufgabe 4 in Testheft B

Zeichne das gleiche Dreieck noch einmal daneben. 	Einzelne Seiten des Dreiecks werden zu kurz oder zu lang gezeichnet. Die Form- und Größen-invarianz wird noch nicht sicher umgesetzt bzw. als notwendig angesehen. Bei der gespiegelten Lösung kann auch ein noch nicht hinreichend entwickeltes räumliches Vorstellungsvermögen die Ursache sein.
---	---

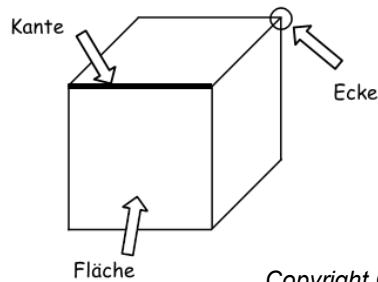
		Eine Seite des Dreiecks wird richtig übertragen, die anderen Seiten entsprechen nicht der Vorlage. Die Form- und Größeninvarianz wird noch nicht umgesetzt bzw. nicht als notwendig erachtet.
		Die vertikale und horizontale Seite wird richtig übertragen. Beim Zeichnen der schrägen Seite orientiert sich das Kind evtl. an den Punkten und stellt danach fest, dass keine geschlossene Figur entsteht. Dies korrigiert das Kind nachträglich durch eine Verbindungslinie (falsch).
		Es zeigen sich noch Unsicherheiten beim exakten Zeichnen – auch unter Nutzung der Punkte als Orientierungshilfe. Dies kann auf eine flüchtige Bearbeitung und/oder motorische Schwierigkeiten hindeuten.

7.2.3 Anregungen für den Unterricht

Körper

Eigenschaften und Besonderheiten geometrischer Körper verinnerlichen Schülerinnen und Schüler am nachhaltigsten über konkrete Handlungserfahrungen.

Die Hinführung erfolgt dabei, wenn möglich, anhand merkmalsarmer Modelle, damit der Fokus zunächst nur auf den geometrischen Eigenschaften liegt. Um diese zu entdecken, sollten die Kinder vorgegebene Körper selbstständig sortieren. Das Sortieren kann sowohl kategorien-suchend („Welche Körper gehören zusammen?“) als auch kategoriengeleitet (z. B. anhand eines vorgegebenen Begriffs und/oder vorgegebener Merkmale) erfolgen. Gemeinsam können dann die Kategorien begründet (*→ Argumentieren*), die Eigenschaften der Körper beschrieben und schließlich wichtige Begriffe wie „Ecke“, „Kante“ und „Fläche“ eingeführt und gesichert werden (z. B. „Beim Würfel bzw. Quader stoßen an jeder Ecke drei Flächen und drei Kanten zusammen“ und „An jeder Kante stoßen zwei Flächen aufeinander und an jeder Kante liegen zwei Ecken“) (*→ Kommunizieren*). Die Ergebnisse können auf Plakaten festgehalten werden, die langfristig auch als Wortspeicher dienen, um die Schülerinnen und Schüler bei der Begriffsbildung und der Verwendung einer sachgerechten Fachsprache zu unterstützen.

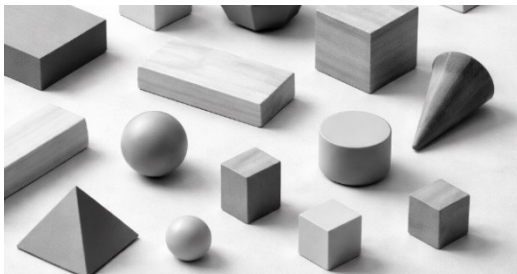


Copyright Grafik: IQB

In anschließenden Übungen können verschiedene Alltagsgegenstände sortiert werden, z. B.

- als Repräsentanten für Quader: Bücher, Mäppchen, Schachteln, Müslipackungen
- als Repräsentanten für Kugeln: Fußbälle, Perlen, Murmeln, Weihnachtskugeln
- als Repräsentanten für Zylinder: Spielfiguren, Keksdosen, Holzstäbchen

Unabhängig davon, ob Modelle oder Alltagsgegenstände verwendet werden, ist jedoch wichtig, dass sowohl typische (z. B. eine Schuhbox als Repräsentant für einen Quader) als auch untypische Repräsentanten (z. B. ein Bierdeckel als Repräsentant für einen Zylinder) verwendet werden, damit die Kinder kein eingeschränktes Begriffsverständnis (z. B. „Ein Quader ist immer lang.“) entwickeln (→ *Problemlösen*, → *Argumentieren*).



Copyright Grafik: IQB

Zur Vertiefung bieten sich Identifizierungsspiele wie „Ich sehe was, was du nicht siehst!“ an: „Ich sehe was, was du nicht siehst, und dieser Gegenstand hat die gleiche Form wie eine Keksdose, wie ...“ oder „Ich sehe was, was du nicht siehst, und das ist zylinderförmig“. Der Schwierigkeitsgrad kann erhöht werden, indem auch zusammengesetzte Körper verwendet werden. Auf diese Weise vertiefen die Kinder ihre Kompetenz, fachsprachlich korrekt über geometrische Körper zu sprechen (→ *Kommunizieren*).

Auch das „Erfühlen“ der Eigenschaften verschiedener Körper kann eine nachhaltige Erfahrung darstellen. Dabei erfühlen die Kinder, die mit einem Tuch verdeckten oder sich in einem Fühlsäckchen befindenden Körper und müssen sie benennen. Voraussetzung dafür ist, dass die Kinder bereits mit den Namen und Eigenschaften der Körper vertraut sind. Wird die Übung mit Alltagsgegenständen durchgeführt, muss beachtet werden, dass die Eigenschaften der Körper ggf. weniger idealtypisch als z. B. bei Modellen auftreten. Dies kann den Schwierigkeitsgrad der Übung erhöhen. Zudem ist zu beachten, dass sich Fehlvorstellungen zeigen können, falls Kinder den Würfel als Quader bezeichnen und diese Bezeichnung von den Mitschülerinnen und Mitschülern nicht akzeptiert wird, weil noch kein Verständnis für die Klasseninklusion vorliegt.

Des Weiteren sollten geometrische Körper (z. B. als Vollmodelle, Flächenmodelle und Kantenmodelle) von den Kindern nach Anleitung oder Vorlage selbst hergestellt werden. Zum Bauen von Kantenmodellen geometrischer Körper eignen sich insbesondere Schaschlik-Spieße oder Zahnstocher (als Kanten), die mit eingeweichten Linsen oder kleinen Knetkugeln (als Ecken)

miteinander verbunden werden. Hierfür müssen die Kinder die charakteristischen Eigenschaften wie z. B. die Anzahl an Ecken, Kanten und Flächen erfassen und korrekt nachbilden. Diese tiefgreifende Auseinandersetzung mit den Eigenschaften der Körper kann im Unterricht als Argumentationsanlass dienen (z. B. „Kann ich mit 12 gleich langen Kanten einen Quader bauen?“) (→ *Argumentieren*). Anschließend können die selbstgebaute Modelle in der Klasse mit einem zugehörigen „Namensschild“ ausgestellt werden. Ergänzend können die Kinder Steckbriefe zu den von ihnen gebauten Körpern verfassen, in denen die Eigenschaften zusammenfassend dargestellt werden, z. B.:

Steckbrief Würfel		
Anzahl der Ecken:	_____	
Anzahl der Kanten:	_____	
Anzahl der Flächen:	_____	
Besonderheiten:	_____	

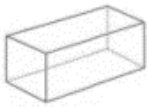
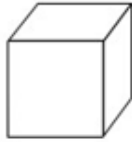
Copyright Abbildung: IQB

Die Steckbriefe können wiederum als Grundlage für Rätsel genutzt werden, indem Angaben bewusst weggelassen werden und von anderen Kindern ergänzt werden müssen. Je nach Schwierigkeitsgrad können dabei eine oder mehrere Angaben weggelassen werden. Auch können Fehler in den Angaben versteckt sein, die von anderen Kindern gefunden werden müssen. Danach können sich die Kinder darüber austauschen, wie sie die fehlenden Angaben bzw. die Fehler gefunden haben (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*).

Sammelt man alle Angaben aus den Steckbriefen in einer Tabelle, kann darüber hinaus eine Übersicht mit den Eigenschaften ausgewählter geometrischer Körper erstellt werden, z. B.:

Merkplakate für geometrische Körper

Quader

	8 Ecken 12 Kanten 6 Flächen	Bei einem Quader sind die gegenüberliegenden Flächen gleichgroße Rechtecke.
	8 Ecken 12 Kanten 6 Flächen	Würfel sind besondere Quader mit sechs gleich-großen quadratischen Flächen.

Kugel

	0 Ecken 0 Kanten 1 Flächen	Eine Kugel hat weder Ecken noch Kanten
---	---	--

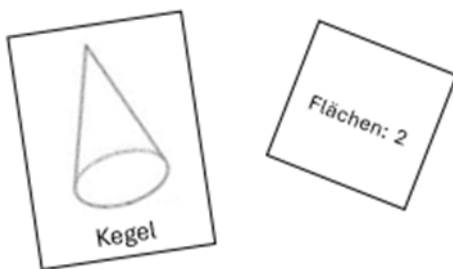
Pyramiden

	5 Ecken 8 Kanten 5 Flächen	Eine Viereckspyramide hat eine viereckige Grundfläche und vier dreieckige Seitenflächen.
	4 Ecken 6 Kanten 4 Flächen	Eine Dreieckspyramide hat eine dreieckige Grundfläche und drei dreieckige Seitenflächen.

Zylinder

	0 Ecken 2 Kanten 3 Flächen	Ein Zylinder hat drei Flächen. Der Mantel hat die Form eines Rechtecks.
---	---	---

Als weitere Vertiefung kann ein Memory, ggf. auch in verschiedenen Schwierigkeitsstufen, erstellt werden. Auf der einen Karte („Begriffskarte“) findet man den Namen des Körpers. Auf der dazugehörigen Karte („Eigenschaftskarte“) sind die entsprechenden Eigenschaften des Körpers (ggf. auch nur ausgewählte Eigenschaften) aufgelistet. Da die Anzahl an Ecken, Kanten und Flächen bei Quadern und Würfeln gleich ist, muss darauf geachtet werden, dass es die entsprechende Eigenschaftskarte doppelt gibt. Alternativ kann bewusst nur eine der beiden „Eigenschaftskarten“ untergemischt werden, so dass am Ende eine „Begriffskarte“ übrigbleibt. Die Kinder müssen dann begründen, warum dies so ist ($\rightarrow$ *Argumentieren*). Ergänzt man die „Begriffskarten“ um Abbildungen der Körper, ist es außerdem möglich, eine „Begriffskarte“, auf der sowohl ein Würfel als auch ein Quader zu sehen ist, zu verwenden. Wichtig ist dann jedoch, dass die Schülerinnen und Schüler vorab Gelegenheiten hatten, die Körper, die sie in Form von Modellen und/oder Alltagsgegenständen als dreidimensional kennengelernt haben, in zweidimensionalen Darstellungen wiederzuerkennen. Des Weiteren muss darauf geachtet werden, dass nicht nur die jeweiligen Prototypen abgebildet werden.



Copyright Abbildung: IQB

Flächen

Neben der Auseinandersetzung mit geometrischen Körpern ist in der Grundschule auch eine Thematisierung von Flächenformen zentral. Das Erarbeiten verschiedener Flächenformen hat dabei sowohl für sich allein genommen eine Bedeutung als auch in Bezug auf die Behandlung von Körpern. Denn: Nur, wenn Kinder vielfältige Gelegenheiten hatten, Flächen (auch in der Umwelt) kennenzulernen, deren Eigenschaften zu erarbeiten und ein entsprechendes Fach-vokabular aufzubauen, können sie die Flächen bei Körpern untersuchen und beschreiben.

Abgesehen von einer Betrachtung verschiedener Dreiecke und Kreise ist hierbei v. a. die Behandlung von Vierecken bedeutsam. Die zuvor aufgeführten Aufgaben zu geometrischen Körpern können dafür weitestgehend adaptiert werden:

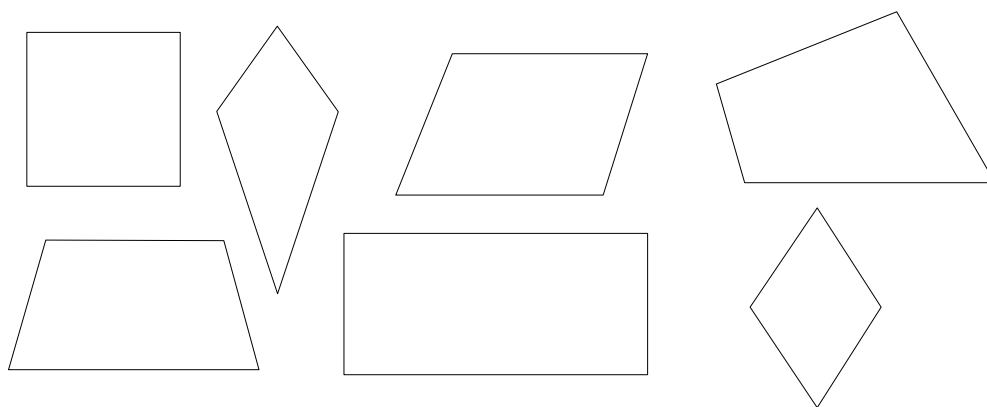
- vorgegebene Flächen (z. B. Vierecke, Dreiecke und Kreise) sortieren
- die Kategorien ausgehend von den Eigenschaften begründen (→ *Argumentieren*)
- Begriffe wie „Seite“ und „Ecke“ klären und sichern (z. B. in Form eines Wortspeichers)
- Flächen in der Umwelt suchen (z. B. in Straßenschildern, Bildern, Fenstern etc.)
- Steckbriefe erstellen und Rätsel anschließen (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*)

Haben die Schülerinnen und Schüler erste Erfahrungen mit den Eigenschaften von Kreisen, Dreiecken und Vierecken gesammelt, sollten sie zudem dazu aufgefordert werden, unterschiedliche (Kreise), Dreiecke und Vierecke zu legen, zu spannen (z. B. auf Geobrettern) oder zu zeichnen (siehe dazu auch „Zeichnen geometrischer Körper und Flächen“). Auf diese Weise können sowohl typische (z. B. gleichschenklige oder gleichseitige Dreiecke, quadratische oder quadratähnliche Vierecke) als auch untypische (z. B. unregelmäßige Dreiecke und Vierecke, Vierecke mit „innenliegenden“ Ecken) Repräsentanten der Begriffe gesammelt werden, die anschließend gemeinsam betrachtet und beschrieben werden (→ *Kommunizieren*). Die Ergebnisse können in Form von Lernplakaten, auf denen die verschiedenen Beispiele aufgeklebt werden, gesichert werden, um langfristig einem eingeschränkten Begriffsverständnis entgegenzuwirken (z. B. „Ein Dreieck sieht immer so aus“ oder „Ein Viereck hat vier gleich lange Seiten“).

Im weiteren Verlauf des Unterrichts können die vielfältigen Beispiele zum Begriff „Viereck“ dann dazu genutzt werden, um mit den Schülerinnen und Schülern die Hierarchie der Vierecke (das „Haus der Vierecke“) zu erarbeiten. Indem die Kinder die Vierecke sortieren und ihre Kategorien eigenschaftsbezogen begründen (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*), können sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede von unregelmäßigen Vierecken, Trapezen, Parallelogrammen, Drachen, Rechtecken, Rauten und Quadraten entdecken. Dafür müssen sie ihre Aufmerksamkeit weg von der Anzahl an Ecken und Seiten (diese Eigenschaften werden bei der Unterscheidung von Kreisen, Dreiecken und Vierecken herangezogen) hin zu der Beschaffenheit der Ecken (z. B. „vier rechte Winkel“) und Seiten (z. B. „je zwei parallele Seiten“) lenken. Anschließend können die gefundenen Kategorien benannt und ihre Eigenschaften in Form von Steckbriefen oder Lernplakaten

festgehalten werden. Im Zuge dessen müssen ggf. auch Begriffe wie „parallel“, „senkrecht“ oder „rechter Winkel“ (zunächst häufig als „besondere Ecke“ bezeichnet) mit den Schülerinnen und Schülern besprochen werden und die Bedeutungen in Form von Wortspeichern gesichert werden (→ *Kommunizieren*). Zudem muss, ähnlich wie zuvor, beachtet werden, dass auf Steckbriefen oder Lernplakaten neben typischen Beispielen (z. B. ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis 1:2, ein auf einer Seite liegendes Quadrat) stets auch untypische Beispiele (z. B. ein sehr schmales Rechteck, ein Quadrat auf der Spitze) präsentiert werden, um einem von Prototypen geprägten Begriffsverständnis entgegenzuwirken. Zusätzlich bietet es sich an, die verschiedenen Viereckstypen unter Berücksichtigung ihrer Eigenschaften mit den Schülerinnen und Schülern zu ordnen, um die Beziehungen zwischen den Vierecken zu verdeutlichen und ein Verständnis für Klasseninklusionen zu schaffen (z. B. „Das sind Quadrate. Aber alle Quadrate sind auch Rechtecke“). Mögliche Arbeitsaufträge sind die folgenden:

Beispiel: „*Ordnet die Vierecke nach ihren Eigenschaften. Begründet die gewählte Anordnung.*“

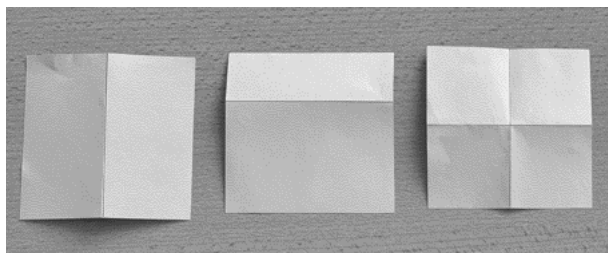


Beispiel: „*Welche Eigenschaften müssen erfüllt sein? Kreuze an.*“

	Viereck	Trapez	Drachen	Parallelogramm	Raute	Rechteck	Quadrat
<u>Hat 4 Ecken und 4 Seiten.</u>	x	x	x	x	x	x	x
<u>Hat 2 parallele Seiten.</u>		x		x	x	x	x
<u>Hat je 2 gleichlange Seiten.</u>			x	x	x	x	x
<u>Hat 4 gleichlange Seiten.</u>					x		x
<u>Hat 4 rechte Winkel.</u>						x	x

Haben die Schülerinnen und Schüler erste Erfahrungen mit den verschiedenen Vierecken und zugehörigen Fachbegriffen gemacht, eignen sich auch Falt- und Schneideübungen, um die besonderen Eigenschaften praktisch erfahrbar zu machen:

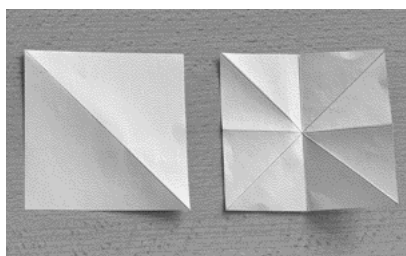
Beispiel: „*Falte ein quadratisches Papier in zwei Rechtecke/vier kleine Quadrate*“



Copyright Foto: IQB

Auch Dreiecke können in diesem Kontext erneut aufgegriffen werden:

Beispiel: „*Falte ein quadratisches Papier in zwei Dreiecke/viele kleine Dreiecke.*“



Copyright Foto: IQB

Um schließlich die Beziehungen zwischen Körpern und Flächen zu erarbeiten, können Modelle, Produkte der Kinder und Alltagsgegenstände (siehe dazu auch Abschnitt „Körper“) genutzt werden und hinsichtlich ihrer Flächen untersucht werden (→ *Kommunizieren*). Ein möglicher Arbeitsauftrag ist: „Welche Fläche siehst du oben/unten/vorne/hinten/an der Seite?“ Haben die Kinder zuvor durchdrungen, dass jedes Quadrat ein Rechteck ist, kann ausgehend davon herausgearbeitet werden, warum auch jeder Würfel ein Quader ist (→ *Argumentieren*).

Ebenso können die Kinder durch Umfahren, Drucken, Abrollen oder Aufschneiden der Körper auf eine handlungsorientierte Art und Weise erfahren, aus welchen Flächen sich diese zusammensetzen. So können auch gekrümmte Flächen (z. B. der Mantel bei einem Zylinder) als Flächen erkannt werden. Zudem sollte die besondere Stellung der Kugel thematisiert werden, da sich ihre Fläche nicht abbilden lässt. Um diese Erkenntnisse festzuhalten, können die Steckbriefe, Plakate etc. aus der Arbeit mit Körpern genutzt und erweitert werden.

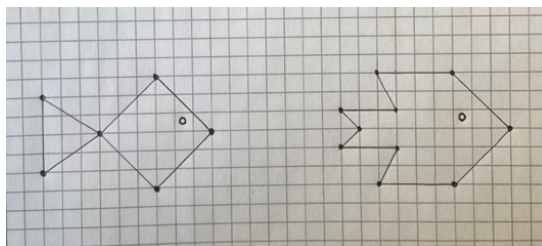
Zeichnen geometrischer Körper und Flächen

Durch das geometrische Zeichnen trainieren Kinder ihre visuo-motorischen Fähigkeiten und ihre visuelle Wahrnehmung (siehe dazu auch Didaktischen Kommentar „Symmetrie und Abbildungen“). Gleichzeitig können Eigenschaften ebener Figuren und Körper anhand von Zeichnungen vertieft werden und Zeichnungen der Kinder genutzt werden, um verschiedene Repräsentanten eines

Begriffs zu sammeln und zu veranschaulichen (siehe dazu auch Abschnitt „Flächen“). Auf diese Weise kann das geometrische Zeichnen zu einem besseren Begriffsverständnis beitragen.

Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schülern (zuvor und währenddessen) Möglichkeiten haben, den Umgang mit Zeichenwerkzeugen wie z. B. einem Lineal oder Geodreieck gezielt einzuüben, damit sie mathematisch korrekte Zeichnungen von ebenen Figuren und später auch Körpern anfertigen können (z. B. sollten die Seiten eines Vierecks wirklich gerade sein und bei einem Rechteck sollten die gegenüberliegenden Linien parallel verlaufen). Häufig lassen sich solche Übungen mit gestalterischen Aufgaben im Kunstunterricht oder mit fach-bezogenen Aufgaben in anderen Unterrichtsfächern (z. B. beim Anlegen von Tabellen im Sachunterricht) verknüpfen und nehmen zunächst v. a. die Feinmotorik in den Blick. So müssen die Kinder in Bezug auf das Lineal bspw. lernen, wie sie es korrekt platzieren, mit einer Hand fixieren und mit der anderen Hand entlang dessen Kante zeichnen. Ziel ist es, diese Technik durch motivierende Aufgaben zur Beherrschung zu führen. Hierfür können Methoden, die auch beim Freihandzeichnen eingesetzt werden, adaptiert werden (z. B. Abzeichnen, Nach-zeichnen, Zeichnen nach Vorgaben oder Zeichnen im Punkte- bzw. Karoraster) (siehe dazu auch Didaktischen Kommentar „Symmetrie und Abbildungen“).

Weitere Übungsaufgaben können sich darauf beziehen, Punkte zu verbinden oder fehlende Linien zu ergänzen. Das Ziehen einer Linie durch drei vorgegebene Punkte kann dabei die Bedeutung des exakten Anlegens eines Lineals verdeutlichen. Besonders motivierend sind solche Übungen, wenn durch exaktes Zeichnen eine bekannte Figur entsteht (s. folgendes Beispiel).



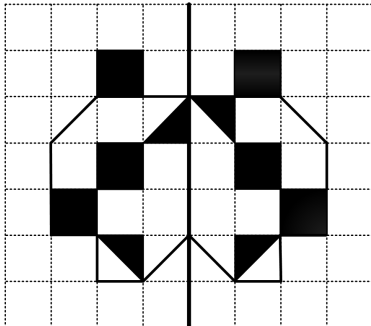
Copyright Foto: IQB

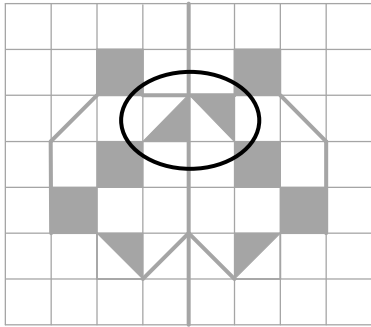
7.3 Aufgaben zu Symmetrie und Abbildungen

Aufgabe 2 in Testheft B

Ben hat die Figur gespiegelt, dabei hat er einen Fehler gemacht.

Kreise die Stelle ein.



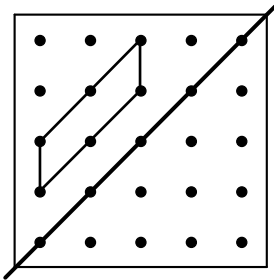
RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik  Auch richtig ist, wenn nur eines der gekennzeichneten Dreiecke eingekreist wurde.
----------------	---

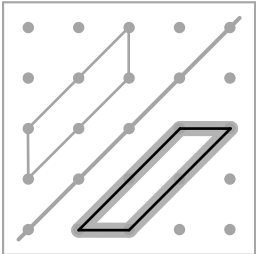
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)

Aufgabe 9 in Testheft B

Spiegle an der Achse auf dem Geobrett.

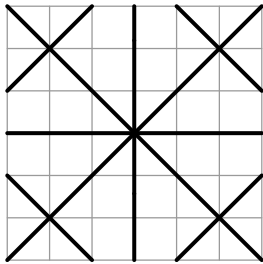


RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich ist grau markiert.) 
----------------	--

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)

Aufgabe 8 in Testheft B

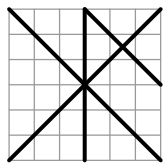
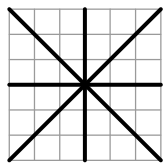
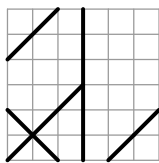
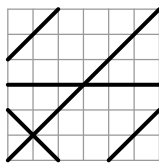


Vier Kinder wollen das Muster nachzeichnen.

Sie sind noch nicht fertig.

Bei welchem Bild kann das Muster **nicht** mehr richtig weitergezeichnet werden?

Kreuze an.


☐

☐

☐

☐

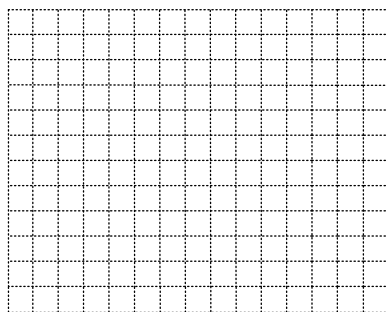
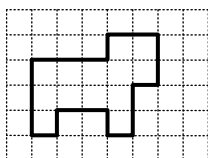
RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

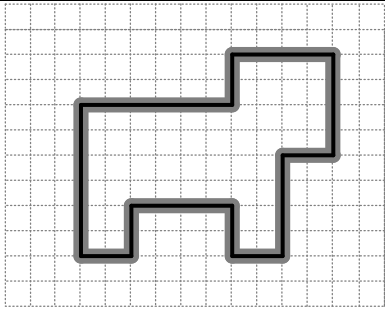
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1); mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln (3.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln (2.3.c)

Aufgabe 10 in Testheft B

Vergrößere die Figur. Jede Linie soll doppelt so lang sein.



RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich ist grau markiert.)
---------	---

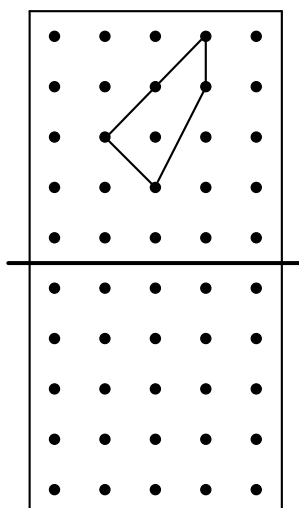
	 Die Lage der vergrößerten Figur kann beliebig gewählt werden.
--	--

Teilaufgabenmerkmale

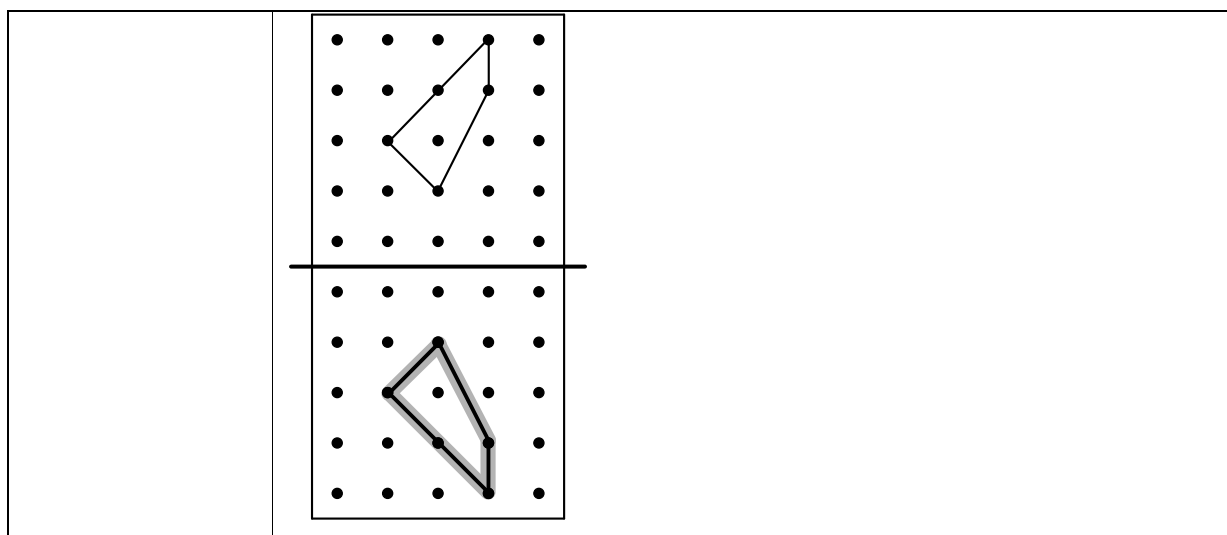
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern) (2.3.a)

Aufgabe 11 in Testheft C

Spiegle an der Achse.



RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich ist grau markiert.)
---------	---



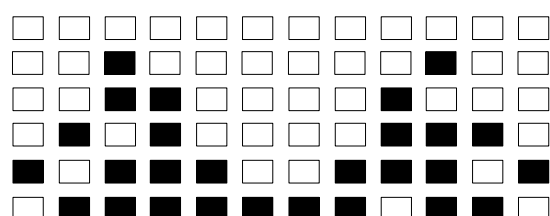
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen (2.2.d); Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)

Aufgabe 8 in Testheft C

Das Muster soll symmetrisch werden.

Male 3 Kästchen an.



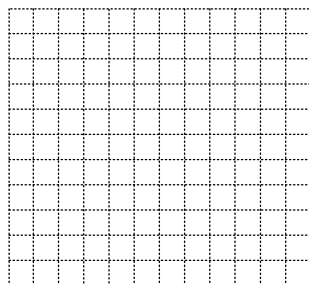
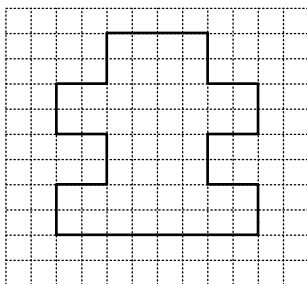
RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z.B. systematisch probieren) (1.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln (2.3.c)

Aufgabe 7 in Testheft C

Verkleinere die Figur. Jede Linie soll halb so lang sein.



RICHTIG	vergleiche Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich ist grau markiert.)
	Die Lage der verkleinerten Figur kann beliebig gewählt werden.

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern) (2.3.a)

Aufgabe 6 in Testheft C

Welches Schild hat **keine** Spiegelachse?

Kreuze an.

			
☐	☐	☐	☐

RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)

7.3.1 Aufgabenbezogener Kommentar

	Raumvorstellungsaspekt	Begriffsverständnis	Zeichnen
<u>Aufgabe 2 in Testheft B</u>	x	x	
<u>Aufgabe 9 in Testheft B</u>	x	x	x
<u>Aufgabe 8 in Testheft B</u>	x		
<u>Aufgabe 10 in Testheft B</u>	x	(x)	x
<u>Aufgabe 11 in Testheft C</u>	x	x	x
<u>Aufgabe 8 in Testheft C</u>	x	x	
<u>Aufgabe 7 in Testheft C</u>	x	(x)	x
<u>Aufgabe 6 in Testheft C</u>	x	x	

In den Bildungsstandards wird die Leitidee „Raum und Form“ in die vier Teilbereiche „sich im Raum orientieren“, „geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen“, „Flächen- und Raum-

inhalte vergleichen und messen“ und „einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen“ unterteilt. In Bezug auf das geometrische Abbilden sollen Schülerinnen und Schüler lernen, ebene Figuren in Gitternetzen abzubilden (verkleinern und vergrößern), Eigenschaften der Achsensymmetrie zu erkennen, zu beschreiben und zu nutzen sowie symmetrische Muster fortzusetzen und selbst zu entwickeln.

Ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern)

Zwei Aufgaben, die das Abbilden ebener Figuren auf Gitternetzen erfordern, sind die Aufgaben 10 in Testheft B und 7 in Testheft C. Während bei Aufgabe 10 in Testheft B eine Figur vergrößert werden soll, wird bei Aufgabe 7 in Testheft C das Verkleinern einer Figur gefordert. Voraussetzung dafür sind jeweils eine Figur-Grund-Wahrnehmung und zeichnerische Fertigkeiten. Bei Aufgabe 10 in Testheft B muss darüber hinaus ein Verständnis für die Formulierung „doppelt so lang“ gegeben sein, bei Aufgabe 7 in Testheft C für die Formulierung „halb so lang“.

Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen

Die Aufgaben 2 in Testheft B, 6 in Testheft C, Aufgabe 11 in Testheft C und Aufgabe 9 in Testheft B setzen Kompetenzen im Bereich der Achsenspiegelung voraus und damit einhergehend ein Verständnis der Begriffe „spiegeln“ bzw. „Spiegelachse“. Sie unterscheiden sie darin, ob eine Figur auf Achsensymmetrie überprüft (Aufgabe 2 in Testheft B und Aufgabe 6 in Testheft B) oder eine Figur an einer Achse gespiegelt werden soll (Aufgabe 11 in Testheft C und Aufgabe 9 in Testheft B). Bei den Aufgaben 2 in Testheft B und 6 in Testheft C liegt die Spiegelachse innerhalb der Figur, bei den Aufgaben 11 in Testheft C und Aufgabe 9 in Testheft B wird eine Figur an einer Achse gespiegelt, so dass am Ende zwei Figuren vorliegen. Unabhängig davon, welcher dieser Aufgabentypen vorliegt, können die Aufgaben über eine räumliche Vorstellung der Spiegelung und/oder das Wissen um die Eigenschaften der Achsenspiegelung bzw. achsensymmetrischer Figuren gelöst werden.

Bei den Aufgaben 2 in Testheft B und 6 in Testheft C sollen einzelne Figuren auf Achsensymmetrie untersucht werden. Aufgabe 2 in Testheft B zeigt eine Aufgabenbearbeitung, bei der eine abstrakte Figurenhälfte aus Quadraten und Dreiecken fehlerhaft zu einer symmetrischen Figur ergänzt wurde. Der Fehler soll dabei nur identifiziert und nicht korrigiert werden. Bei Aufgabe 6 in Testheft C soll das Verkehrsschild ausgewählt werden, das keine Spiegelachse hat. Anders als bei Aufgabe 2 in Testheft B liegen den Kindern also Bilder aus ihrer Umwelt vor, die ihnen möglicherweise schon bekannt sind.

Bei den Aufgaben 9 in Testheft B und 11 in Testheft C muss eine vorgegebene Figur an einer schrägen bzw. waagerechten Spiegelachse gespiegelt werden. Dies setzt grundlegende zeichnerische Fertigkeiten voraus. Das Punkteraster, auf dem in beiden Fällen gespiegelt wird, kann den Schülerinnen und Schülern als Orientierung dienen und ermöglicht es, die Abstände zur Spiegelachse abzuzählen.

Symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln

Bei den Aufgaben 8 in Testheft C und 8 in Testheft B sollen symmetrische Muster untersucht werden.

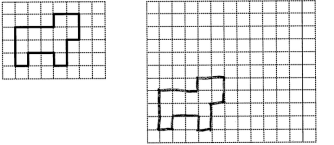
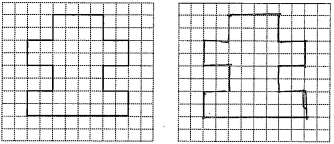
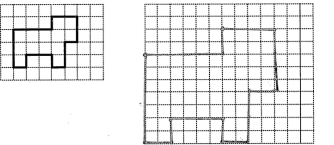
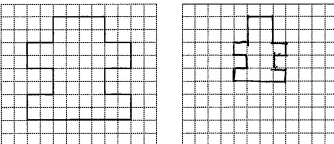
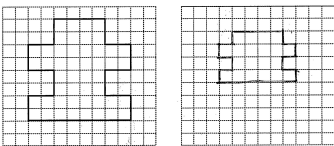
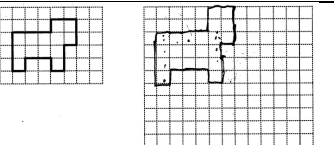
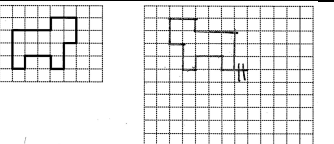
Aufgabe 8 in Testheft B erfordert von den Kindern das Abgleichen von vier Zeichnungen auf Karo-Papier mit einem symmetrischen Muster, indem die Linien der Zeichnungen mit den Linien des Musters in Beziehung gesetzt werden. Dafür müssen die Schülerinnen und Schüler die Linien des Musters bzw. der Zeichnungen von den Kästchenlinien, das heißt die Figur vom Grund, unterscheiden können. Darüber hinaus müssen sie Raum-Lage-Beziehungen erkennen und berücksichtigen.

Bei Aufgabe 8 in Testheft C sollen die Kinder ein vorgegebenes Muster symmetrisch ergänzen. Sie müssen daher den Begriff „symmetrisch“ und damit einhergehend die Eigenschaften achsensymmetrischer Muster, die sich aus den Eigenschaften der Achsenspiegelung ergeben, kennen. Erneut spielen dabei das Erkennen und Beachten von Raum-Lage-Beziehungen eine wichtige Rolle.

7.3.2 Mögliche Schwierigkeiten

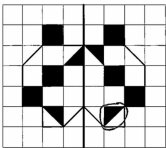
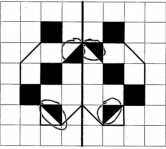
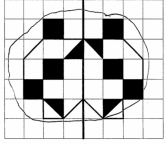
Ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern)

Aufgabe 10 in Testheft B und Aufgabe 7 in Testheft C

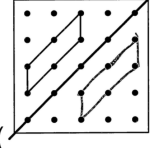
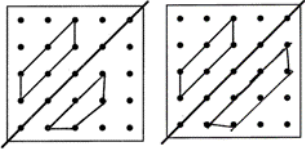
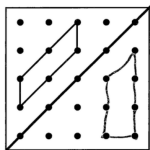
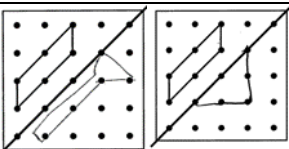
 	Die Figur wurde abgezeichnet, ohne sie zu vergrößern bzw. zu verkleinern. Dies kann darauf hinweisen, dass der Arbeitsauftrag übersehen wurde oder Begriffe unklar waren („vergrößere“, „verkleinere“, „halb/doppelt so lang“).
  	Nicht alle Seiten der Figur wurden korrekt verdoppelt bzw. halbiert. Ursächlich kann ein Zähl- oder Rechenfehler sein (fehlerhaftes Abzählen der Kästchen bei der Ausgangsfigur oder in der eigenen Zeichnung, fehlerhaftes Verdoppeln bzw. Halbieren) oder ein mangelndes Verständnis dafür, dass alle Seiten der Figur im gleichen Verhältnis vergrößert bzw. verkleinert werden müssen.
	Einige Seiten der Figur wurden zwar verlängert, es scheint jedoch noch kein Verständnis für das Vergrößern als proportionales Vergrößern und den Begriff „doppelt so lang“ vorzuliegen.
	Die Figur wurde gespiegelt, anstatt sie zu vergrößern. Dies kann auf ein fehlendes Verständnis des Begriffs „vergrößern“ oder ein Nichtbeachten des Arbeitsauftrags hinweisen.

Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen

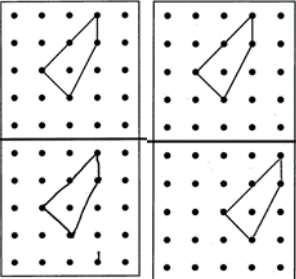
Aufgabe 2 in Testheft B

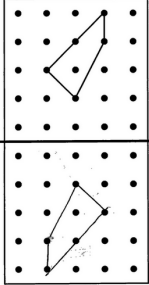
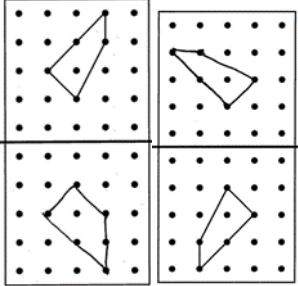
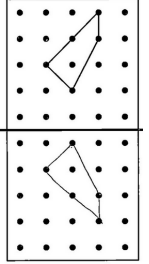
	Die Quadrate wurden als richtig gespiegelt erkannt. Bei den Dreiecken ergeben sich Probleme, da sie durch die Spiegelung sichtbar in ihrer Orientierung verändert werden. Vermutlich wurden bei den Dreiecken aufgrund unzureichender räumlicher Kompetenzen oder einem fehlerhaften Verständnis der Achsenspiegelung nicht richtig erkannt, wie ein gespiegeltes Dreieck aussehen muss.
	Es wurden alle Dreiecke markiert. Möglicherweise werden diese als unvollständige Quadrate und daher als fehlerhaft angesehen.
	Es wurde erkannt, dass die Figur fehlerhaft ist, der betroffene Bereich jedoch nicht explizit markiert.

Aufgabe 9 in Testheft B

	Ein typischer Fehler ist, dass die Figur verschoben und nicht gespiegelt wird. Die Form der Ausgangsfigur bleibt dabei zwar erhalten, sowohl die Orientierungsumkehrung als auch der gleiche Abstand von Punkt und Bildpunkt zur Spiegelachse werden jedoch vernachlässigt.
	Mehrere, aber nicht alle Punkte der Figur wurden korrekt gespiegelt. In den Beispielen wurde der untere Teil der Figur jeweils korrekt gespiegelt, der obere Teil wurde verschoben (siehe Fehlertyp 1).
	Die Figur wurde falsch gespiegelt. Es kann vermutet werden, dass ein (oder mehrere) Punkt(e) richtig gespiegelt wurde(n) und die gespiegelte Figur dann falsch ganzheitlich ergänzt wurde, da kein Verständnis für die Spiegelung an schrägen Achsen vorliegt.
	Die gespiegelten Figuren weichen in ihrer Form stark von der Ausgangsfigur ab. Dies deutet auf ein unzureichendes Verständnis für das Spiegeln oder ein mangelndes Raumvorstellungsvermögen hin.

Aufgabe 11 in Testheft C

	Ein typischer Fehler ist, dass die Figur verschoben und nicht gespiegelt wird. Die Form der Ausgangsfigur bleibt dabei erhalten, sowohl die Orientierungsumkehrung als auch der gleiche Abstand von Punkt und Bildpunkt zur Spiegelachse werden jedoch vernachlässigt.
---	--

	Die Figur wurde nicht an der Achse gespiegelt, sondern um 180° um einen Punkt gedreht (Punktspiegelung). Die Form der Ausgangsfigur bleibt dabei erhalten, sowohl die Orientierungsumkehrung als auch der gleiche (orthogonale) Abstand von Punkt und Bildpunkt zur Spiegelachse werden jedoch vernachlässigt.
	Einzelne Punkte der Figur wurden falsch gespiegelt, da vermutlich der Abstand der Punkte zur Spiegelachse falsch bestimmt wurde (Verzählen oder Verrutschen). Aus diesem Grund ist die gespiegelte Figur nicht mehr deckungsgleich zur Ausgangsfigur.
	Die Figur wurde gespiegelt und die Ausgangsfigur und die gespiegelte Figur sind deckungsgleich. Der Abstand der Figur zur Spiegelachse ist jedoch falsch. Vermutlich wurde der „Startpunkt“ falsch gespiegelt und die Figur dann „richtig“ ganzheitlich ergänzt.

Aufgabe 6 in Testheft C erfordert die Fähigkeit, die Schilder als Ganzes auf Achsensymmetrie zu überprüfen. Fehler können demnach entstehen, wenn nur einzelne Teile der Schilder fokussiert werden. So könnte einerseits fälschlicherweise angenommen werden, dass das Fahrradschild eine Spiegelachse hat, da die dreieckige Form eine offensichtliche vertikale Spiegelachse besitzt. Andererseits wird bei dem Halteverbotsschild vielleicht keine Spiegelachse gefunden, da die runde Form potentiell unendlich viele und somit keine eindeutige Spiegelachse hat und das innere Muster anders als der Pfeil bei dem letzten Schild keine vertikale Spiegelachse nahelegt, die meist als erstes erkannt wird.

Symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln

Bei Aufgabe 8 in Testheft B kann es zu Fehlern kommen, wenn die Linien des Musters aufgrund einer unzureichenden Figur-Grund-Wahrnehmung nicht von den Kästchenlinien unterschieden werden können. Wird fälschlicherweise das zweite Feld angekreuzt, könnte auch ein oberflächlicher Blick ursächlich sein, da die Zeichnung einem der kleinen Quadrate aus dem Muster ähnelt und ggfs. das „nicht“ im Arbeitsauftrag überlesen wurde.

Aufgabe 8 in Testheft C

	Das Muster wurde symmetrisch ergänzt, aber es wurden mehr als drei Kästchen angemalt. Dies kann darauf hindeuten, dass der Arbeitsauftrag nicht genau gelesen wurde. Das Prinzip der Symmetrie wurde verstanden.
	Das Muster wurde symmetrisch ergänzt. Da jedoch zu viele Kästchen angemalt wurden, wurde eine Korrektur durchgeführt. Hierbei ist dann vermutlich ein Fehler unterlaufen.
	Das Kind hat von oben begonnen, das Muster symmetrisch zu ergänzen, und aufgehört, als drei Kästchen gemalt waren. Das Prinzip der Symmetrie könnte verstanden sein.
	Das Muster wurde unvollständig symmetrisch ergänzt. Zwei Kästchen wurden richtig angemalt, das dritte Kästchen wurde nicht gefunden.

7.3.3 Anregungen für den Unterricht

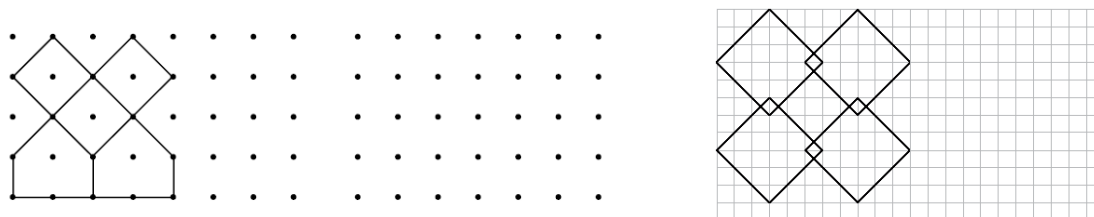
Ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern)

Das Abbilden ebener Figuren in Gitternetzen oder auch Punkterastern erfordert grundlegende visuo-motorische Fähigkeiten, insbesondere die Auge-Hand-Koordination. Um diese bei den Schülerinnen und Schülern zu fördern, ist neben konkreten Hilfestellungen ein modellhaftes Verbalisieren des Vorgehens beim Zeichnen durch die Lehrkraft zentral (z. B. die Länge von Verbindungslinien und die Position von Eckpunkten zwischen Zeichnung und Vorlage vergleichen). Gleichmaßen können auch die Kinder dazu angeregt werden, die Abmessungen und die Lage der zu zeichnenden Figur mit eigenen Worten zu verbalisieren (→ *Kommunizieren*).

Des Weiteren bieten sich regelmäßige Aufgaben zum Abzeichnen an (vgl. Beispiele 1), um die Auge-Hand-Koordination und das geometrische Zeichnen zu fördern. Im Unterricht sollten daher vielfältige Gelegenheiten geschaffen werden, einfache Reproduktionen unter Berücksichtigung von Längen- und Winkelbeziehungen (ohne Spiegelung) zu üben. Übertragen die Schülerinnen und Schüler die Figuren ohne Zeichenwerkzeuge (z. B. ein Lineal) in Punkteraster oder auf Karopapier, wird zudem das Freihandzeichnen geübt.

Beispiele 1:

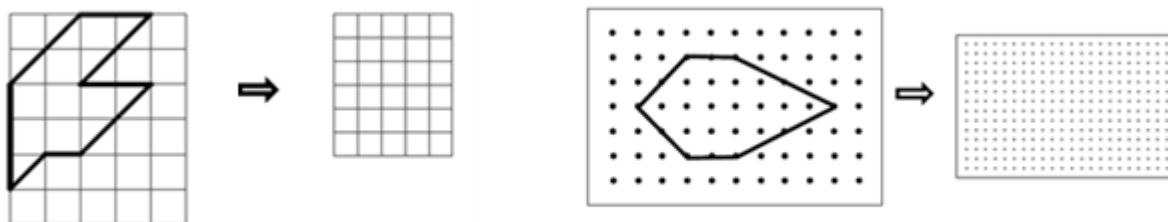
„Zeichne die Figuren ab. Worauf achtest du besonders?“



Ein Übergang vom Abzeichnen hin zum Vergrößern und Verkleinern von Figuren kann dadurch geschaffen werden, dass Figuren in Punkteraster oder Gitternetze mit einer anderen Größe als die Vorlage übertragen werden (vgl. Beispiele 2). Die Kinder werden im Vergleich zu Vergrößerungen oder Verkleinerungen auf gleichbleibendem Untergrund hier dadurch entlastet, dass sie die Anzahl der Kästchen oder Punkte noch nicht umrechnen, sondern nur zählen müssen.

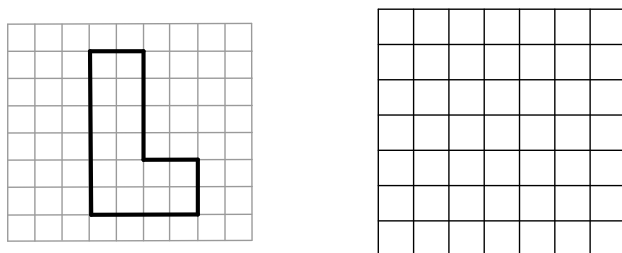
Beispiele 2:

„Verkleinere die Figur durch Übertragen in die kleineren Kästchen“ bzw. „Verkleinere die Figur durch Übertragen in das kleinere Punkteraster.“



Copyright Abbildungen: IQB

„Vergrößere die Figur durch Übertragen in die größeren Kästchen.“

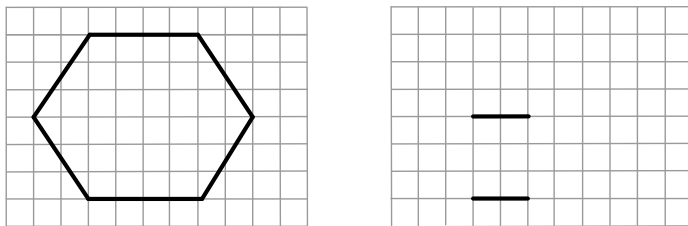


Copyright Abbildung: IQB

Sind die Grundlagen gesichert, lässt sich das Verkleinern und Vergrößern an weiteren Figuren auf gleichen Punkterastern oder Gitternetzen üben (vgl. Beispiele 3). Differenzierungen sind durch Lösungshinweise möglich, die bei fortschreitender Kompetenzentwicklung sukzessive entfallen.

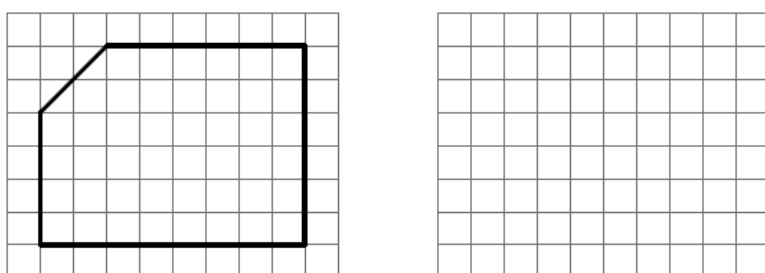
Beispiele 3:

„Zeichne die Figur weiter. Jede Seite soll halb so lang sein.“



Copyright Abbildung: IQB

„Zeichne die Figur kleiner. Jede Seite soll halb so lang sein.“

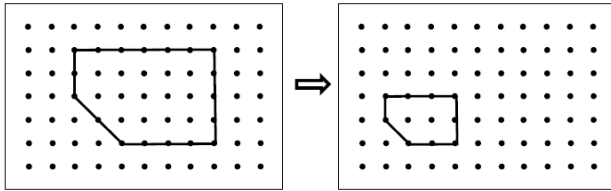


Copyright Abbildung: IQB

Falsche Lösungen der Schülerinnen und Schüler in anonymisierter Form können zum Lernanlass werden, indem die Fehler analysiert und die zugrundeliegenden Vorgehensweisen gemeinsam nachvollzogen werden (vgl. „Mögliche Schwierigkeiten“). Dies gilt sowohl für Rechenfehler als auch für Fehler, die auf zeichnerischen Schwierigkeiten oder (fach-)sprachlichen Unsicherheiten beruhen. Die Motivation der Kinder kann dadurch angeregt und erhalten werden, dass neben den Fehlern auch die richtigen Anteile, die die Lösungen enthalten, herausgestellt und wertgeschätzt werden. Anschließend können Fehlerkorrekturen bzw. Hilfestellungen an den Autor oder die Autorin der falschen Lösung schriftlich oder mündlich formuliert werden (z. B. „Du musst jede Strecke doppelt so lang zeichnen, wie in der Ausgangsfigur.“, „Wenn eine Strecke in der Ausgangsfigur 2 Kästchen lang ist, musst du sie 4 Kästchen lang zeichnen.“) (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*). Im Zuge dessen können fachsprachliche Begriffe (z. B. „doppelt so lang“, „halb so lang“) gesichert und somit die fachsprachlichen Kompetenzen aller Schülerinnen und Schüler gefördert werden.

Grundsätzlich machen die Kinder beim Verkleinern und Vergrößern Erfahrungen, die zum Verständnis des Maßstabs notwendig sind. In der Lebenswirklichkeit wird mithilfe des Maßstabs ein Größenverhältnis von der Abbildung zur Wirklichkeit beschrieben. Der Maßstab 1 : 2 bedeutet, dass 2 cm in der Wirklichkeit 1 cm in der Abbildung entsprechen, das heißt die Wirklichkeit wird in der Abbildung verkleinert dargestellt. Andersherum wird die Wirklichkeit bei einem Maßstab von 2 : 1 vergrößert dargestellt. Entsprechend kann bereits beim Verkleinern und Vergrößern auf Größenverhältnisse zweier in Beziehung stehender Abbildungen eingegangen werden. Dabei bietet es sich an, zuerst den Begriff „Maßstab“ zu klären und das maßstabsgetreue Vergrößern und Verkleinern im gleichen Punkteraster oder Gitternetz zu einzuüben. Anschließend können die Kinder in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit aufgefordert werden, eigene Figuren zu zeichnen oder Gegenstände abzuzeichnen, einen Maßstab festzulegen und gemäß diesem zu vergrößern oder zu verkleinern.

„Verkleinere die Figur im Maßstab 1 : 2“



Copyright Abbildung: IQB

Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen

Grundsätzlich können drei Aufgabentypen zum Thema „Achsensymmetrie“ unterschieden werden:

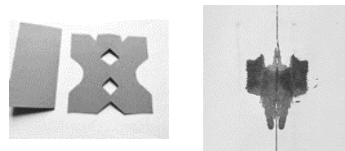
- Achsensymmetrische Figuren herstellen
- Figuren auf Achsensymmetrie untersuchen
- Figuren achsensymmetrisch ergänzen

Achsensymmetrische Figuren herstellen

Bevor Kinder in die Schule kommen, haben sie in ihrer Umwelt bereits vielfältige Erfahrungen mit Symmetrie gemacht (Symmetrien in Tieren, Pflanzen, Gegenständen; Funktionalität der Symmetrie beim Bauen und Spielen). Diese meist intuitiven, wenig systematischen Erfahrungen und Entdeckungen können im Unterricht aufgegriffen, strukturiert, weiterentwickelt und mit Fachwissen und Fachbegriffen verbunden werden (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*).

Ein erster, spielerischer Zugang kann über das Herstellen achsensymmetrischer Figuren geschaffen werden. Die Kinder lernen achsensymmetrische Figuren durch Verfahren wie

- Legen,
- Falten und Schneiden,
- Falten und Klecksen,
- Falten und Prickeln,
- Spiegeln



Copyright Fotos: IQB

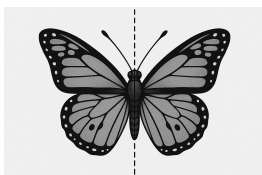
zunächst als Figuren kennen, die aus zwei gleichen, sich genau gegenüberliegenden Figurenhälften bestehen. Sie können auf Grundlage dessen achsensymmetrische Figuren (auch in ihrer Umwelt) erkennen und von nicht-achsensymmetrischen Figuren unterscheiden. Wichtige Fachbegriffe, die hierbei erarbeitet werden sollten, sind „Symmetrieachse/Spiegelachse“, „achsensymmetrisch“, „Achsensymmetrie“ (→ *Kommunizieren*).

Figuren auf Achsensymmetrie untersuchen

Ist ein erster Zugang geschaffen, können die Schülerinnen und Schüler dazu angeregt werden, sich nach und nach von ihrer ganzheitlichen Vorstellung von Achsensymmetrie zu lösen, indem im Unterricht die Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren erarbeitet werden.

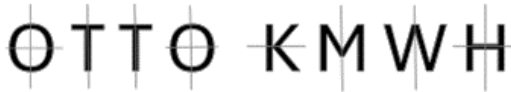
Beim Untersuchen von und Einzeichnen von Achsen in

- Bildern von Tieren, Pflanzen und Gegenständen:



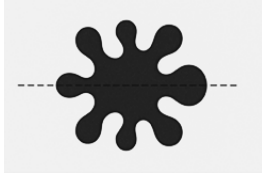
Copyright Grafik: IQB

- Buchstaben



Copyright Grafik: IQB

- Figuren und Formen auf Karopapier oder Geobrettern
- unstrukturierten Figuren und Formen, z. B. „Tintenkleckse“



Copyright Grafik: IQB

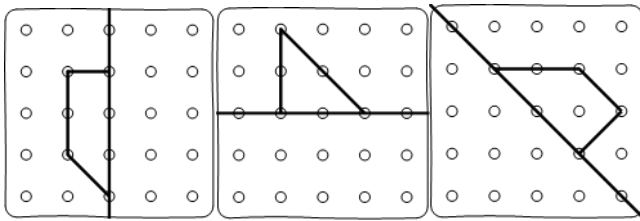
können die Kinder entdecken, dass achsensymmetrische Figuren aus zwei deckungsgleichen Hälften bestehen, die durch eine Achsenspiegelung aufeinander abgebildet werden. Um Symmetrieachsen zu finden, bietet sich neben der Arbeit mit Spiegeln auch das Falten und Schneiden sowie das Falten und Prickeln an, da die Deckungsgleichheit hier handelnd überprüft werden kann. Die Faltkante entspricht der Symmetrieachse, das Prickeln dem Spiegeln.

Wichtig ist dabei, dass neben vertikalen Symmetrieachsen auch horizontale und schräge Achsen im Unterricht thematisiert und eingezeichnet werden. Denn: Den Schülerinnen und Schülern begegnen in ihrer Umwelt (z. B. in Alltagsgegenständen und Buchstaben) meist vertikale Symmetrieachsen, weshalb auch ihre eigenen Produkte (siehe oben) in der Regel nur vertikale Achsen aufweisen. Sie haben daher oft Schwierigkeiten, Figuren mit nur einer horizontalen oder schrägen Symmetrieachse als achsensymmetrisch zu erkennen und/oder alle Symmetrieachsen in eine Figur einzuzichnen (z. B. in das Quadrat alle vier Symmetrieachsen). Es bietet sich daher an, von den Alltagserfahrungen der Kinder auszugehen und handlungsorientierte Zugänge zu schaffen, diese aber im weiteren Unterrichtsverlauf durch abstraktere Kontexte (z. B. verschiedene ebene Figuren) anzureichern.

Letztlich werden die Schülerinnen und Schüler auf diese Weise dazu befähigt, für unterschiedliche Figuren zu begründen, ob diese achsensymmetrisch sind oder nicht (→ *Argumentieren*). Neben den oben aufgeführten Begriffen sind dafür auch Begriffe wie „deckungsgleich“, „Deckungsgleichheit“, „Achsenspiegelung“ und „spiegelverkehrt“ von Bedeutung und müssen mit den Kindern erarbeitet werden (→ *Kommunizieren*). Schritt für Schritt kann dabei eine Ablösung vom materialgebundenen Entscheiden und Begründen angeregt werden, sofern die Schülerinnen und Schüler zuvor genügend Gelegenheiten hatten, durch das Spiegeln und Falten räumliche Vorstellungsbilder von Achsenspiegelungen zu entwickeln (vgl. auch „Räumliches Vorstellungsvermögen“), die Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren kennenzulernen und diese auch zu verbalisieren.

Figuren achsensymmetrisch ergänzen

Eine weitere Aktivität ist das Herstellen von achsensymmetrischen Figuren durch das Spiegeln von Figurenhälften. Dies ist zunächst handelnd am Geobrett und später auch zeichnerisch auf Geobrett-Vorlagen oder Karo-Papier möglich. Da für gewöhnlich zuerst die Eckpunkte einer Figur gespiegelt werden, um diese anschließend mit einem Gummiband zu umspannen oder durch eine gezeichnete Linie miteinander zu verbinden, können die Kinder entdecken, dass jeder Punkt einen Spiegelpunkt hat und beide Punkte den gleichen Abstand zur Symmetrieachse haben (→ *Kommunizieren*).



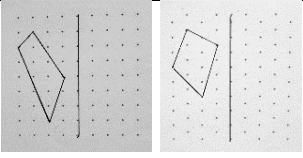
Copyright Grafiken: IQB

Ein Material, das die Schülerinnen und Schüler zu Beginn bei dieser Aktivität unterstützen kann, ist der halbdurchlässige Mira-Spiegel („Zauberspiegel“). Da er es ermöglicht, das Spiegelbild und die Figurenhälfte hinter dem Spiegel gleichzeitig einzusehen und miteinander in Beziehung zu setzen, kann die Figurenhälfte vor dem Spiegel leicht nachgespannt oder nachgezeichnet werden. Die Standfläche des Spiegels entspricht der Symmetrieachse und sollte zu Beginn oder am Ende eingespannt oder eingezeichnet werden.

Der Schwierigkeitsgrad kann unter anderem dadurch erhöht werden, dass die Figur die Achse in keinem Punkt mehr berührt. Ziel ist dann nicht mehr, eine Figurenhälfte zu spiegeln, um eine achsensymmetrische Figur zu erhalten (die Achse liegt innerhalb der Figur), sondern eine komplette Figur zu spiegeln (es entsteht eine zweite Figur).

Weitere Möglichkeiten, um den Schwierigkeitsgrad bei der Spiegelung einer nicht anliegenden Figur zu verändern, können der Tabelle entnommen werden. Sie können auf die Spiegelung anliegender Figuren übertragen werden. Dies ermöglicht die Gestaltung eines differenzierten Unterrichts zum achsensymmetrischen Ergänzen von Figuren.

Variation der Vorgaben (je weniger Vorgaben, desto schwieriger)	
Variation der Lage der Achsen (vertikale Achsen sind leichter als horizontale Achsen, horizontale Achsen sind leichter als schräge Achsen)	
Variation der Spiegelungsrichtung (meist ist nur das Spiegeln von links nach rechts und von oben nach unten vertraut)	
Variation der Anzahl der Achsen (je mehr Achsen, desto schwieriger)	
Variation der Komplexität der Figur (schwieriger wird es, wenn keine Seite der Figur parallel zur Achse liegt und/oder Seiten der Figur schräg zum Untergrund verlaufen)	

Variation der Art des Untergrundes (Punkteraster ist leichter als Karo-Papier, Karo-Papier ist bei vertikalen und horizontalen Achsen leichter als Blanko-Papier)	 <i>Copyright Fotos: IQB</i>
---	--

Symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln

Schülerinnen und Schüler begegnen im Alltag einer Vielzahl an geometrischen Mustern (z. B. in Form von Bordüren an Mützen oder Tassen, in Tapeten oder in Parketten), die sich dadurch auszeichnen, dass sie sich aus einem wiederkehrenden Grundelement das sich regelmäßig wiederholt (z. B. in Bordüren), zusammensetzen. Dem Thema „Symmetrie“ kommt dabei eine besondere Bedeutung zu, da sich in geometrischen Mustern häufig Elemente so wiederholen, dass Symmetrien entstehen wiederholen. Entsprechend müssen die Schülerinnen und Schüler symmetrische Elemente oder Anordnungen erkennen, herstellen und vervollständigen können (vgl. „Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen“), um geometrische Muster fortsetzen und entwickeln zu können. Dafür müssen sie ihr räumliches Vorstellungsvermögen und Wissen über die Eigenschaften der Achsensymmetrie gesichert anwenden können.

Das Fortsetzen und Entwickeln eigener symmetrischer Muster kann im Unterricht sowohl mit Legematerial als auch zeichnerisch erfolgen. Je nachdem, welcher Zugang gewählt wird, ergeben sich teils verschiedene Aufgabenformate, die im Folgenden exemplarisch aufgelistet werden:

Legen symmetrischer Muster

Ein handlungsorientiertes Üben kann mithilfe von eingefärbten Holzwürfeln oder Kärtchen angeleitet werden. Dafür werden bei den Holzwürfeln zum Beispiel zwei Seiten zur Hälfte eingefärbt, zwei Seiten komplett bemalt und zwei Seiten freigelassen oder entsprechende Kärtchen erstellt.



Copyright Grafiken: IQB

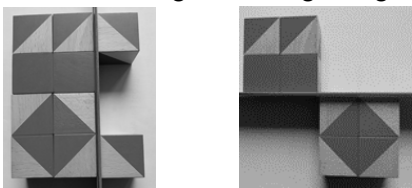
Mögliche Arbeitsaufträge sind:

- Lege das Muster nach und zeichne die Symmetrieachse ein.



Copyright Grafik: IQB

- Vervollständige das angefangene Muster so, dass es achsensymmetrisch ist.



Copyright Fotos: IQB

- Welche Teile fehlen? Fülle die Lücken im Muster so, dass es achsensymmetrisch wird.
- Muster reparieren: Welches Teil musst du drehen, damit das Muster achsensymmetrisch ist?
- Erfinde ein eigenes achsensymmetrisches Muster. Begründe, warum es achsensymmetrisch ist. (→ Argumentieren)

Weitere Möglichkeiten zur Differenzierung ergeben sich dadurch, dass die Anzahl an Würfeln oder Kärtchen und die Art der Einfärbungen variiert werden kann.

Neben Holzwürfeln und Kärtchen können den Kindern auch Formenplättchen zur Verfügung gestellt werden, um eigene achsensymmetrische Muster zu legen (z. B. in dem unten abgebildeten Raster). Ähnlich wie zuvor beschrieben, sollen sie ihre Handlungen dann sprachlich begleiten und am Ende begründen, warum ihr Muster achsensymmetrisch ist (→ *Kommunizieren*, → *Argumentieren*). Das Ergebnis kann mit einem gewöhnlichen Spiegel oder halbdurchlässigen Mira-Spiegel („Zauberspiegel“) kontrolliert werden.



Copyright Grafik: IQB

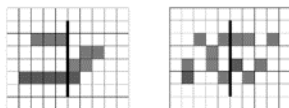
Zeichen symmetrischer Muster

Die Arbeitsaufträge zum Legen symmetrischer Muster können weitestgehend auf das Zeichnen übertragen werden, z. B.

- Ergänze das angefangene Muster achsensymmetrisch.



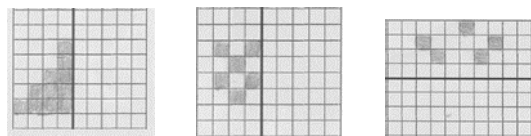
- Vervollständige das angefangene Muster so, dass es achsensymmetrisch ist.



Copyright Grafiken: IQB

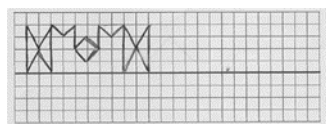
- Muster reparieren: Das Muster soll achsensymmetrisch sein. Finde den Fehler.

Möglichkeiten zur Differenzierung ergeben sich durch die Lage der Achse und die Art des Musters (kompaktere Muster sind leichter zu erfassen als Muster mit Lücken):



Copyright Fotos: IQB

Die Anforderungen an die zeichnerischen Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler sind am höchsten, wenn Muster aus Linien symmetrisch fortgeführt werden müssen.

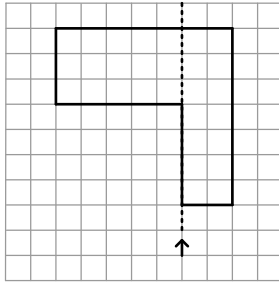


Copyright Foto: IQB

7.4 Aufgaben zu Flächen- und Rauminhalten

Aufgabe 12 in Testheft B

Benni sagt: „Die Linie teilt die Figur in zwei gleich große Flächen.“



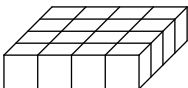
Hat Benni recht? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.



RICHTIG	NEIN wurde angekreuzt UND es wurde eine Begründung gegeben, durch die deutlich wird, dass die Kästchenanzahlen der Flächen nicht übereinstimmen, z. B.: $5 \cdot 3 = 15$ UND $7 \cdot 2 = 14$ (ODER deren Tauschaufgaben). Es sind nicht gleich viele Kästchen. Das eine Feld ist ein Kästchen größer/kleiner.
FALSCH	JA wurde angekreuzt UND/ODER es wurde keine, eine falsche oder eine unvollständige Begründung gegeben, z. B.: Man sieht, dass die nicht gleich groß sind. Die linke Fläche ist größer als die rechte.

Aufgabe 3 in Testheft B



Diese Platte besteht aus _____ kleinen Würfeln.

RICHTIG	16 [kleinen Würfeln]
---------	----------------------

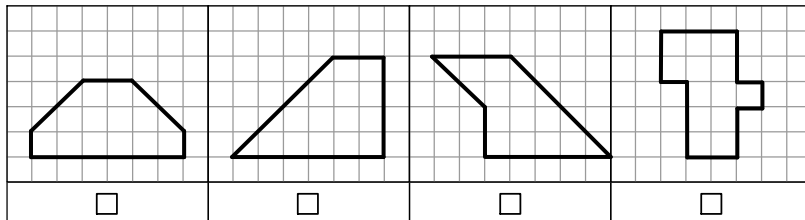
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I

Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Grundlegende Fertigkeiten (0)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen (2.4.c)

Aufgabe 6 in Testheft B

Welche Fläche ist am größten? Kreuze an.



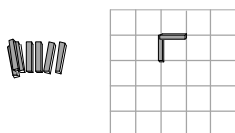
RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

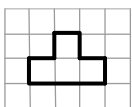
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z.B. systematisch probieren) (1.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen (2.4.a)

Aufgabe 14 in Testheft B

Angelo legt Figuren mit diesen Hölzchen.



Wie viele Hölzchen braucht er, um diese Figur zu legen?



Angelo braucht für diese Figur _____ Hölzchen.

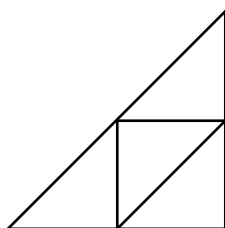
RICHTIG	10
---------	----

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen (2.4.b)

Aufgabe 9 in Testheft C

Dilara sagt: „Die Fläche von Figur A ist genauso groß wie die Fläche von Figur B.“



Figur A



Figur B

Hat Dilara recht? Kreuze an.

☐

ja

☐

nein

Begründe.



RICHTIG	JA wurde angekreuzt UND es wurde eine vollständige Begründung formuliert, die erläutert, dass ein Quadrat der Figur B zwei Dreiecken aus Figur A entspricht, z. B.: Weil zwei Dreiecke ergeben ein Viereck. Wenn man die vier Dreiecke zusammenlegt, werden es genau die zwei Quadrate. Wenn man Figur B in Dreiecke einteilen würde, wären es gleich viele. Sie hat recht, weil wenn man das obere Dreieck runter macht, sind sie gleich. Weil in beiden Figuren sind 2 Quadrate. Beschreibende Zeichnungen gelten auch als richtig.
FALSCH	NEIN wurde angekreuzt UND/ODER es wurde keine, eine falsche oder eine unvollständige Begründung gegeben, z. B.: Ja, weil wenn man von Figur A den Flächeninhalt zusammenklappt, ist das gleich groß wie bei Figur B. Wenn man Figur A mit dem Dreieck umkippt, dann sind sie gleich groß.

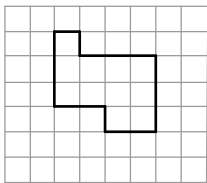
	Sie sind gleich groß, weil ein Viereck die Hälfte von einem Dreieck ist.
--	--

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3); Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen (2.4.a)

Aufgabe 1 in Testheft C

Bestimme die Anzahl der kleinen Quadrate in der Figur.



Es sind _____ kleine Quadrate.

RICHTIG	11
---------	----

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Grundlegende Fertigkeiten (0)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen (2.4.a)

7.4.1 Aufgabenbezogener Kommentar

	Raumvorstellung	Begriffsverständnis	Zeichnen
<u>Aufgabe 2 in Testheft B</u>		x	
<u>Aufgabe 3 in Testheft B</u>	x	x	
<u>Aufgabe 6 in Testheft B</u>		x	
<u>Aufgabe 14 in Testheft B</u>			
<u>Aufgabe 9 in Testheft C</u>	x	x	
<u>Aufgabe 1 in Testheft C</u>		(x)	

Im Mathematikunterricht der Grundschule sollen Schülerinnen und Schüler u. a. Erfahrungen mit dem Vergleichen von ebenen Figuren hinsichtlich ihres Umfangs und Flächeninhalts sowie von geometrischen Körpern hinsichtlich ihres Rauminhalts sammeln (siehe „Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen“ im Rahmen der Leitidee „Raum und Form“). Diese Erfahrungen legen den Grundstein für ein späteres Verständnis der Berechnung von Umfang, Flächen- und Rauminhalt mithilfe von Formeln. Für den Grundschulunterricht bedeutet dies, dass die Schülerinnen und Schüler lernen sollen, den Umfang ebener Figuren mit standardisierten und nicht-standardisierten Messinstrumenten zu messen. Flächeninhalte ebener Figuren vergleichen sie, indem sie die Figuren aufeinanderlegen, in Teilflächen zerlegen oder mit Einheitsflächen auslegen und somit ausmessen. In ähnlicher Weise vergleichen und messen sie den Rauminhalt geometrischer Körper, indem sie diese mit Einheitswürfeln ausfüllen und die Anzahl der benötigten Einheitswürfel bestimmen.

Flächeninhalt

Für eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben 12 in Testheft B, 6 in Testheft B, 1 in Testheft C und 8 in Testheft C müssen die Schülerinnen und Schüler wissen, dass die Flächengröße von ebenen Figuren durch ein Auslegen mit Einheitsflächen, wie z. B. Einheitsquadraten und teils auch Einheitsdreiecken (Aufgabe 6 in Testheft B und Aufgabe 9 in Testheft C), bestimmt werden kann.

Weiterhin müssen sie bei Aufgabe 12 in Testheft C den Ausdruck „gleich groß“ verstehen und wissen, dass zwei Flächen gleichgroß sind, wenn sie mit der gleichen Anzahl an Einheitsflächen lückenlos und überlappungsfrei ausgelegt werden können.

Analog gilt bei Aufgabe 6 in Testheft B, dass die Kinder die Formulierung „am größten“ verstehen müssen und wissen müssen, dass die Fläche am größten ist, für deren Auslegung die meisten Einheitsflächen benötigt werden. Eine besondere Schwierigkeit ist dabei, dass sie erkennen müssen, dass ein Einheitsquadrat in zwei gleichgroße Einheitsdreiecke zerlegt werden kann bzw. zwei gleichgroße Einheitsdreiecke der Größe eines Einheitsquadrates entsprechen, um die Flächeninhalte aller vier Figuren sachgerecht miteinander vergleichen zu können.

Aufgabe 9 in Testheft C vereint diese Anforderungen. Die Schülerinnen und Schüler müssen erkennen, dass Flächen auch dann gleichgroß sind, wenn sie sich in dieselben Teilfiguren zerlegen bzw. aus diesen zusammensetzen lassen. In diesem Fall lässt sich Figur B in die vier Teildreiecke zerlegen, aus denen Figur A besteht, bzw. lassen sich die vier Dreiecke aus Figur A zu den zwei Quadraten aus Figur B zusammensetzen. Hierfür ist auch räumliches Vorstellungsvermögen

erforderlich, um das obere Dreieck gedanklich so auf das untere Dreieck zu setzen, dass ein Quadrat entsteht.

Umfang

Aufgabe 14 in Testheft B setzt voraus, dass die Kinder die Anzahl an Hölzchen bestimmen können, die erforderlich ist, um die gegebene ebene Figur zu legen.

Rauminhalt

Für das Lösen von Aufgabe 3 in Testheft B müssen die Schülerinnen und Schüler wissen, was ein Würfel ist, und die Würfelplatte als ein räumliches Objekt wahrnehmen, das aus mehreren gleich großen Würfeln besteht, deren Anzahl bestimmt werden muss. Um die Anzahl an Würfeln vor allem in den Reihen, die nicht ganz sichtbar sind, bestimmen zu können, ist räumliches Vorstellungsvermögen erforderlich.

7.4.2 Mögliche Schwierigkeiten

Flächeninhalt

Aufgabe 12 in Testheft B

Begründe. <i>☒ Weil eine Fläche 2 Kästchen breit ist und die andere 3 Kästchen breit ist.</i>	Das Kind wählt zwar die größere Fläche, die Entscheidung beruht jedoch auf einer Fehlvorstellung. Die beiden Flächen werden nur in Bezug auf eine Seitenlänge miteinander verglichen.
Begründe. <i>☒ Die eine Hälfte ist länger dafür ^{dünn} kürzer und die andere Hälfte ist kürzer dafür dicker.</i>	Die Entscheidung beruht nur auf der optischen Wahrnehmung der Flächen. Die Kästchen werden nicht gezählt, um die Flächen hinsichtlich ihrer Größe zu vergleichen.
Begründe. <i>☒ Auf der einen Seite sind 15 Würfel und auf der anderen Seite 16</i>	Vermutlich hat sich das Kind beim Bestimmen der Breite der rechten Fläche um Eins verzählt und daher 2 x 8 Kästchen anstatt 2 x 7 Kästchen gerechnet.
Begründe. <i>☒ Er hat es nicht recht, weil das Viereck vor der Linie ist größer als das andere.</i>	Die getroffene Entscheidung wird nicht begründet.

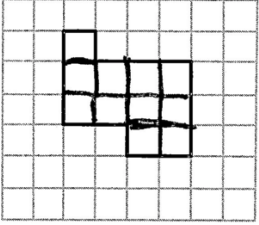
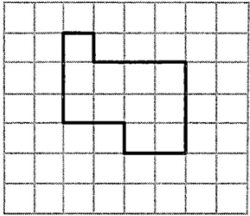
Aufgabe 6 in Testheft B

Für eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabe muss der Begriff „Fläche“ bekannt sein. Andernfalls könnte es sein, dass Antwortoption 4 gewählt wird, da es sich um die „höchste“ Figur handelt. Des Weiteren könnte Antwortoption 4 gewählt werden, falls der Umgang mit Einheitsdreiecken noch nicht beherrscht wird, da diese Figur nur aus Einheitsquadraten besteht. Antwortoption 3 könnte gewählt werden, da die Figur am „breitesten“ ist und daher ganzheitlich als am größten wahrgenommen wird.

Aufgabe 9 in Testheft C

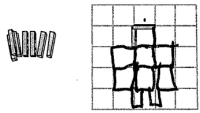
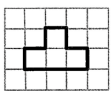
Begründe. ☒ Weil A get mehr in die höe das ander mehr in die breite	Wenn zuvor die falsche Ankreuzentscheidung getroffen wurde (die Flächen sind nicht gleich groß), wurden die beiden Flächen nur bezüglich einer Seitenlänge miteinander verglichen. Wurde richtig angekreuzt, dass die zwei Flächen gleich groß sind, wurde die Gleichheit der Flächengröße nicht ausreichend begründet.
Begründe. ☒ weil Figur A 4 Flächen hat und Figur B 2 Flächen hat.	Die Flächengröße der beiden Figuren wird anhand der Anzahl ihrer Teilflächen verglichen, unabhängig von deren Größe.
Begründe. ☒ Wenn man zum zweiten Bild guckt dann sieht man die gleiche Fläche.	Das Kind scheint zu erkennen, dass beide Flächen gleich groß sind, begründet dies jedoch nicht.

Aufgabe 1 in Testheft C

 Es sind <u>10</u> kleine Quadrate.	Die Anzahl der kleinen Quadrate wurde nicht korrekt bestimmt. Das Kind hat sich wahrscheinlich verzählt.
Bestimme die Anzahl der kleinen Quadrate  in der Figur.  Es sind <u>2</u> kleine Quadrate.	Vermutlich hat das Kind angenommen, dass ein kleines Quadrat aus vier Kästchen (2 x 2 Kästchen) besteht. Die Anzahl der in der Figur enthaltenen 2 x 2-Quadrate wurde korrekt ermittelt. Die Aufgabe jedoch nicht richtig gelöst.

Umfang

Aufgabe 14 in Testheft B

Angelo legt Figuren mit diesen Hölzchen.  Wie viele Hölzchen braucht er, um diese Figur zu legen?  Angelo braucht für diese Figur <u>26</u> Hölzchen.	Das Kind hat die Aufgabenstellung nicht verstanden. Es wurde eine eigene Figur „gelegt“ und die dafür benötigte Anzahl an Hölzchen bestimmt.
Angelo braucht für diese Figur <u>8</u> Hölzchen.	Vermutlich wurde die vorgegebene Figur in dem oberen Kästchengitter korrekt gelegt und dann die Anzahl der zusätzlich benötigten Hölzchen gezählt, d. h. die zwei bereits gelegten Hölzchen wurden nicht mitgezählt.
Angelo braucht für diese Figur <u>9</u> Hölzchen.	Es wurde die Anzahl aller abgebildeten Hölzchen bestimmt.

Rauminhalt

Aufgabe 3 in Testheft B

Diese Platte besteht aus <u>17</u> kleinen Würfeln.	Das Kind könnte sich das verzählt haben – gegebenenfalls wurde die vordere rechte Ecke doppelt gezählt.
Diese Platte besteht aus <u>4</u> kleinen Würfeln.	Es werden nur die vier Würfel gezählt, die vorne oder an der rechten Seite zu sehen sind.
Diese Platte besteht aus <u>20</u> kleinen Würfeln.	Zu den oberen 16 Flächen der kleinen Würfel werden noch die vorderen 4 Flächen (insgesamt 20 kleine Würfel) bzw. die 8 weiteren sichtbaren Flächen (vorne und rechts) addiert (insgesamt 24 kleine Würfel).

7.4.3 Anregungen für den Unterricht

Flächeninhalt

In der Primarstufe soll der Flächeninhalt ebener Figuren noch nicht auf der Grundlage von Formeln berechnet, sondern handlungsorientiert verglichen oder gemessen werden: Zwei Flächen haben den gleichen Flächeninhalt, wenn sie deckungsgleich, zerlegungsgleich oder auslegungsgleich sind.

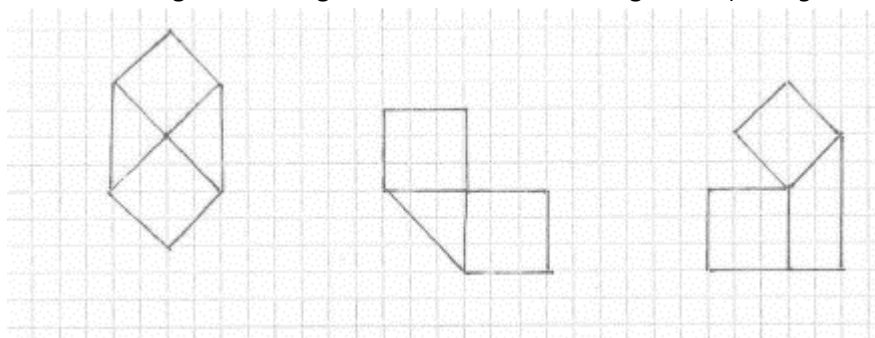
Einen ersten Zugang zum Vergleich der Größe von Flächen bietet ein direkter Vergleich, bei dem die hinsichtlich ihrer Größe zu vergleichenden Flächen aufeinandergelegt werden: Zwei Flächen sind gleich groß, wenn sie so übereinandergelegt werden können, dass sie sich gegenseitig vollständig abdecken, ohne dass von einer der beiden Flächen etwas übersteht („deckungsgleich“).

- Passt mein Arbeitsblatt in eine Klarsichthülle?
- Ist das T-Shirt in Größe M tatsächlich größer als das gleiche T-Shirt in Größe S?
- Wer hat die größere Handfläche?

Da ein direkter Vergleich jedoch nur selten möglich ist (z. B. wenn die eine Figur vollständig in die andere Figur passt oder andersherum), müssen weitere Vorgehensweisen erarbeitet werden, um Flächeninhalte miteinander vergleichen und bestimmen zu können.

Entsprechend sollte erarbeitet werden, dass der Flächeninhalt (komplexerer) Figuren u. a. auch dadurch verglichen werden kann, dass die Figuren jeweils in (gleiche) Teilflächen zerlegt werden, die dann miteinander verglichen und jeweils gezählt werden, oder die eine Figur so in Teilflächen zerlegt wird, dass aus den Teilflächen (annähernd) die andere Figur zusammengesetzt werden kann („zerlegungsgleich“). Damit die Schülerinnen und Schüler diese Strategie verständnisorientiert anwenden können, müssen sie verstanden haben, dass die Teile, in die eine Figur zerlegt wird, in der Summe denselben Flächeninhalt besitzen wie die Ausgangsfigur.

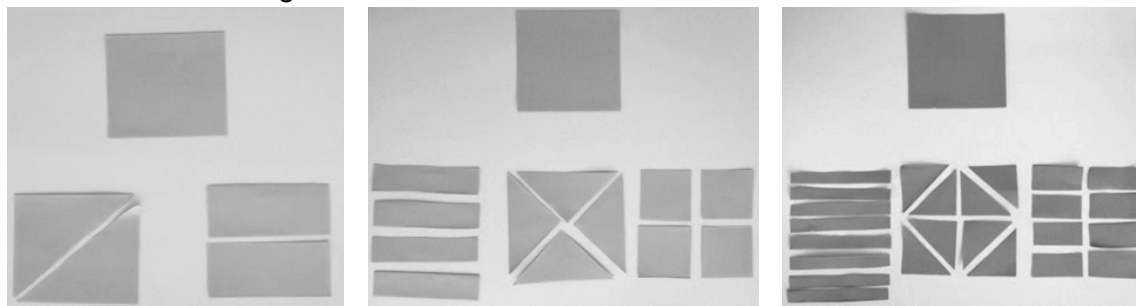
- Welche Figur hat den größten Flächeninhalt? Begründe. (→ Argumentieren)



Copyright Foto: IQB

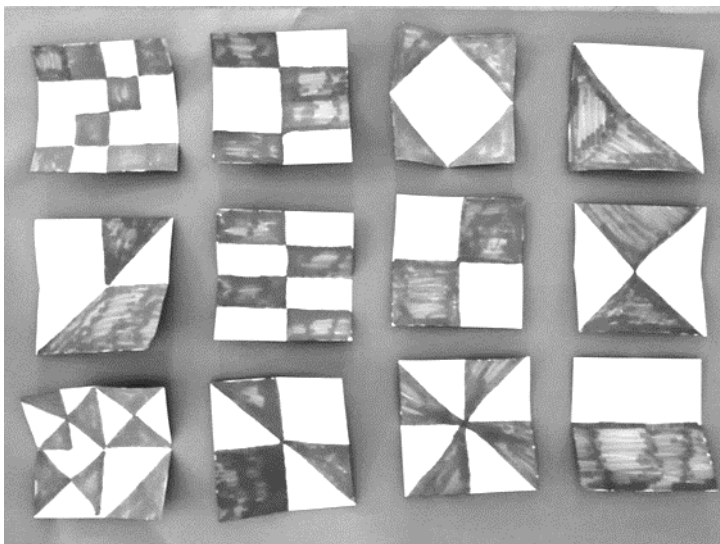
Falten und Schneiden kann in diesem Kontext dazu beitragen, dass Schülerinnen und Schüler lernen, welche Teilflächen trotz unterschiedlicher Form den gleichen Flächeninhalten haben.

- Falte oder zerschneide ein Quadrat so, dass es in gleichgroße Teile zerlegt wird. Finde verschiedene Möglichkeiten.



Copyright Fotos: IQB

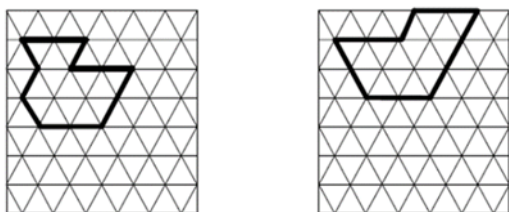
- Nimm Notizzettel aus dem Zettelkasten. Färbe immer eine Hälfte davon. Finde möglichst viele verschiedene Möglichkeiten. Falten kann dir dabei helfen.



Copyright Foto: IQB

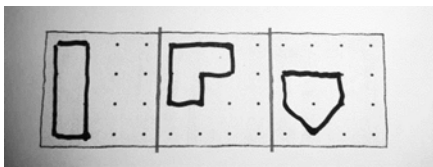
Des Weiteren sollte in der Grundschule thematisiert werden, dass die Größe von Flächen auch durch ein Auslegen mit Einheitsflächen verglichen und bestimmt werden kann („auslegungsgleich“).

- Auslegen/Ausmessen von Flächen mit nicht-standardisierten Vergleichsobjekten: Die Kinder können die Größe einer Tischfläche z. B. mit den eigenen Handflächen ausmessen. Diese Aktivität ist v. a. für den Einstieg in die Thematik geeignet, um die Notwendigkeit von standardisierten Vergleichsobjekten und genauen Auslege- und Abtragevorschriften (lückenlos und überschneidungsfreies Legen) zu erarbeiten.
- Vergleich der Größe verschiedener Figuren mithilfe der Teile eines Tangrams: Die Kinder können entdecken, dass auch Figuren, die unterschiedlich aussehen, denselben Flächeninhalt haben können, wenn sie sich mit denselben Teilen eines Tangrams lückenlos und ohne Überschneidungen auslegen lassen.
- Spannen verschiedener Figuren auf dem Geobrett: Die Kinder können die Flächeninhalte von verschiedenen gespannten Figuren durch ein Auszählen der von den Figuren eingeschlossenen Einheitsquadrate bestimmen. Schwieriger wird es, wenn neben ganzen Einheitsquadraten auch Einheitsdreiecke berücksichtigt werden müssen.
- Zeichnen verschiedener Figuren auf Kästchenpapier, Punkterastern, Rastern aus gleichseitigen Dreiecken, Rauten usw.: Die Kinder lernen, die Flächeninhalte verschiedener gezeichneter Figuren durch das Auszählen der von den Figuren eingeschlossenen Einheitsflächen (z. B. Dreiecke, Quadrate, Sechsecke usw.) zu bestimmen.



Copyright Grafiken: IQB

- Spannen flächeninhaltsgleicher Figuren auf dem Geobrett oder Zeichnen flächeninhaltsgleicher Figuren auf Kästchenpapier usw.: Die Kinder können begründen, dass Flächeninhaltsgleichheit nicht automatisch mit einer Deckungsgleichheit einhergehen muss (→ Argumentieren).



Copyright Foto: IQB

Umfang

Unter dem Umfang einer ebenen Figur versteht man die gesamte Länge all ihrer Begrenzungslinie. Um den Kindern ein Verständnis dafür, sowie den Unterschied zwischen „Umfang“ und „Flächeninhalt“, zu ermöglichen, ist es sinnvoll, den Umfang ebener Figuren zunächst handelnd erfahrbar zu machen.

Handelnde Erfahrungen können im Unterricht durch eine Vielzahl unterschiedlicher Übungen realisiert werden sowie durch verschiedene Arbeitsmittel unterstützt werden.

- Nachfahren oder Nachmalen der Begrenzungslinie mit dem Finger bzw. einem Stift
- Ausschneiden von Figuren entlang der Begrenzungslinie
- Abschreiten der Begrenzungslinie von großen Flächen (z. B. Fußballplatz)
- Nachlegen der Begrenzungslinie von Figuren mit Schnüren oder Fäden
- Spannen der Begrenzungslinie von Figuren am Geobrett
- Nachlegen der Begrenzungslinie von Figuren mit Streichholzern oder Stäbchen
- Zeichnen der Begrenzungslinie von Figuren auf Karo-Papier

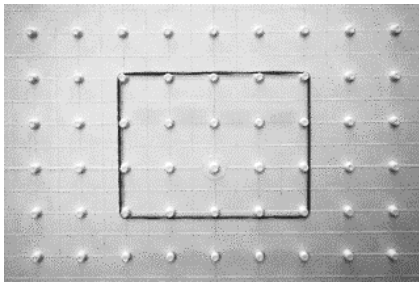
Schnüre und Fäden

Durch den Arbeitsauftrag, mit gleich langen Schnüren oder Fäden verschiedene Figuren zu legen, können die Schülerinnen und Schüler zu der Erkenntnis gelangen, dass umfangleiche Figuren nicht zwingend deckungsgleich sein müssen (→ *Kommunizieren*).

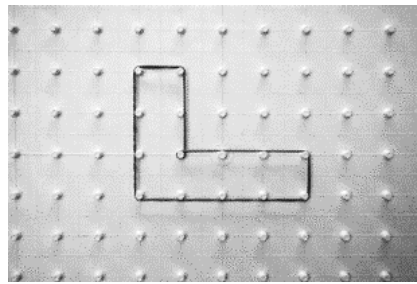
Weiter lässt sich auch der Umfang verschiedener Figuren mithilfe von Schnüren oder Fäden vergleichen. Dafür legen die Kinder die Figuren jeweils mit einer Schnur oder einem Faden nach (ggf. werden für die einzelnen Seiten der Figuren separate Schnüre oder Fäden verwendet). Im nächsten Schritt wird für jede Figur die Gesamtlänge der benötigten Schnur oder des benötigten Fadens ermittelt. Die Schülerinnen und Schüler erfahren somit, dass der Umfang stets eine Länge ist und zum Messen des Umfangs jeweils alle Seitenbegrenzungslinien zusammengekommen werden müssen. Die längste Schnur oder der längste Faden steht stellvertretend für die Figur mit dem größten Umfang. Die Ergebnisse können wie folgt verbalisiert werden: „Die Begrenzungslinie/ die Umrandung/der Umfang von Figur A ist länger als/kürzer als/genauso lang wie bei Figur B“ (→ *Kommunizieren*).

Geobrett

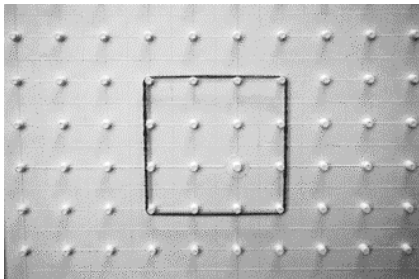
Bei der Bestimmung des Umfangs einer Figur auf dem Geobrett dient der Abstand zwischen zwei direkt benachbarten Stiften als Maßeinheit. Die Schülerinnen und Schüler ermitteln den Umfang durch das Abzählen dieser Abstände. Dabei ist zu beachten, dass der Abstand zwischen zwei diagonal benachbarten Stiften größer ist als bei zwei Stiften, die vertikal oder horizontal nebeneinanderliegen. Da dies einen Vergleich von Figuren mit und ohne diagonal verlaufenden Seiten erschwert, sollte darauf geachtet werden, dass zu Beginn entweder nur Figuren ohne diagonal verlaufende Seiten miteinander verglichen werden oder die Figuren die gleiche Anzahl an diagonal verlaufenden Seiten aufweisen. Zu einem späteren Zeitpunkt können diagonal verlaufende Seiten zur Differenzierung eingesetzt werden.



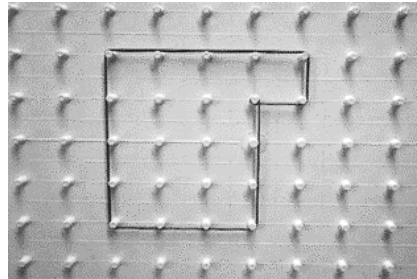
Figur A



Figur B



Figur C

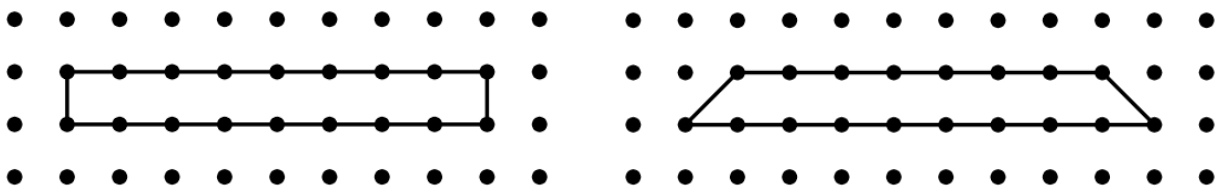


Figur D

Copyright Fotos: IQB

Analog zum Beispiel „Schnüre und Fäden“ kann auch hier auf den Unterschied zwischen Umfang und Flächeninhalt verwiesen werden. Die Erkenntnis, dass umfanggleiche Figuren nicht zwingend deckungsgleich sein müssen, kann mithilfe des Geobrettes um die Erkenntnis erweitert werden, dass umfanggleiche Figuren unterschiedliche Flächeninhalte haben können. In dem vorherigen Beispiel wird dies anhand von Figur A und B deutlich: Die Figuren haben zwar den gleichen Umfang (14 Abstände), aber unterschiedliche Flächeninhalte (A: 12 Kästchen, B: 6 Kästchen). Andersherum können die Kinder entdecken, dass Figuren mit dem gleichen Flächeninhalt verschiedene Umfänge haben können. Mögliche Impulse können die folgenden sein:

- Spanne verschiedene Figuren mit einem Umfang von 10 Abständen und bestimme die Flächeninhalte. Was fällt dir auf? (→ *Kommunizieren*)
- Spanne verschiedene Figuren, die 8 Kästchen umschließen und bestimme den Umfang. Was fällt dir auf? (→ *Kommunizieren*)
- Peter spannt eine Figur, die 8 Abstände lang und 1 Abstand hoch ist. Direkt darunter spannt er eine Figur mit zwei schräg verlaufenden Seiten (s. Bild). Peter sagt: „Sowohl die Größe der Fläche als auch der Umfang bleiben gleich.“ Hat er recht? (→ *Argumentieren*)

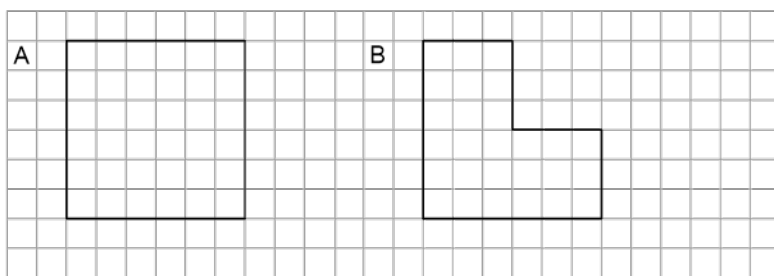


Copyright Grafiken: IQB

Streichhölzer, Stäbchen oder Karopapier

Mithilfe von Streichhölzern oder Stäbchen können Schülerinnen und Schüler verschiedene Figuren legen und diese im Anschluss daran hinsichtlich ihrer Umfänge vergleichen. Dazu können je Figur die benötigten Stäbchen entweder gezählt oder zu Strecken aneinandergelegt und dadurch direkt miteinander verglichen werden (siehe auch Beispiel „Schnüre oder Fäden“).

Haben die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung des Umfangs durchdrungen, können sie dazu animiert werden, aus einer bestimmten Anzahl an Stäbchen oder Streichhölzern (z. B. 24 Stück) verschiedene Figuren zu legen: „Findet verschiedene Figuren, die man aus genau 24 Stäbchen legen kann. Zeichnet sie anschließend auf.“



Copyright Grafik: IQB

Auch hier ist die Erkenntnis möglich, dass Figuren zwar umfanggleich sein können, dabei aber nicht zwingend deckungsgleich sein bzw. denselben Flächeninhalt haben müssen.

Alltagsbezogene Unterrichtsbeispiele sind die folgenden:

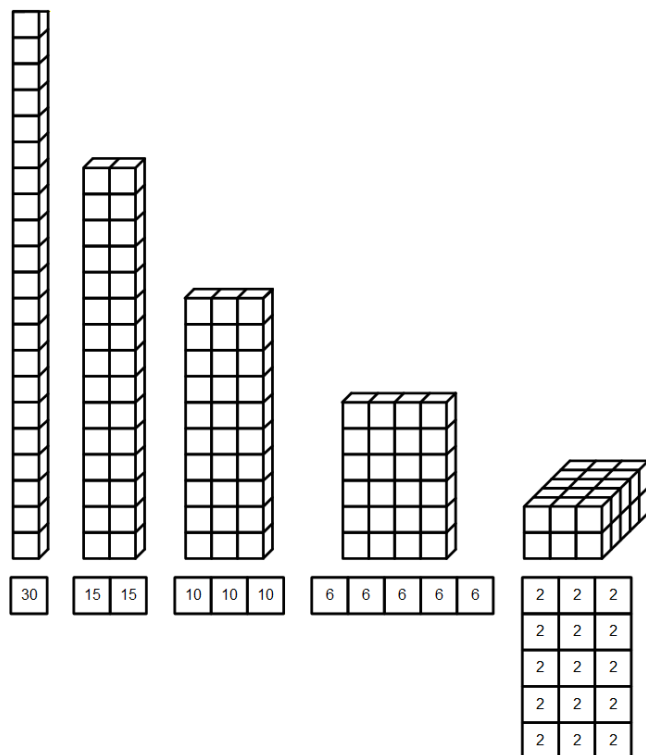
- Wir umzäunen die Koppel mit Pfosten und Balken. Wie viele Balken und Pfosten brauchen wir?
- Wir umranden ein Blumenbeet in unserem Schulgarten mit Pflastersteinen. Wie viele Pflastersteine brauchen wir?

Rauminhalt

Wie der Flächeninhalt ebener Figuren wird auch der Rauminhalt geometrischer Körper im Mathematikunterricht der Grundschule noch nicht auf Grundlage von Formeln berechnet, sondern handlungsorientiert untersucht. Zwei Objekte haben z. B. den gleichen Rauminhalt, wenn sie „mit der gleichen Anzahl von Einheitskörpern (Würfel, Quadern) lückenlos ausgefüllt oder gebaut werden können“ (Franke, 2007, S. 147).

Bauen

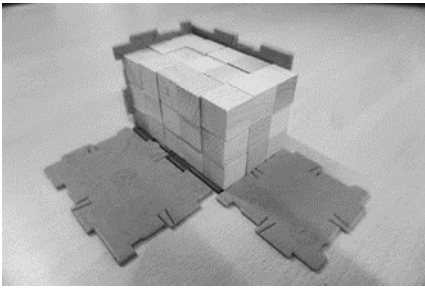
Eine mögliche Aufgabe ist hier, dass die Schülerinnen und Schüler aus einer vorgegebenen Anzahl an Einheitswürfeln verschiedene Quader erzeugen sollen. So kann die Gleichheit des Rauminhaltes trotz unterschiedlichem Aussehen der Bauwerke thematisiert werden. Wichtig ist, dass all diese Aktivitäten immer sprachlich begleitet werden, z. B.: „Mein Quader besteht aus 30 Einheitswürfeln. Er ist 6 Würfel hoch, 5 Würfel breit und 1 Würfel tief“ (→ *Kommunizieren*).



Copyright Grafik: IQB

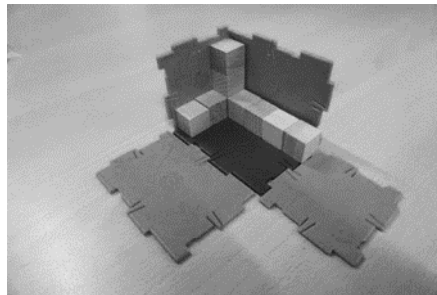
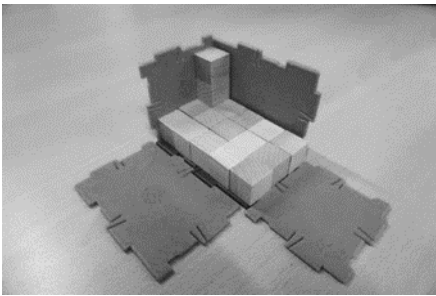
Ausfüllen mit Einheitskörpern

Die Rauminhalte unterschiedlicher Körper können durch ein Ausfüllen mit Einheitskörpern, wie z. B. Einheitswürfeln, bestimmt und verglichen werden. Dafür werden die Körper schichtweise ausgefüllt und es wird jeweils die Anzahl an Einheitskörpern gezählt.



Copyright Foto: IQB

Haben die Schülerinnen und Schüler erste Erfahrungen mit dem Ausfüllen von Körpern mit Einheitskörpern gemacht, können ihnen auch nur teilweise ausgefüllte Körper präsentiert werden und sie dazu aufgefordert werden, die Anzahl an Einheitskörpern rechnerisch zu bestimmen. Dies stellt eine anschauliche Vorarbeit für ein späteres Verständnis der Formel zur Volumenberechnung dar.



Copyright Foto: IQB

8. Literaturverzeichnis

- Blum, W. (2006). Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14–32); Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie: In der Grundschule*. Springer Spektrum.
- Helmke, A. (2006). Was wissen wir über guten Unterricht? *Pädagogik*, 2, 42-45.
- Hengartner, E., Hirt, U., Wälti, B., Primarschulteam Lupsingen (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Klett und Balmer.
- Hengartner, E., Hirt, U., & Wälti, B. (2010). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht* (2. aktualisierte und erweiterte Auflage). Zug, Klett und Balmer Verlag.
- Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2013). Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) in der Fassung vom 11.02.2013. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/de/bista/entwicklung/definition/>)
- KMK (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss vom 15.10.2004. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/de/bista/entwicklung/definition/> und https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23_-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf)
- Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel: Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. Springer-Verlag.
- Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik*. (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 40 (10), 34-37.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120-141). Weinheim: Beltz.
- Reiss, K., Roppelt, A., Haag, N., Pant, H. A. & Köller, O. (2012). Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S. 72-84). Münster: Waxmann.
- Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Klett Verlag.
- Walther, G., Heuvel-Panhuizen, M. V. D., Granzer, D., & Köller, O. (2012). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.

Wienhues, I., Graf, L. M., Häsel-Weide, U. (2022). Unterrichtsmaterial. Förderbaustein Grundvorstellungen an Kontexten entwickeln: Addition und Subtraktion.

Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Weinheim: Beltz.

9. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1. Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.	3
Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben, siehe S. 14 des Kompetenzstufenmodells in der Fassung vom 11.02.2013 unter https://www.iqb.hu-berlin.de/de/bista/entwicklung/definition/	4
Abbildung 3. Aufgabe „Zahlengröße“, KERMIT-3 Mathematik 2016	5
Abbildung 4. Aufgabe „Kaugummis teilen“, KERMIT-3 Mathematik 2023.....	6
Abbildung 5. Aufgabe „24 Kinder verbinden“, KERMIT-3 Mathematik 2023.....	6

10. Webseiten

Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik, PIKAS. (o. D.a). *Aufgabenstellung kompakt „Zahlen darstellen“*. Zuletzt abgerufen am 17.02.2026, von [Aufgabenstellung kompakt "Zahlen darstellen" | pikas-mi.dzlm.de](https://pikas-mi.dzlm.de)

Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik, PIKAS (o. D.b). *Inter-Netzzo*. Zuletzt abgerufen am 23.02.2026, von <https://pikas.dzlm.de/fortbildung/gute-aufgaben/75-inter-netzzo>

Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik, PIKAS (o. D.c). *Schriftliches Addieren mit Ziffernkarten*. Zuletzt abgerufen am 17.02.2026, von <https://pikas.dzlm.de/unterricht/gute-aufgaben/zahlen-und-operationen/schriftliches-addieren-mit-ziffernkarten>

Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik, PIKAS (o. D.e). *Bearbeitungshilfen für Sachaufgaben*. Zuletzt abgerufen am 17.02.2026, von https://pikas-digi.dzlm.de/sites/pikasdq/files/uploads/Unterricht/Webunterricht/bearbeitungshilfen_sachaufgaben.pdf

Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik, PIKAS (o. D.f). *Sachrechenprobleme lösen*. Zuletzt abgerufen am 17.02.2026, von <https://pikas.dzlm.de/unterricht/größen-und-messen/sachsituationen/sachrechenprobleme-lösen>

Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik, PIKAS (o. D.g). *Sachrechenprobleme prüfen und hinterfragen*. Zuletzt abgerufen am 17.02.2026, von <https://pikas.dzlm.de/node/725>

Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik, primakom (o. D.). *Hintergrund*. Zuletzt abgerufen am 25.02.2026, von <https://primakom.dzlm.de/inhalte/raum-und-form/raumvorstellung/hintergrund>

Universität Potsdam, Didaktik der Mathematik (2021, 16. Dezember). *Klötzchen-App*. Zuletzt abgerufen am 11.02.2026, von <https://www.uni-potsdam.de/de/mathematikdidaktik/forschung-projekte/kloetzchen-app>

Universität Potsdam. Digitales Lernen Grundschule. (o. D.). Klipp-Klapp-App. Zuletzt abgerufen am 02.03.2026 von <https://dlgs.uni-potsdam.de/apps/klipp-klapp>

11. Anhang

Nummerierung der einzelnen Kompetenzen

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der KMK vom 15.10.2004⁵ sind die einzelnen Kompetenzen nicht durchnummeriert aufgelistet. Aus diesem Grunde findet sich zur Erleichterung der praktischen Arbeit mit dem Material in Teil III hier eine nummerierte Auflistung, die optional verwendet und separat ausgedruckt werden kann.

Ergänzung der allgemeinen mathematischen Kompetenz *Technische Grundfertigkeiten*

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der KMK vom 15.10.2004 ist die allgemeine mathematische Kompetenz *Technische Grundfertigkeiten* noch nicht enthalten. Eine inhaltlich ähnlich beschriebene allgemeine mathematische Kompetenz findet sich allerdings bereits bei den Bildungsstandards für den Sekundarbereich („Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“). Mittlerweile wurden im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik auch für den Primarbereich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der *Technischen Grundfertigkeiten* ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (vgl. Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ vom 29.10.2008 unter

<https://www.igb.hu-berlin.de/bista/ksm/>

Im Gegensatz zu den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen ist diese Dimension allerdings dort nicht näher aufgeschlüsselt. Mit Bezug auf Winkelmann & Robitzsch (2009) lassen sich (analog zu den Standards für den Sekundarbereich) folgende Aspekte als technische Grundfertigkeiten subsumieren:

- Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen
- symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt
- mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen

Literatur

Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Beltz.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel.

⁵ Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich wurden 2004 verabschiedet und 2022 weiterentwickelt. Die bisher vorliegenden Kompetenzstufenmodelle, auf die sich das vorliegende didaktische Material bezieht, wurden auf Basis der Bildungsstandards von 2004 entwickelt. Mit der Normierung neu entwickelter Testaufgaben nach den Bildungsstandards von 2022 werden ab 2027 neue Kompetenzstufenmodelle vorliegen.

Katalog der allgemeinen mathematischen Kompetenzen	
Kennung	Beschreibung
A-0	Technische Grundfertigkeiten
	• Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen • symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt • mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen
A-1	Problemlösen
A-1.1	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden
A-1.2	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)
A-1.3	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen
A-2	Kommunizieren
A-2.1	eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren
A-2.2	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden
A-2.3	Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten
A-3	Argumentieren
A-3.1	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen
A-3.2	mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln
A-3.3	Begründungen suchen und nachvollziehen
A-4	Modellieren
A-4.1	Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen
A-4.2	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen
A-4.3	zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren
A-5	Darstellen
A-5.1	für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen
A-5.2	eine Darstellung in eine andere übertragen
A-5.3	Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten

Katalog der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen	
Kennung	Beschreibung
I-1	Zahlen und Operationen
I-1.1	Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen
I-1.1.a	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen
I-1.1.b	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen
I-1.1.c	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden)
I-1.2	Rechenoperationen verstehen und beherrschen
I-1.2.a	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen
I-1.2.b	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen
I-1.2.c	mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden
I-1.2.d	verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren
I-1.2.e	Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen
I-1.2.f	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden
I-1.2.g	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren
I-1.3	in Kontexten rechnen
I-1.3.a	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben
I-1.3.b	das Ergebnis auf Plausibilität prüfen
I-1.3.c	bei Sachaufgaben entscheiden, ob eine Überschlagsrechnung ausreicht oder ein genaues Ergebnis nötig ist
I-1.3.d	Sachaufgaben systematisch variieren
I-1.3.e	einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen
I-2	Raum und Form
I-2.1	sich im Raum orientieren
I-2.1.a	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen
I-2.1.b	räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten)
I-2.1.c	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen)

I-2.2	geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen
I-2.2.a	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen
I-2.2.b	Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen
I-2.2.c	Modelle von Körpern und ebenen Figuren herstellen und untersuchen (Bauen, Legen, Zerlegen, Zusammenfügen, Ausschneiden, Falten...)
I-2.2.d	Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen
I-2.3	Einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen
I-2.3.a	ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern)
I-2.3.b	Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen
I-2.3.c	symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln
I-2.4	Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen
I-2.4.a	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen
I-2.4.b	Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen
I-2.4.c	Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen
I-3	Muster und Strukturen
I-3.1	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen
I-3.1.a	strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen
I-3.1.b	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen
I-3.1.c	arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben
I-3.2	funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen
I-3.2.a	funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen
I-3.2.b	funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen
I-3.2.c	einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen
I-4	Größen und Messen
I-4.1	Größenvorstellungen besitzen
I-4.1.a	Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte kennen
I-4.1.b	Größen vergleichen, messen und schätzen
I-4.1.c	Repräsentanten für Standardeinheiten kennen, die im Alltag wichtig sind
I-4.1.d	Größenangaben in unterschiedlichen Schreibweisen darstellen (umwandeln)
I-4.1.e	im Alltag gebräuchliche einfache Bruchzahlen im Zusammenhang mit Größen kennen und verstehen
I-4.2	mit Größen in Sachsituationen umgehen
I-4.2.a	mit geeigneten Einheiten und unterschiedlichen Messgeräten sachgerecht messen

I-4.2.b	wichtige Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt zum Lösen von Sachproblemen heranziehen
I-4.2.c	in Sachsituationen angemessen mit Näherungswerten rechnen, dabei Größen begründet schätzen
I-4.2.d	Sachaufgaben mit Größen lösen
I-5	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit
I-5.1	Daten erfassen und darstellen
I-5.1.a	in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen
I-5.1.b	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen
I-5.2	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen
I-5.2.a	Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich)
I-5.2.b	Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen

Übersicht der Aufgabenmerkmale im Basismodul

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁶	Kompetenzstufe
Aufgabe 1	Zahlen und Operationen	Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.)	I	I
Aufgabe 2	Zahlen und Operationen	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a)	II	II
Aufgabe 3	Zahlen und Operationen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)	einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen (1.3.e)	II	IV
Aufgabe 4	Zahlen und Operationen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren (1.2.g)	II	III
Aufgabe 5	Größen und Messen	- Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen - symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt - mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen (0)	Größenangaben in unterschiedlichen Schreibweisen darstellen (umwandeln) (4.1.d)	I	I

⁶ AFB: Anforderungsbereich I = Reproduzieren, II = Zusammenhänge herstellen, III = Verallgemeinern und Reflektieren

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁶	Kompetenzstufe
Aufgabe 6	Größen Messen und	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Größen vergleichen, messen und schätzen (4.1.b); mit geeigneten Einheiten und unterschiedlichen Messgeräten sachgerecht messen (4.2.a)	I	I
Aufgabe 7	Größen Messen und	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)	Größenangaben in unterschiedlichen Schreibweisen darstellen (umwandeln) (4.1.d)	II	II
Aufgabe 8	Größen Messen und	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Größen vergleichen, messen und schätzen (4.1.b)	II	III
Aufgabe 9	Größen Messen und	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3); Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)	wichtige Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt zum Lösen von Sachproblemen heranziehen (4.2.b)	III	IV
Aufgabe 10	Größen Messen und	• Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen • symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt • mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen (0)	Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte kennen (4.1.a)	I	I

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁶	Kompetenzstufe
Aufgabe 11	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) (5.2.a)	II	II
Aufgabe 12	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)	in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen (5.1.a); aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)	I	I
Aufgabe 13	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)	Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen (5.2.b)	III	III
Aufgabe 14	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen (5.2)	II	IV
Aufgabe 15	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1); Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)	II	II
Aufgabe 16	Muster und Strukturen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3);	funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a)	II	I

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁶	Kompetenzstufe
		Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)			
Aufgabe 17	Muster und Strukturen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	II	II
Aufgabe 18	Muster und Strukturen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	I	III
Aufgabe 19	Muster und Strukturen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	II	II
Aufgabe 20	Muster und Strukturen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)	II	IV
Aufgabe 21	Raum und Form	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten) (2.1.b)	II	II
Aufgabe 22	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten) (2.1.b)	II	III

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁶	Kompetenzstufe
Aufgabe 23	Raum und Form	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	II	V
Aufgabe 24	Raum und Form	Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten (5.3)	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	IV

Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul A (Zahlen und Operationen, L1)

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁷	Kompetenzstufe
Aufgabe 1	Zahlen und Operationen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a)	II	I
Aufgabe 2	Zahlen und Operationen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	I	I
Aufgabe 3	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.f)	I	II
Aufgabe 4	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	II	II
Aufgabe 5	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c)	I	I
Aufgabe 6	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.f)	II	III

⁷ AFB: Anforderungsbereich I = Reproduzieren, II = Zusammenhänge herstellen, III = Verallgemeinern und Reflektieren

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁷	Kompetenzstufe
Aufgabe 7	Zahlen und Operationen	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a)	II	I
Aufgabe 8	Zahlen und Operationen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b)	I	I
Aufgabe 9	Zahlen und Operationen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1); Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)	das Ergebnis auf Plausibilität prüfen (1.3.b); Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte kennen (4.1.a)	III	IV
Aufgabe 10	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)	Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen (1.2.e)	II	III
Aufgabe 11	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren (1.2.g)	II	III
Aufgabe 12	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a); einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen (1.3.e);	II	IV

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁷	Kompetenzstufe
			Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)		
Aufgabe 13	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a)	I	I

Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul B (Zahlen und Operationen, L1)

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁸	Kompetenzstufe
Aufgabe 1	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c)	II	I
Aufgabe 2	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c)	I	I
Aufgabe 3	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a)	I	I
Aufgabe 4	Zahlen und Operationen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	I	II
Aufgabe 5	Zahlen und Operationen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren (1.2.g)	II	III
Aufgabe 6	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	II	III

⁸ AFB: Anforderungsbereich I = Reproduzieren, II = Zusammenhänge herstellen, III = Verallgemeinern und Reflektieren

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁸	Kompetenz- stufe
Aufgabe 7	Zahlen und Operationen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a)	II	IV
Aufgabe 8	Zahlen und Operationen	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)	das Ergebnis auf Plausibilität prüfen (1.3.b)	III	IV
Aufgabe 9	Zahlen und Operationen	eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)	verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren (1.2.d)	II	IV
Aufgabe 10	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a); einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen (1.3.e); Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)	II	V
Aufgabe 11	Zahlen und Operationen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2); mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen (1.3.e)	II	V
Aufgabe 12	Zahlen und Operationen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3); eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)	Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen (1.2.e); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	III	III

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁸	Kompetenz- stufe
Aufgabe 13	Zahlen und Operationen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.f)	II	III
Aufgabe 14	Zahlen und Operationen	eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)	verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren (1.2.d)	II	II

Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul A (*Raum und Form*, L2)

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁹	Kompetenzstufe
Aufgabe 1	Raum und Form	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen (2.2.b)	I	I
Aufgabe 2	Raum und Form	eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)	Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)	II	I
Aufgabe 3	Raum und Form	- Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen - symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt - mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen (0)	Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen (2.4.c)	I	I
Aufgabe 4	Raum und Form	- Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen - symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt - mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen (0)	Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen (2.2.d)	I	I

⁹ AFB: Anforderungsbereich I = Reproduzieren, II = Zusammenhänge herstellen, III = Verallgemeinern und Reflektieren

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁹	Kompetenzstufe
Aufgabe 5	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	III
Aufgabe 6	Raum und Form	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen (2.4.a)	II	II
Aufgabe 7	Raum und Form	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	II	II
Aufgabe 8	Raum und Form	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1); mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln (3.2)	symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln (2.3.c)	II	II
Aufgabe 9	Raum und Form	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)	II	III
Aufgabe 10	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern) (2.3.a)	II	III
Aufgabe 11	Raum und Form	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen (2.2.b)	I	II

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁹	Kompetenzstufe
Aufgabe 12	Raum und Form	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2); Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen (2.4.a)	III	IV
Aufgabe 13	Raum und Form	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2); mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	III	IV
Aufgabe 14	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen (2.4.b)	II	I

Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul B (*Raum und Form*, L2)

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ¹⁰	Kompetenzstufe
Aufgabe 1	Raum und Form	- Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen - symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt - mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen (0)	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen (2.4.a)	I	I
Aufgabe 2	Raum und Form	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)	II	I
Aufgabe 3	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	I
Aufgabe 4	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen (2.4.c)	II	I
Aufgabe 5	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a)	II	II

¹⁰ AFB: Anforderungsbereich I = Reproduzieren, II = Zusammenhänge herstellen, III = Verallgemeinern und Reflektieren

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ¹⁰	Kompetenzstufe
Aufgabe 6	Raum und Form	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)	Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)	II	II
Aufgabe 7	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern) (2.3.a)	II	III
Aufgabe 8	Raum und Form	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)	symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln (2.3.c)	II	III
Aufgabe 9	Raum und Form	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3); Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen (2.4.a)	III	IV
Aufgabe 10	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1) mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a); Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen (2.2.b)	I	V
Aufgabe 11	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen (2.2.d); Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)	II	V
Aufgabe 12	Raum und Form	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	II	V

Aufgabe	Leitidee	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ¹⁰	Kompetenzstufe
Aufgabe 13	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	IV
Aufgabe 14	Raum und Form	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	II	III