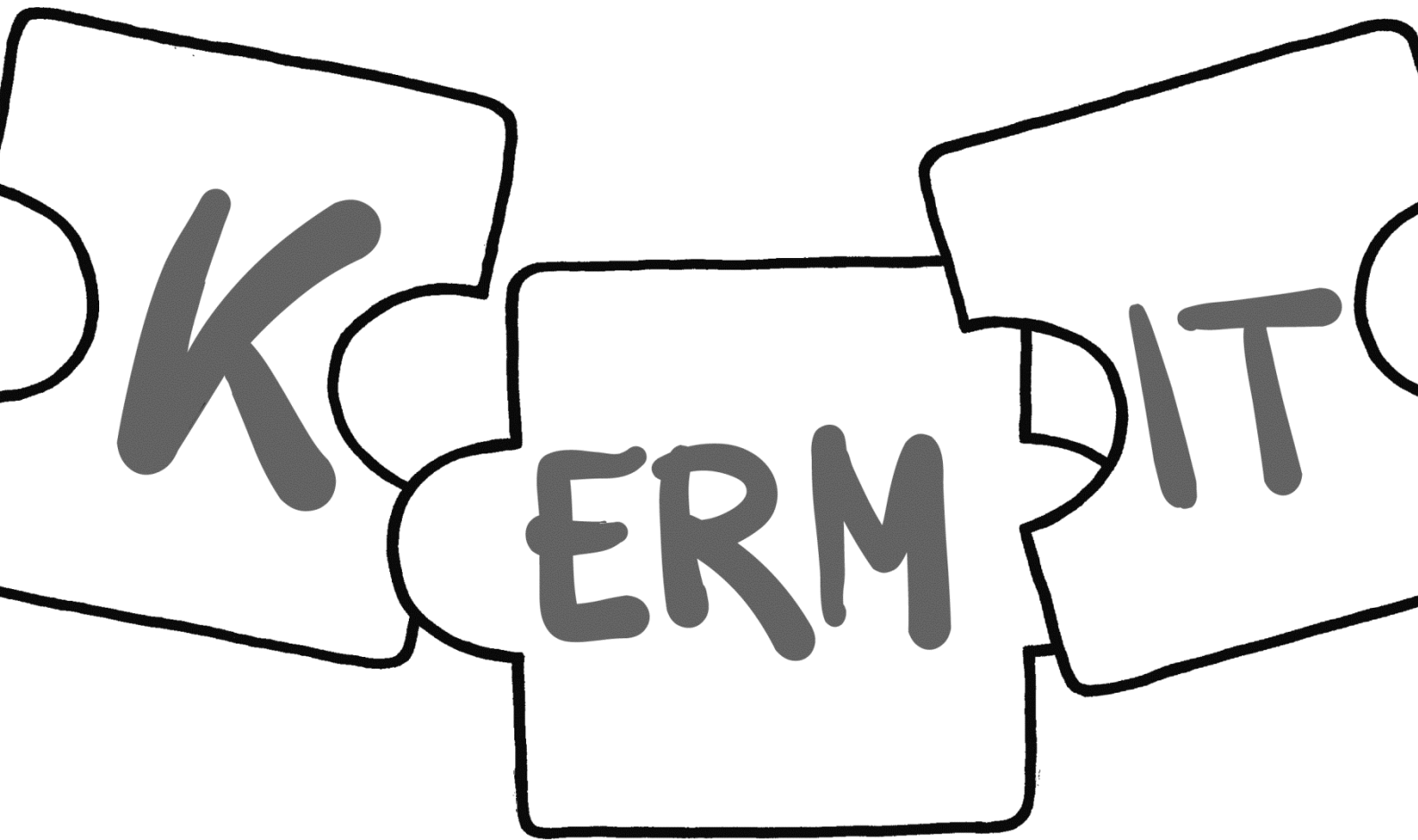




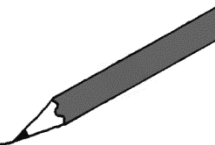
Kompetenzen **ermitteln**

Mathematik

Didaktisches Material

2024

3



1. Inhalt

2. Einleitung	5
3. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards	5
3.1 Die Bildungsstandards Mathematik	5
3.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik	7
4. Die Leitidee <i>Raum und Form</i>	10
4.1 Worum geht es in diesem Inhaltsbereich?	10
4.2 Raumvorstellung	10
4.3 Begriffsverständnis	11
4.3.1 Intuitives Begriffsverständnis	11
4.3.2 Inhaltliches Begriffsverständnis	12
4.3.3 Integriertes Begriffsverständnis	12
4.3.4 Formales Begriffsverständnis	12
4.3.5 Strukturelles Begriffsverständnis	12
4.4 Geometrisches Zeichnen	13
5. Die Leitidee <i>Muster und Strukturen</i>	14
5.1 Worum geht es in diesem Inhaltsbereich?	14
5.1.1 Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen	14
5.1.2 Funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen	15
5.2 Muster in der Arithmetik	15
5.3 Muster in der Geometrie	15
5.4 Muster in der Kombinatorik	16
5.5 Muster in der sachbezogenen Mathematik	17
6. Weitere Anregungen für den Unterricht	17
7. Abbildungsverzeichnis	19
8. Literaturverzeichnis	20
9. Worum geht es im Inhaltsbereich Raum und Form allgemein?	21
9.1 Aufgaben zu Raumvorstellungen	25
Aufgabe 28 in Testheft B1	25
Aufgabe 26 in Testheft A1	26
Aufgabe 35 in Testheft B1	26
Aufgabe 34 in Testheft A1	27
Aufgabe 30 in Testheft A1	28
Aufgabe 34 in Testheft B1	28
Aufgabe 27 in Testheft A1	29

Aufgabe 24 in Testheft B1	30
9.1.1. Aufgabenbezogener Kommentar	31
9.1.2 Mögliche Schwierigkeiten	31
9.1.3 Anregungen für den Unterricht	36
9.2 Aufgaben zu Körpern und Flächen	45
Aufgabe 27 in Testheft B1	45
Aufgabe 29 in Testheft B1	45
Aufgabe 32 in Testheft A1	46
Aufgabe 26 in Testheft B1	47
Aufgabe 33 in Testheft A1	47
Aufgabe 24 in Testheft A1	48
9.2.1 Aufgabenbezogener Kommentar	49
9.2.2 Mögliche Schwierigkeiten	50
9.2.3 Anregungen für den Unterricht	52
9.3 Aufgaben zu Abbildungen	56
Aufgabe 31 in Testheft A1	56
Aufgabe 32 in Testheft B1	57
Aufgabe 25 in Testheft A1	58
Aufgabe 30 in Testheft B1	59
Aufgabe 36 in Testheft A1	59
Aufgabe 25 in Testheft B1	60
9.3.1 Aufgabenbezogener Kommentar	61
9.3.2 Mögliche Schwierigkeiten	63
9.3.3. Anregungen für den Unterricht	68
9.4 Aufgaben zu Flächen, Rauminhalt, Umfang	73
Aufgabe 35 in Testheft A1	73
Aufgabe 28 in Testheft A1	74
Aufgabe 31 in Testheft B1	74
Aufgabe 33 in Testheft B1	75
Aufgabe 29 in Testheft A1	76
9.4.1 Aufgabenbezogener Kommentar	77
9.4.2 Mögliche Schwierigkeiten	80
9.4.3 Anregungen für den Unterricht	82
10. Worum geht es im Inhaltsbereich Muster und Strukturen allgemein?	93
10.1 Aufgaben zu Arithmetischen Mustern	97

Aufgabe 35 in Testheft B	97
Aufgabe 29 in Testheft C	97
Aufgabe 34 in Testheft B	98
Aufgabe 38 in Testheft B	98
Aufgabe 32 in Testheft C	99
Aufgabe 24 in Testheft B	99
Aufgabe 32 in Testheft B	100
Aufgabe 31 in Testheft B	101
Aufgabe 27 in Testheft C	101
Aufgabe 25 in Testheft C	101
Aufgabe 35 in Testheft C	102
Aufgabe 25 in Testheft B	103
Aufgabe 37 in Testheft B	103
10.1.1 Aufgabenbezogener Kommentar	105
10.1.2 Mögliche Schwierigkeiten	109
10.1.3 Anregungen für den Unterricht	119
10.2 Aufgaben zu Geometrischen Mustern	131
Aufgabe 36 in Testheft B	131
Aufgabe 34 in Testheft C	131
Aufgabe 27 in Testheft B	132
Aufgabe 36 in Testheft C	133
10.2.1 Aufgabenbezogener Kommentar	133
10.2.3 Mögliche Schwierigkeiten	135
Anregungen für den Unterricht	139
10.3 Aufgaben zu Mustern in Anwendungssituationen	153
Aufgabe 28 in Testheft C	153
Aufgabe 30 in Testheft B	153
Aufgabe 31 in Testheft C	154
Aufgabe 26 in Testheft B	154
Aufgabe 28 in Testheft B	155
Aufgabe 30 in Testheft C	155
Aufgabe 33 in Testheft B	155
Aufgabe 33 in Testheft C	156
Aufgabe 29 in Testheft B	157
Aufgabe 37 in Testheft C	157

Aufgabe 24 in Testheft C.....	158
Aufgabe 26 in Testheft C.....	158
10.3.1 Aufgabenbezogener Kommentar	159
10.3.2 Mögliche Schwierigkeiten	162
10.3.3 Anregungen für den Unterricht	170
Literaturverzeichnis	176
Webseiten	176
Anhang 177	
Nummerierung der einzelnen Kompetenzen	177
Katalog der allgemeinen mathematischen Kompetenzen	178
Katalog der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen	179
Übersicht der Aufgabenmerkmale im Basismodul	182
Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul A (<i>Raum und Form</i> , L2).....	185
Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul B (<i>Raum und Form</i> , L2).....	187
Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul A (<i>Muster und Strukturen</i> , L3) ...	189
Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul B (<i>Muster und Strukturen</i> , L3) ...	192

Allgemeine Hinweise:

Autor*innen der fachdidaktischen Orientierungen sind Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Prof. Dr. Kristina Reiss und Dr. Heino Reimers.

Die KMK-Bildungsstandards in der Fassung von 2004 wurden überarbeitet und in der Fassung im Jahr 2022 veröffentlicht. Die Testaufgaben in den Vergleichsarbeiten aus dem Jahr 2024 beziehen sich noch auf die Bildungsstandards von 2004. Weitere Informationen finden Sie hier: <https://www.igb.hu-berlin.de/bista/WeiterentwicklungBiSta/>

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?
www.igb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

2. Einleitung

Die vorliegenden Didaktischen Handreichungen enthalten praxistaugliche Kommentierungen von - KERMIT-Testaufgaben und Vorschläge für die Weiterarbeit mit den Ergebnissen. So sollen Erkenntnisse aus den Testungen möglichst einfach für die Unterrichtsentwicklung nutzbar werden.

Bitte beachten Sie bei der Arbeit mit dem Material, dass sich die vorgestellten Aufgaben in verschiedenen Testheften befunden haben. Das B-Heft wurde in Schulen mit einem Sozialindex zwischen 1 und 3, das C-Heft in Schulen mit einem Sozialindex zwischen 4 und 6 bearbeitet. Die Aufgaben aus den Testheften A1 und B1 wurden in Hamburg nicht eingesetzt, sind aber trotzdem in dieser Didaktischen Handreichung enthalten, um Ihnen auch vertiefte Informationen zu Aufgaben aus der Leitidee Raum und Form anzubieten.

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Ferner werden die mathematischen Kompetenzbereiche *Raum und Form* sowie *Muster und Strukturen* erläutert und an konkreten Aufgabenbeispielen illustriert. Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Standards vorgegebenen Ziele bietet. Dabei wird auf die beiden Domänen *Raum und Form* sowie *Muster und Strukturen* kurz eingegangen. Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Aufgaben sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren (Teil III) zu finden.

3. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

3.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schüler*innen bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substanziellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schüler*innen zu verbessern. Entsprechend sollen die Bildungsstandards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind damit auch Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,¹
- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,
- Darstellen,
- Modellieren.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf fünf mathematische Leitideen:

- *Zahlen und Operationen,*
- *Raum und Form,*
- *Muster und Strukturen,*
- *Größen und Messen,*
- *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.*

Diese Leitideen sollen den Schüler*innen helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (Kultusministerkonferenz, 2005).

¹ In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>) ist die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten“ nicht enthalten. Im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik für den Primarbereich wurden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten“ ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>.

3.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Ausrichtung von Mathematikunterricht. Im Sinne der Output-Orientierung ist von Interesse, was Schüler*innen verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge hinsichtlich der allgemeinen und inhaltsbezogenen Kompetenzen tatsächlich können.

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schüler*innen – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen Kompetenzstufen zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilfreiche Orientierungen geben kann.

Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller, 2012; Reiss & Winkelmann, 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der mathematischen Kompetenz von Schüler*innen am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

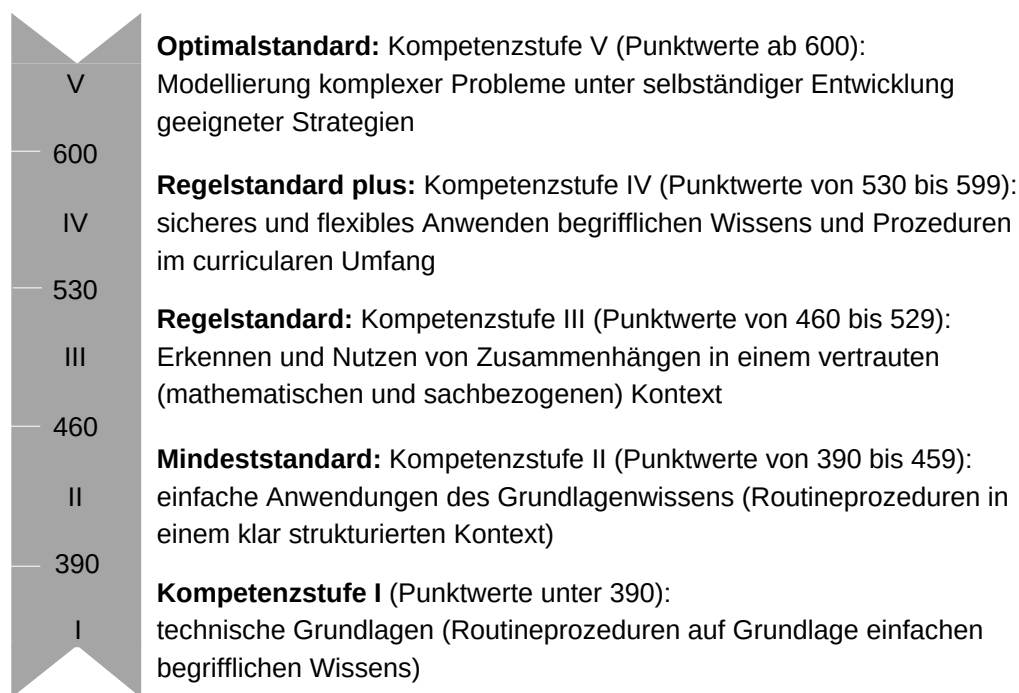


Abbildung 1. Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.

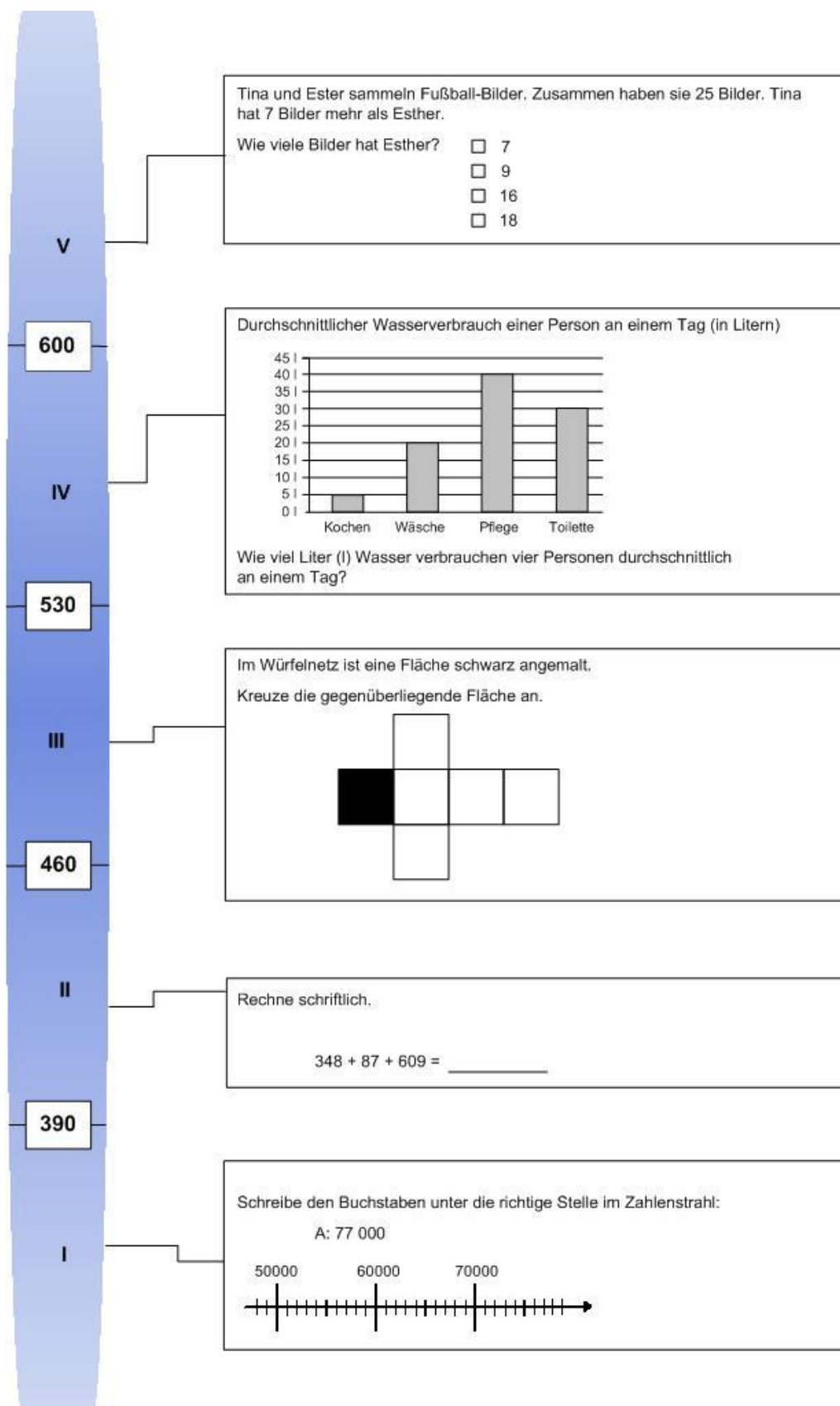
Mindeststandard. Für den Mindeststandard wurde das obere Ende von Kompetenzstufe I als Schwellenwert gewählt. Alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts stellen nur solche Anforderungen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schüler*innen des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss. Deshalb spricht man hier vom Mindeststandard des Bildungsgangs. Schüler*innen, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

Regelstandard. Der *Regelstandard*, den die Schüler*innen zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schüler*innen, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den

Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der Kultusministerkonferenz (KMK) festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch von sehr schwachen Schüler*innen gelöst werden können.

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet:



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben, siehe S. 14 des Kompetenzstufenmodells in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>

4. Die Leitidee *Raum und Form*

4.1 Worum geht es in diesem Inhaltsbereich?

Die ersten geometrischen Kompetenzen entwickeln sich bei Kindern bereits ab der Geburt in der Interaktion mit ihrer Umgebung und durch eine vielfältige Wahrnehmung der Lebenswelt. Durch die Verarbeitung visueller Erfahrungen in Verbindung mit haptischen Reizen entstehen so z. B. Grundlagen für die Orientierung im Raum oder auch basale kognitive Fähigkeiten zur Klassifizierung von Objekten.

In der Schule sind diese Vorerfahrungen in vielen Bereichen Voraussetzung für gelingendes Lernen, so z. B. das sichere Erkennen von Raum-Lage-Beziehungen als Grundlage für das Lesen und Schreiben. Im Mathematikunterricht werden die vorhandenen geometrischen Fähigkeiten im Hinblick auf Objekte wie Flächen und Körper und darauf bezogene Prozesse – Bewegen (Abbildungen) – sowie das räumliche Vorstellungsvermögen allgemein anhand konkreter Handlungserfahrungen vertieft, systematisch geordnet, genutzt und spiralcurricular erweitert.

Übergreifend spielen dabei das Begriffsverständnis und das geometrische Zeichnen eine Rolle. Diese beiden Aspekte bedürfen, ebenso wie die in alle Bereiche hineinspielende Raumvorstellung, einer kontinuierlichen Förderung, die möglichst früh beginnen sollte.

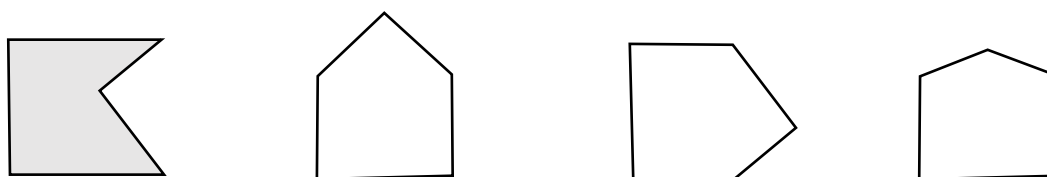
4.2 Raumvorstellung

Raumvorstellung umschreibt die Fähigkeit, „räumliche Objekte“ in Gedanken zu sehen und dabei mit den entstehenden Vorstellungsbildern aktiv umzugehen, etwa im Sinne einer mentalen Bewegung oder einer mentalen Vergrößerung bzw. Verkleinerung.

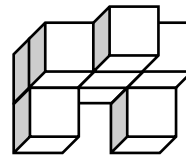
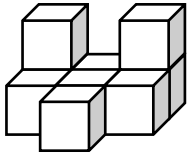
Mit „räumlichen Objekten“ assoziiert man dabei zumeist Objekte des dreidimensionalen Erfahrungsraumes, gemeint sind aber auch Objekte in einer Ebene oder in anderen „Räumen“, etwa auf einer Geraden oder auf einer Kugeloberfläche. In der Mathematik werden viele Objekte in „Räumen“ organisiert, etwa in „Zahlenräumen“, so dass der Begriff der Raumvorstellung dort eine umfassende Bedeutung erhält, der auch die Schulmathematik betrifft.

Diese Raumvorstellung ist bei den Schüler*innen i. d. R. sehr unterschiedlich ausgeprägt; so gelingt z. B. das gedankliche Lösen kopfgeometrischer Aufgaben über mentales Operieren in ganz unterschiedlichem Maße. Da aber auch viele geometrische Sachverhalte über die räumliche Vorstellung erworben werden, ist die Förderung dieses Kompetenzbereichs von besonderer Bedeutung.

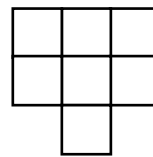
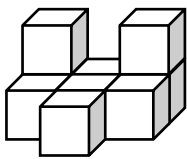
So kann z. B. die Gewinnung der Anzahl der Ecken eines Quaders oder einer vierseitigen Pyramide durch Abzählen an einem imaginären Objekt erfolgen. Auch Lagebeziehungen können in Gedanken verändert werden. Dies ist bei folgender Aufgabe erforderlich. Dort muss ein passendes Teil identifiziert werden:



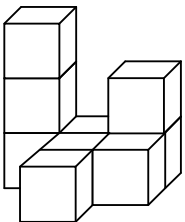
Die Fähigkeit, mental den Standort wechseln zu können, ermöglicht es, Bewegungen eines Körpers, hier eine Rotationsabbildung, als solche zu identifizieren:



Auch die Beziehung zwischen der dreidimensionalen Darstellung eines Objektes und der zweidimensionalen Ansicht von oben kann mithilfe des räumlichen Vorstellungsvermögens hergestellt werden:



Diese Fähigkeit wird unter anderem bei der Zuordnung des richtigen Bauplans zu einem Körper benötigt:



3	1	1
0	1	1
0	1	0

3	1	2
1	1	1
0	1	0

3	1	2
0	0	1
0	1	0

3	1	1
0	1	1
0	1	0

4.3 Begriffsverständnis

Um Mathematik zu verstehen und im Unterricht über mathematische Sachverhalte zu sprechen, bedarf es eines einheitlichen Begriffsverständnisses. „Begriff“ ist dabei nicht allein als formales Unterscheidungsmerkmal im Sinne einer Wort-Sachverhalt-Zuordnung zu sehen. Mathematische Begriffe müssen mit Grundvorstellungen verknüpft werden. Vollrath (1984) unterscheidet **fünf Stufen des Begriffsverständnisses**, von denen primär die ersten drei von Relevanz für die Grundschule sind:

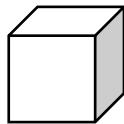
4.3.1 Intuitives Begriffsverständnis

Das Kind nimmt den Begriff als Phänomen in seiner Umwelt wahr. Dies ist die Grundlage für darauf aufbauende Begriffsbildungsprozesse. Im Unterricht ist daher der handelnde Erwerb von Erkenntnissen durch praktische Tätigkeiten wichtig, also das Anknüpfen an reale Erfahrungen aus der Umwelt.

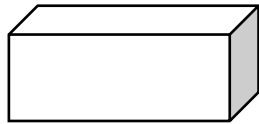
4.3.2 Inhaltliches Begriffsverständnis

Der Begriff wird mit Eigenschaften verbunden, die in unterschiedlichen Darstellungen oder Objekten zum selben Begriff vorhanden sind. So kann z. B. ein Würfel anhand des Wissens über seine Eigenschaften als solcher identifiziert werden, unabhängig von seiner Größe oder Lage. Besonders stark verankert ist solches Wissen, wenn es durch den Vergleich mehrerer ähnlicher Abbildungen eigenständig angewandt werden kann:

Was ist die Besonderheit von Figur 1 gegenüber Figur 2, 3 und 4?



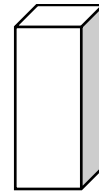
Figur 1



Figur 2



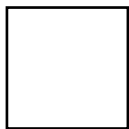
Figur 3



Figur 4

4.3.3 Integriertes Begriffsverständnis

Der Begriff ist Teil eines Begriffsnetzes, innerhalb dessen Zusammenhänge erkannt werden können. Diese Fähigkeit findet in der Grundschule Anwendung, wenn Begriffshierarchien, wie bspw. die im Folgenden geschilderte, erkannt und begründet werden können:



Ein Quadrat ist zugleich ...



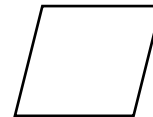
... ein Rechteck,

Ein Rechteck ist zugleich ...



... ein Parallelogramm,

... ein Parallelogramm.



... eine Raute.

Für die Primarstufe von geringerer Bedeutung im Zusammenhang mit *Raum und Form* sind die Stufen 4 und 5:

4.3.4 Formales Begriffsverständnis

Dies erfordert die Kenntnis verschiedener Definitionen und die Befähigung zur Anwendung im Rahmen von Beweisen.

4.3.5 Strukturelles Begriffsverständnis

Dieses weit gehende Begriffsverständnis, in dem der Begriff als strukturierbares Objekt erkannt und behandelt wird, setzt u. a. die Kenntnis wichtiger Verknüpfungen von Funktionen voraus.

4.4 Geometrisches Zeichnen

Das geometrische Zeichnen ist wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts der Grundschule und entfaltet zugleich eine propädeutische Wirkung im Hinblick auf das Lernen und Arbeiten in den weiterführenden Schulen, u. a. als Grundlage für die Erstellung komplexerer Konstruktionen oder für die Darstellung in Koordinatensystemen. In der Primarstufe werden zunächst einfache geometrische Objekte zeichnerisch dargestellt.

In der praktischen Umsetzung fördert das geometrische Zeichnen die Feinmotorik der Kinder ebenso wie ihr ästhetisches Empfinden und kann so zu sorgfältiger und exakter Vorgehensweise motivieren. Durch das zeichnerische Nachvollziehen können geometrische Erkenntnisse erlangt, vertieft und gefestigt werden. Dies zeigt sich z. B. bei der Durchführung einer Achsenspiegelung an einer diagonal liegenden Achse. Sie erfordert die Kenntnis und konsequentere Anwendung der Eigenschaften einer Achsenspiegelung als der „Standardfall“ einer senkrecht liegenden Achse. Neben dem Verstehen der Aufgabenstellung und dem Wissen um die durchzuführende Zeichenhandlung ist zusätzlich die motorische Fähigkeit zur zeichnerischen Umsetzung Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung einer solchen Aufgabenstellung.

In der Grundschule findet das geometrische Zeichnen u. a. Anwendung in Form von Freihandzeichnungen, Zeichnen von Strecken, geometrischen Figuren und Mustern, Verbinden von Punkten, Vergrößerungen und Verkleinerungen und im Zeichnen und Vervollständigen symmetrischer Figuren. Werden räumliche Figuren gezeichnet, beschränkt sich dies meist auf die Konstruktion von Schrägbildern einfacher mathematischer Körper (z. B. Quader).

Den didaktischen Kommentaren zu den einzelnen Bereichen in Teil III der Didaktischen Handreichungen ist jeweils eine Tabelle vorgeschaltet, aus der ersichtlich wird, ob bei den Aufgaben zusätzlich zur eigentlichen Anforderung Raumvorstellung, Begriffsverständnis und/oder geometrisches Zeichnen notwendig sind. Aufgaben, die mit „(x)“ gekennzeichnet sind, beschreiben Aufgaben, in welchen die jeweilige Fähigkeit die Lösung unterstützen kann, aber nicht muss. Aufgaben, die mit „x“ gekennzeichnet sind, können ohne die jeweilige Fähigkeit kaum gelöst werden.

5. Die Leitidee *Muster und Strukturen*

5.1 Worum geht es in diesem Inhaltsbereich?

Muster und Strukturen sind als übergreifendes Prinzip das Fundament aller Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts und der Mathematik als Wissenschaft. Gegenstand des Mathematikunterrichts ist das Erkunden, das Entdecken, das Herstellen und das Nutzen von Mustern.

Das Denken in Mustern und Strukturen bedeutet eine entscheidende Steigerung der Denkökonomie. Je besser ein Kind Zahlen, Rechnungen, Formen, einzelne Wissens Elemente und Fertigkeiten vernetzen kann, desto geringer wird sein Gedächtnis belastet.

Der Kompetenzbereich *Muster und Strukturen* hat höchste praktische Relevanz und eröffnet somit zahlreiche anwendungsbezogene Übungsfelder. Er zeichnet sich durch Vernetzungen mit allen anderen Kompetenzbereichen aus: Es gibt Verbindungen zu *Zahlen und Operationen*, zu *Raum und Form*, zu *Größen und Messen* und zu *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*.

Bei der Diskussion von Mustern und Strukturen werden insbesondere die allgemeinen mathematischen Kompetenzen *Darstellen*, *Argumentieren* und *Kommunizieren* gefordert und gefördert.

In der kurzen Darstellung der Bildungsstandards umfasst die Leitidee *Muster und Strukturen* zwei wesentliche zusammenhängende Aspekte mit zahlreichen mathematischen Bezügen:

- Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen
- funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen²

5.1.1 Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen

Wie die Aufgabe in Abbildung 3 zeigt, umfasst dieser Bereich Aufgaben, die auf den ersten Blick auch dem Bereich *Zahlen und Operationen* zugeordnet werden könnten. Bei der abgebildeten Aufgabe geht es um das Beschreiben einer Felddarstellung mithilfe einer Multiplikation. Aber es geht an dieser Stelle um mehr: Gegeben ist ein geometrisches Muster. Dieses soll erkannt und mit dem arithmetischen Muster in Verbindung gesetzt werden. Eine Seite des Rechtecks bleibt gleich, die andere wächst fortlaufend um eine Kästchenlänge. In der Multiplikation zeigt sich dies durch den gleichbleibenden Faktor 2 und den zweiten Faktor, der fortlaufend um eins größer wird.

Schreibe die passenden Mal-Aufgaben auf. Achte auf das Muster.

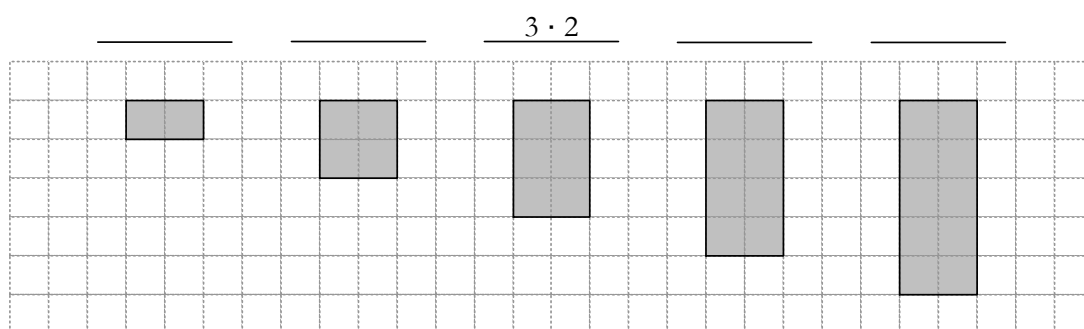


Abbildung 3. Aufgabe 2, KERMIT-3 Mathematik 2016

² siehe Kultusministerkonferenz 2005, S. 10-11 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>

5.1.2 Funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen

Ein weiterer Aspekt im Bereich *Muster und Strukturen* betrifft funktionale Beziehungen. Wird einer Zahl oder einer Größe nach einer festen Vorschrift eine zweite Zahl oder Größe zugeordnet, so ergeben sich Zahlenpaare, die oftmals ein Muster erkennen lassen. Ein funktionaler Zusammenhang, der in vielen Sachsituationen beim Modellieren auftritt, ist die Proportionalität. Weniger häufig zeigt sich indirekte Proportionalität, wie in der folgenden Aufgabe (Abbildung 4): Je mehr Elias an einem Tag strickt, desto schneller wird er fertig.

Elias strickt einen Schal. Er strickt jeden Tag ein gleich langes Stück.
 Wenn er jeden Tag 16 cm strickt, ist der Schal in 10 Tagen fertig.
 Wie viel müsste er jeden Tag stricken, damit er in 5 Tagen fertig wird?
 _____ cm



Abbildung 4. Aufgabe 5, KERMIT-3 Mathematik 2016

Im Folgenden werden Beispiele zu den verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen dargelegt, an denen das übergreifende Prinzip von *Mustern und Strukturen* für den Mathematikunterricht verdeutlicht wird. Vor allem die enge Vernetzung zwischen Arithmetik und Geometrie wird daraus ersichtlich.

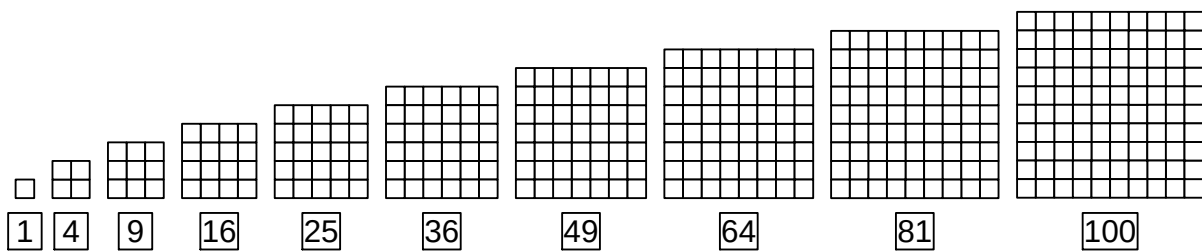
5.2 Muster in der Arithmetik

Muster und Strukturen sind grundlegend für das Zahlverständnis (z. B. Stellenwertsystem, mathematische Strukturen in Arbeitsmitteln) und das Verständnis der Rechenoperationen (z. B. Entwicklung von Grundvorstellungen zu Multiplikationsaufgaben, Zahlzerlegungen).

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □	0 + 10
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	1 + 9
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	2 + 8
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	3 + 7
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	4 + 6
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	5 + 5
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	6 + 4
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	7 + 3
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	8 + 2
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	9 + 1
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □	10 + 0

5.3 Muster in der Geometrie

Das Beispiel Quadratzahlen zeigt den Bezug zwischen einer geometrischen Folge und einer arithmetischen Zahlenfolge.



Vertiefend können folgende Fragestellungen bearbeitet werden: Wie viel muss man zur ersten Quadratzahl addieren, um zur zweiten zu kommen? Wie viel fehlt von der Zweiten zur Dritten? ... Was fällt dir auf? Wie heißt die Quadratzahl von 11, von 12, ...?

5.4 Muster in der Kombinatorik

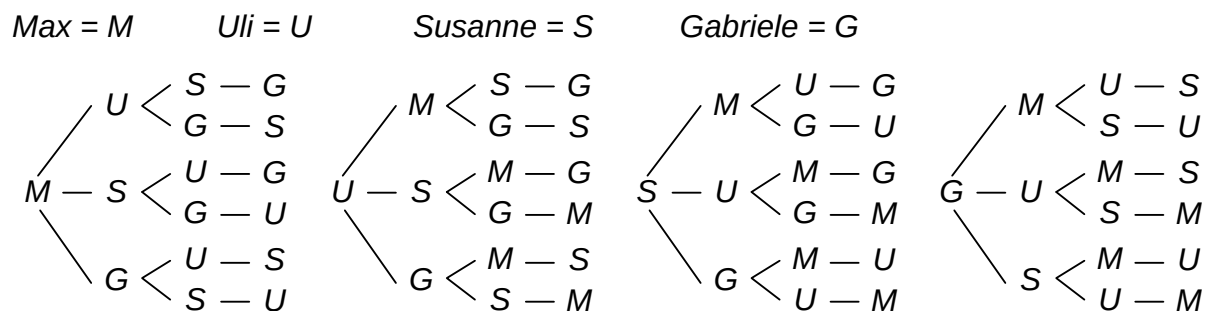
Muster und Strukturen in der Kombinatorik werden z. B. in Baumdiagrammen deutlich. Alle Möglichkeiten eines kombinatorischen Problems können so übersichtlich erfasst werden.

Beispiel:

Die Klasse 3a besucht eine Zirkusvorstellung. Max, Uli, Susanne und Gabriele sind enge Freunde und wollen nebeneinandersitzen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, sich nebeneinanderzusetzen?

Es gibt _____ Möglichkeiten.



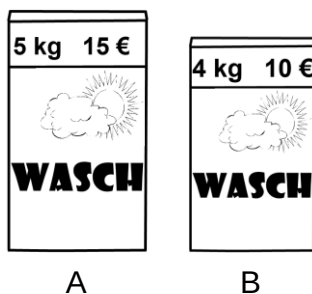
5.5 Muster in der sachbezogenen Mathematik

Wenn zwischen Größen und/oder Zahlen ein Rechenmuster besteht, mit dem man eine Größe und/oder Zahl aus der anderen bestimmen kann, so spricht man davon, dass Größen bzw. Zahlen in einem „funktionalen Zusammenhang“ stehen.

Mögliche Beispiele:

1. Proportionaler Zusammenhang von zwei Größen

Welches Waschmittel ist günstiger?



A

Gewicht in kg	5	1
Preis in €	15	3

B

Gewicht in kg	4	2	1
Preis in €	10	5	2,50

2. Funktionaler Zusammenhang von zwei Zahlen:

Bestimmen der Kantenlänge und des Rauminhalts von Würfeln (durch Auszählen von Einheitswürfeln).

Kantenlänge	2	3	4		
Rauminhalt	8	27	64		

6. Weitere Anregungen für den Unterricht

Aufgaben wie die in VERA-3 können nicht nur zur Feststellung des Leistungsstandes, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den Schüler*innen zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Fähigkeiten der Schüler*innen angepasste Auswahl kompetenzorientierter Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so belegen viele empirische Untersuchungen – ausreichend Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse nationaler und internationaler Leistungsvergleiche weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schüler*innen im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die

individuellen Kompetenzstände der Kinder und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus.

Im Kompetenzbereich *Raum und Form* kommt der Sprachbildung besondere Bedeutung zu, da im Gegensatz zur Arithmetik keine formalen Darstellungen entwickelt werden. Bereichsbezogen geht es zuerst darum, sich im umgebenden Raum oder in einem gegebenen Raum aus der eigenen Perspektive zu orientieren, und dies mit einem sicher gehandhabten Wortschatz kennzeichnen zu können, sowohl in Ortsbezeichnungen als auch in Richtungsbezeichnungen, sowohl aus der eigenen Perspektive als auch aus der von anderen. Dieser Wortschatz ist für die Mathematik wie für die Lebenswelt unerlässlich: „oben, unten, nach vorn, nach rechts, neben, unter“, etc. Elementare ebene und räumliche Figuren und ihre Eigenschaften sollen nicht nur als solche erkannt und beschrieben („gerade“, „rund“, „Rechteck“, „Kreis“, „Quadrat“, „Quader“ etc.), sondern auch als Attribute von Gegenständen der Lebenswelt gesehen und verwendet werden („runde Dose“, „gerader Stab“ etc.). Entscheidend ist darüber hinaus schließlich, an Formen und Figuren nicht nur konkret, sondern auch mental Änderungen vornehmen zu können, sowohl erfahrungsbasierte: „Ich stell mir vor, ich dreh‘ das rechtsrum.“, als auch solche, die über reale Erfahrung hinausgehen: „Ich stell mir vor, das Auto ist in Wirklichkeit viel größer.“ Dies ist der Kern des integrierenden Konzepts der Raumvorstellung, das nicht nur – im engeren Sinne – geometrische Gestalten betrifft, sondern auch eine Voraussetzung für das Verstehen veranschaulichender Formen in der Arithmetik und für das Schätzen und Messen von Größen ist.

Unterricht, der auf den Aufbau von Kompetenzen im Bereich *Muster und Strukturen* abzielt, sollte diese Leitidee in allen anderen Kompetenzbereichen mitdenken. Das Erkennen, Beschreiben und Weiterführen von Mustern sind grundlegende Tätigkeiten in der Mathematik: Muster zeigen sich in der Geometrie (Parkette, Bandornamente, Symmetrien) und in der Kombinatorik beim Strukturieren von Lösungsmöglichkeiten, aber vor allem auch bei strukturierten Päckchen, Aufgabenfolgen oder zahlreichen produktiven Übungsformen, wie Rechendreiecke, Rechenmauern, usw.

Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind z. B. in Hengartner, Hirt & Wälti (2010), Hirt & Wälti (2008), Rasch & Sitter (2016), Blum et al. (2006) oder Walther et al. (2012) enthalten.

Die im Folgenden stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden³.

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die den Kindern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren usw.) und bei der vielfältige Vernetzungen sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität hergestellt werden.
- Eine *konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden* in einem Unterricht, der geistige Tätigkeiten der Lernenden herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird und Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind.

³ vgl. Blum et al. (2006)

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u. a. Helmke, 2006).

Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d. h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schüler*innen gleichermaßen geeignet sind).

Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, da sie Schüler*innen ermöglichen, entsprechend ihrer Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen.

7. Abbildungsverzeichnis

<i>Abbildung 1. Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.</i>	<i>7</i>
<i>Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben, siehe S. 14 des Kompetenzstufenmodells in der Fassung vom 11.02.2013 unter https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm.....</i>	<i>9</i>
<i>Abbildung 3. Aufgabe 2, VERA-3 Mathematik 2016</i>	<i>14</i>
<i>Abbildung 4. Aufgabe 5, VERA-3 Mathematik 2016</i>	<i>15</i>

8. Literaturverzeichnis

- Blum, W. (2006). Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32); Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Helmke, A. (2006). Was wissen wir über guten Unterricht? *Pädagogik*, 2, 42-45.
- Hengartner, E., Hirt, U., & Wälti, B. (2010). Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Zug: Klett und Balmer Verlag
- Hirt, U. & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Hannover: Friedrich Verlag.
- Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2013). *Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) in der Fassung vom 11.02.2013*. (<https://www.igb.hu-berlin.de/bista/ksm>)
- KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. Beschluss vom 15.10.2004. (<https://www.igb.hu-berlin.de/bista/subject> und <https://www.kmk.org/de/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>)
- Rasch, R., & Sitter, K. (2016). Module für den Geometrieunterricht in der Grundschule. Geometrie handlungsorientiert unterrichten und beziehungshaltig entdecken. Seelze: Klett, Kallmeyer.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 40 (10), 34-37.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120-141). Weinheim: Beltz.
- Reiss, K., Roppelt, A., Haag, N., Pant, H. A. & Köller, O. (2012). Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S. 72-84). Münster: Waxmann.
- Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begrifflehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.
- Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (2012). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Weinheim: Beltz.

9. Worum geht es im Inhaltsbereich Raum und Form allgemein?

Die ersten geometrischen Kompetenzen entwickeln sich bei Kindern bereits ab der Geburt in der Interaktion mit ihrer Umgebung und durch eine vielfältige Wahrnehmung der Lebenswelt. Durch die Verarbeitung visueller Erfahrungen in Verbindung mit haptischen Reizen entstehen so z. B. Grundlagen für die Orientierung im Raum oder auch basale kognitive Fähigkeiten zur Klassifizierung von Objekten.

In der Schule sind diese Vorerfahrungen in vielen Bereichen Voraussetzung für gelingendes Lernen, so z. B. das sichere Erkennen von Raum-Lage-Beziehungen als Grundlage für das Lesen und Schreiben. Im Mathematikunterricht werden die vorhandenen geometrischen Fähigkeiten im Hinblick auf Objekte wie Flächen und Körper und darauf bezogene Prozesse – Bewegen (Abbildungen) – sowie das räumliche Vorstellungsvermögen allgemein anhand konkreter Handlungserfahrungen vertieft, systematisch geordnet, genutzt und spiralcurricular erweitert.

Übergreifend spielen dabei das Begriffsverständnis und das geometrische Zeichnen eine Rolle. Diese beiden Aspekte bedürfen, ebenso wie die in alle Bereiche hineinspielende Raumvorstellung, einer kontinuierlichen Förderung, die möglichst früh beginnen sollte.

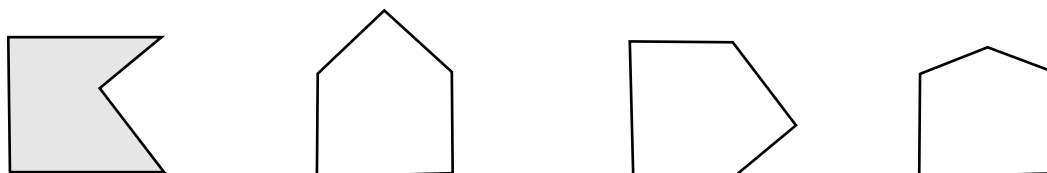
Raumvorstellung

Raumvorstellung umschreibt die Fähigkeit, „räumliche Objekte“ in Gedanken zu sehen und dabei mit den entstehenden Vorstellungsbildern aktiv umzugehen, etwa im Sinne einer mentalen Bewegung oder einer mentalen Vergrößerung bzw. Verkleinerung.

Mit „räumlichen Objekten“ assoziiert man dabei zumeist Objekte des dreidimensionalen Erfahrungsraumes, gemeint sind aber auch Objekte in einer Ebene oder in anderen „Räumen“, etwa auf einer Geraden oder auf einer Kugeloberfläche. In der Mathematik werden viele Objekte in „Räumen“ organisiert, etwa in „Zahlenräumen“, so dass der Begriff der Raumvorstellung dort eine umfassende Bedeutung erhält, der auch die Schulmathematik betrifft.

Diese Raumvorstellung ist bei den Schüler*innen i. d. R. sehr unterschiedlich ausgeprägt; so gelingt z. B. das gedankliche Lösen kopfgeometrischer Aufgaben über mentales Operieren in ganz unterschiedlichem Maße. Da aber auch viele geometrische Sachverhalte über die räumliche Vorstellung erworben werden, ist die Förderung dieses Kompetenzbereichs von besonderer Bedeutung.

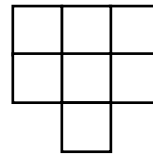
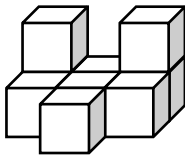
So kann z. B. die Gewinnung der Anzahl der Ecken eines Quaders oder einer vierseitigen Pyramide durch Abzählen an einem imaginären Objekt erfolgen. Auch Lagebeziehungen können in Gedanken verändert werden. Dies ist bei folgender Aufgabe erforderlich. Dort muss ein passendes Teil identifiziert werden:



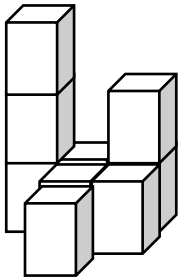
Die Fähigkeit, mental den Standort wechseln zu können, ermöglicht es Bewegungen eines Körpers, hier eine Rotationsabbildung, als solche zu identifizieren:



Auch die Beziehung zwischen der dreidimensionalen Darstellung eines Objektes und der zweidimensionalen Ansicht von oben kann mithilfe des räumlichen Vorstellungsvermögens hergestellt werden:



Diese Fähigkeit wird unter anderem bei der Zuordnung des richtigen Bauplans zu einem Körper benötigt:



3	1	1
0	1	1
0	1	0

3	1	2
1	1	1
0	1	0

3	1	2
0	0	1
0	1	0

3	1	2
0	1	1
0	1	0

Begriffsverständnis

Um Mathematik zu verstehen und im Unterricht über mathematische Sachverhalte zu sprechen, bedarf es eines einheitlichen Begriffsverständnisses. „Begriff“ ist dabei nicht allein als formales Unterscheidungsmerkmal im Sinne einer Wort-Sachverhalt-Zuordnung zu sehen. Mathematische Begriffe müssen mit Grundvorstellungen verknüpft werden. Vollrath (1984) unterscheidet **fünf Stufen des Begriffsverständnisses**, von denen primär die ersten drei von Relevanz für die Grundschule sind:

Intuitives Begriffsverständnis

Das Kind nimmt den Begriff als Phänomen in seiner Umwelt wahr. Dies ist die Grundlage für darauf aufbauende Begriffsbildungsprozesse. Im Unterricht ist daher der handelnde Erwerb von Erkenntnissen durch praktische Tätigkeiten wichtig, also das Anknüpfen an reale Erfahrungen aus der Umwelt.

Inhaltliches Begriffsverständnis

Der Begriff wird mit Eigenschaften verbunden, die in unterschiedlichen Darstellungen oder Objekten zum selben Begriff vorhanden sind. So kann z. B. ein Würfel anhand des Wissens über seine Eigenschaften als solcher identifiziert werden, unabhängig von seiner Größe oder Lage. Besonders stark verankert ist solches Wissen, wenn es durch den Vergleich mehrerer ähnlicher Abbildungen eigenständig angewandt werden kann:

Was ist die Besonderheit von Fig. 1 gegenüber Fig. 2, 3 und 4?

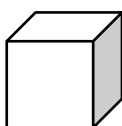


Fig. 1

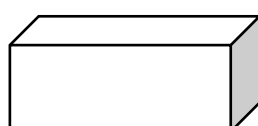


Fig. 2

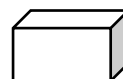


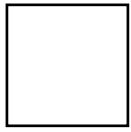
Fig. 3



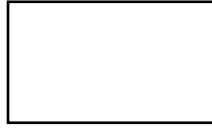
Fig. 4

Integriertes Begriffsverständnis

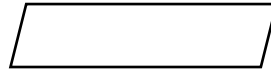
Der Begriff ist Teil eines Begriffsnetzes, innerhalb dessen Zusammenhänge erkannt werden können. Diese Fähigkeit findet in der Grundschule Anwendung, wenn Begriffshierarchien, wie bspw. die im Folgenden geschilderte, erkannt und begründet werden können:



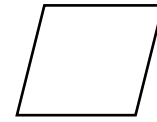
Ein Quadrat ist zugleich ...



... ein Rechteck,



... ein Parallelogramm,



... eine Raute.

Ein Rechteck ist zugleich ...

... ein Parallelogramm.

Für die Primarstufe von geringerer Bedeutung im Zusammenhang mit „Raum und Form“ sind die Stufen 4 und 5:

Formales Begriffsverständnis

Dies erfordert die Kenntnis verschiedener Definitionen und die Befähigung zur Anwendung im Rahmen von Beweisen.

Strukturelles Begriffsverständnis

Dieses weit gehende Begriffsverständnis, in dem der Begriff als strukturierbares Objekt erkannt und behandelt wird, setzt u. a. die Kenntnis wichtiger Verknüpfungen von Funktionen voraus.

Geometrisches Zeichnen

Das geometrische Zeichnen ist wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts der Grundschule und entfaltet zugleich eine propädeutische Wirkung im Hinblick auf das Lernen und Arbeiten in den weiterführenden Schulen, u. a. als Grundlage für die Erstellung komplexerer Konstruktionen oder für die Darstellung in Koordinatensystemen. In der Primarstufe werden zunächst einfache geometrische Objekte zeichnerisch dargestellt.

In der praktischen Umsetzung fördert das geometrische Zeichnen die Feinmotorik der Kinder ebenso wie ihr ästhetisches Empfinden und kann so zu sorgfältiger und exakter Vorgehensweise motivieren. Durch das zeichnerische Nachvollziehen können geometrische Erkenntnisse erlangt, vertieft und gefestigt werden. Dies zeigt sich z. B. bei der Durchführung einer Achsenspiegelung an einer diagonal liegenden Achse. Sie erfordert die Kenntnis und konsequentere Anwendung der Eigenschaften einer Achsenspiegelung als der „Standardfall“ einer senkrecht liegenden Achse. Neben dem Verstehen der Aufgabenstellung und dem Wissen um die durchzuführende Zeichenhandlung ist zusätzlich die motorische Fähigkeit zur zeichnerischen Umsetzung Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung einer solchen Aufgabenstellung.

In der Grundschule findet das geometrische Zeichnen u. a. Anwendung in Form von Freihandzeichnungen, Zeichnen von Strecken, geometrischen Figuren und Mustern, Verbinden von Punkten, Vergrößerungen und Verkleinerungen und im Zeichnen und Vervollständigen symmetrischer Figuren. Werden räumliche Figuren gezeichnet, beschränkt sich dies meist auf die Konstruktion von Schrägbildern einfacher mathematischer Körper (z. B. Quader).

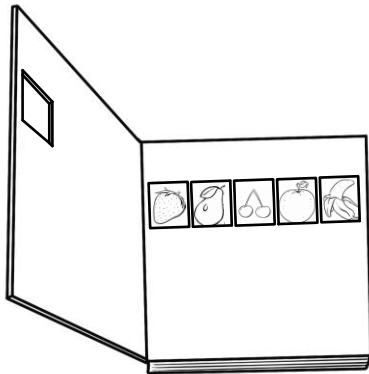
Den didaktischen Kommentaren zu den einzelnen Bereichen in Teil III der Didaktischen Handreichungen ist jeweils eine Tabelle vorgeschaltet, aus der ersichtlich wird, ob bei den Aufgaben zusätzlich zur eigentlichen Anforderung Raumvorstellung, Begriffsverständnis und/oder

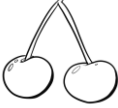
geometrisches Zeichnen notwendig sind. Aufgaben, die mit „(x)“ gekennzeichnet sind, beschreiben Aufgaben, in welchen die jeweilige Fähigkeit die Lösung unterstützen kann, aber nicht muss. Aufgaben, die mit „x“ gekennzeichnet sind, können ohne die jeweilige Fähigkeit kaum gelöst werden.

9.1 Aufgaben zu Raumvorstellungen

Aufgabe 28 in Testheft B1

Das Buch wird zugeklappt. Welches Bild ist durch das Loch zu sehen?
 Kreuze an.



				
☐	☐	☐	☐	☒

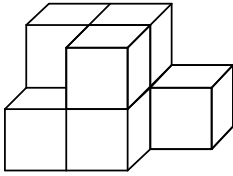
RICHTIG	Nur das 5. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)

Aufgabe 26 in Testheft A1

Ergänze den Bauplan passend zu dem Würfelgebäude.



2	2	
1		

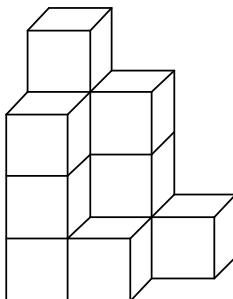
RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik		
	2	2	1
	1	2	

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten (5.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)

Aufgabe 35 in Testheft B1

Ergänze den Bauplan passend zu dem Würfelgebäude.



3		

RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik		
	4	3	1
	3	1	

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten (5.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)

Aufgabe 34 in Testheft A1

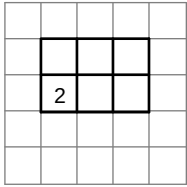
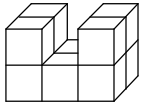
RICHTIG		ja	nein
		☐	☒
		☒	☐
		☐	☒
		☐	☒

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)

Aufgabe 30 in Testheft A1

Ergänze den Bauplan passend zu dem Würfelgebäude.



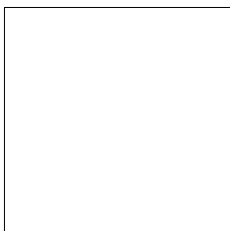
RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik <table><tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	2	1	2	2	1	2
2	1	2					
2	1	2					

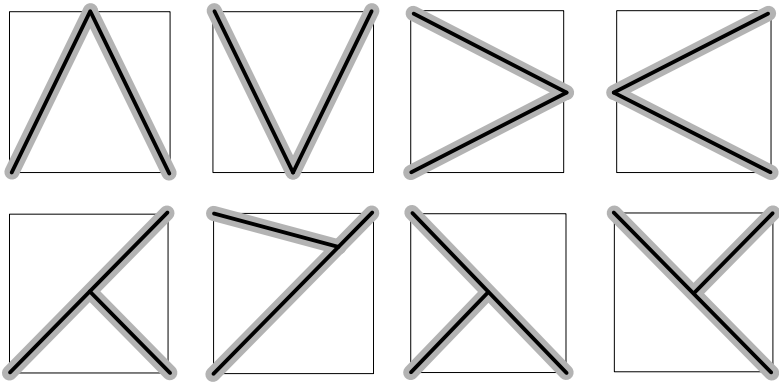
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)

Aufgabe 34 in Testheft B1

Zeichne in das Quadrat 2 gerade Linien ein.
Es sollen 3 Dreiecke entstehen.



RICHTIG	Jede Variante, die 3 Dreiecke darstellt, vgl. Lösungsbeispiele (ein Toleranzbereich ist grau markiert). 
---------	---

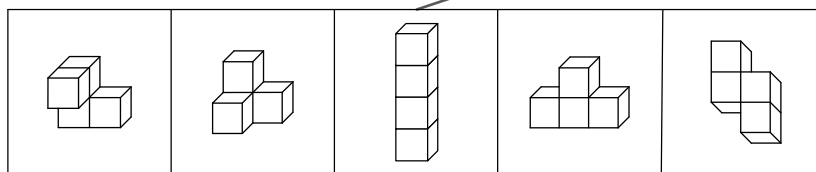
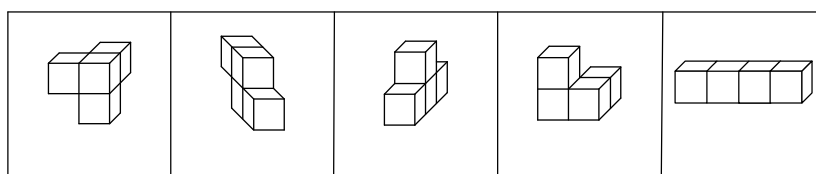
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a)

Aufgabe 27 in Testheft A1

Immer 2 Bauwerke sind gleich.

Verbinde.



RICHTIG

vgl. Lösungsgrafik

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a)

Aufgabe 24 in Testheft B1

Olivia steckt sich eine Blume hinter ihr rechtes Ohr.

Welches Bild stimmt? Kreuze an.

			
☐	☐	☐	☐

RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten) (2.1.b)

9.1.1. Aufgabenbezogener Kommentar

	Raumvorstellungsaspekt	Begriffsverständnis	Zeichnen
<u>Aufgabe 28 in Testheft B1</u>	x		
<u>Aufgabe 26 in Testheft A1</u>	x		
<u>Aufgabe 35 in Testheft B1</u>	x		
<u>Aufgabe 34 in Testheft A1</u>	x	(x)	
<u>Aufgabe 30 in Testheft A1</u>	x		
<u>Aufgabe 34 in Testheft B1</u>	x	(x)	(x)
<u>Aufgabe 27 in Testheft A1</u>	x		
<u>Aufgabe 24 in Testheft B1</u>	x	(x)	

Räumliches Vorstellungsvermögen umschreibt die Fähigkeit, räumliche Objekte in Gedanken zu sehen und mit den entstehenden Vorstellungsbildern aktiv umzugehen, z. B. im Sinne einer mentalen (gedanklichen) Bewegung oder einer mentalen Veränderung, z. B. auch Vergrößerung bzw. Verkleinerung.

Mit einer mentalen Bewegung sind zum Beispiel Drehungen in der Ebene oder Drehungen im Raum gemeint: **Mentales Bewegen von Objekten** – Aufgabe 24 und 28 in Testheft B1 und Aufgabe 27 in Testheft A1.

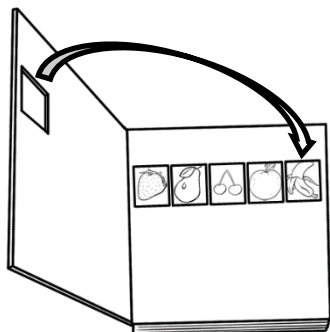
Wenn das Objekt nicht „als Ganzes“ (wie bei den Drehungen) bewegt wird, kann es auch mental auseinandergenommen, zusammengesetzt oder zum Beispiel gefaltet oder geteilt werden: **Mentales Operieren mit Objekten** – Aufgabe 34 in Testheft A1 und Aufgabe 34 in Testheft B1.

Auch das Erkennen und Nutzen von Beziehungen zwischen einer dreidimensionalen Darstellung eines Objektes und einer zweidimensionalen Ansicht (z. B. von oben) ist ein Aspekt der Nutzung räumlichen Vorstellungsvermögens: **Darstellungen übertragen** - Aufgabe 26 und 30 in Testheft A1 und Aufgabe 35 in Testheft B1.

9.1.2 Mögliche Schwierigkeiten

Mentales Bewegen

Bei Aufgabe 28 in Testheft B1 ist die Klappbewegung des Buchdeckels gedanklich nachzuvollziehen und die Positionierung des Lochs nach dem Klappvorgang zu bestimmen.



Wenn Schwierigkeiten bei der Raum-Lage-Wahrnehmung bestehen, wird das intuitive Erkennen erschwert. So könnte die Wahrnehmung des Lochs auf der linken Seite des Buchdeckels vor dem

Zuklappen zu dem Schluss führen, dass auch nach dem Bewegungsvorgang das Loch weiterhin links verbleibt.

Es kann jedoch auch durch Kombination zweier von einer Bewegung unabhängiger Aspekte die richtige Lösung erkannt werden:

Das Loch befindet sich direkt am Rand [Eingrenzung auf Erdbeere und Banane].

Das Loch ist im aufgeklappten Zustand maximal weit entfernt von der Erdbeere [Lösung: Banane]. (Dies ist jedoch nur dann hilfreich, wenn realisiert wird, dass dieser Abstand auch nach dem Zuklappen gleichbleibt.)

Bei Aufgabe 27 in Testheft A1 müssen die jeweils identischen Würfelbauwerke aus verschiedenen Perspektiven erkannt und paarweise zugeordnet werden, indem diese mental gedreht werden.

Hierbei kann die Anzahl der verwendeten Würfel nicht genutzt werden, um eine (teilweise) Zuordnung vorzunehmen, da alle Bauwerke aus jeweils 4 Würfeln bestehen.

	Diesem Kind gelingt es, die jeweils in nur einer Ebene konstruierten Bauwerke korrekt zuzuordnen. Es fehlt die Zuordnung der beiden weiteren Körper – wohl aufgrund der komplexeren Gestaltung über zwei Ebenen.
	Es gelingt besser Bauwerke, die nur horizontal oder nur vertikal gedreht werden (und die zudem relativ einfach strukturiert sind), erfolgreich zuzuordnen. Schwierigkeiten bereiten besonders die Objekte, die horizontal und vertikal gedreht sind.
	Eine grundsätzliche Schwierigkeit stellt es für manche Kinder dar, bei Aufgaben mit Zuordnung durch Strichverbindungen den Überblick zu behalten. Hier wird übersehen, dass eine (die letzte verbleibende) Verbindung noch fehlt.

Aufgabe 24 in Testheft B1 erfordert zunächst die Kenntnis und Fähigkeit zur Anwendung des Begriffs „rechts“. Bestehen Unsicherheiten in der Zuordnung „rechts – links“, führt dies zu Schwierigkeiten bei der Bearbeitung.

Schwierigkeiten bereitet vielen Kindern der zusätzlich erforderliche Perspektivenwechsel. So wird oft vorschnell das erste Bild ausgewählt, auf dem die Positionierung der Blume aus Sicht des Betrachters zwar rechts, aus Olivias Perspektive jedoch links ist.

Ob diese Fehleinschätzung im Einzelfall aufgrund einer „Rechts-Links-Problematik“ oder eines nicht gelungenen Perspektivwechsels erfolgte, lässt sich nur im Gespräch mit dem Kind klären.



Mentales Operieren in der Ebene

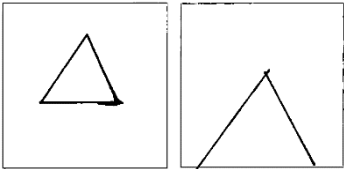
Nur die wenigsten Kinder kennen alle 11 möglichen Würfelnetze sicher auswendig. So kann bei Aufgabe 34 in Testheft A1 zwar das korrekte Netz (2) vermutlich von vielen Kindern alleine aufgrund der hinlänglich bekannten Form als richtig identifiziert werden, die anderen können jedoch nicht mit Sicherheit durch Auswendigwissen ausgeschlossen werden. Auch das Abzählen der Quadrate – jeweils 6 – erbringt hier keine zusätzliche Erkenntnis. Daher muss das gedankliche Falten der Netze erfolgen, um die drei Nicht-Würfelnetze als solche zu erkennen. Dies kann Kindern mit Problemen beim gedanklichen Operieren mit Faltvorgängen Schwierigkeiten bereiten. Eine weitere Fehlerquelle kann Unsicherheit bei der Begriffs- und Eigenschaftszuordnung zu „Würfel“ und „Würfelnetz“ darstellen.

	Bei beiden Figuren lässt sich die „Vierer-Reihe“ als ein „Gürtel“ eines Würfels von vielen Kindern gut identifizieren. Es muss im nächsten Schritt erkannt werden, dass im einen Fall das „Anklappen“ der beiden weiteren Quadrate zu einer Überlappung der Flächen und damit nicht zur Entstehung eines Würfels führt, im anderen Fall jedoch ein Würfel resultiert.
	Die komplexe Form dieser Figur stellt einen höheren Anforderungsgrad dar. Bei geringer ausgeprägter Raum-Lage-Erkennung bzw. Fähigkeit zum gedanklichen Falten können Schwierigkeiten beim Erkennen der Überlappungen, die sich beim Falten ergeben, auftreten.
	Die fünf in einer Reihe liegenden Quadrate können bei Kenntnis der Eigenschaften des Würfels auch bei geringerer Sicherheit im gedanklichen Operieren zum Ausschluss dieses Netzes verwendet werden.

Ausgangspunkt der Aufgabe 34 in Testheft B1 ist ein Quadrat, das durch Einzeichnen von Geraden in Teilfiguren zerlegt werden soll. Zur Lösung der Aufgabe ist geometrisches Vorstellungsvermögen gefordert. So werden Lösungsprozesse in der mentalen Ebene gefordert, die durch gedankliche Aktivitäten wie visuelles Zergliedern gekennzeichnet sind. Beim Zerlegen des Quadrats in Aufgabe 34 in Testheft B1 wird die gleichzeitige Berücksichtigung zweier Vorgaben gefordert:

- (a) Einzeichnen von zwei geraden Linien.
- (b) Dabei entstehen 3 Dreiecke.

	Lediglich der erste Teil der Vorgabe (a) wird berücksichtigt oder kann umgesetzt werden. Grund hierfür könnten einerseits Probleme beim Aufgabenverständnis sein, aber auch die Schwierigkeit, durch gedankliches Operieren eine Möglichkeit zu identifizieren, Dreiecke entstehen zu lassen.
	Hier wird (a) umgesetzt und auch (b) angestrebt, es entstehen jedoch jeweils nur zwei Dreiecke. Nicht bewältigt werden kann die Schwierigkeit, durch Kreuzen / Berühren der Linien drei Dreiecke entstehen zu lassen.

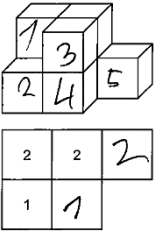
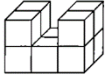
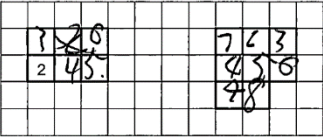
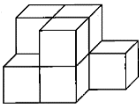
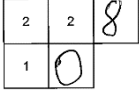
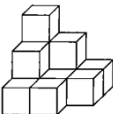
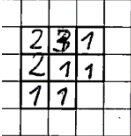
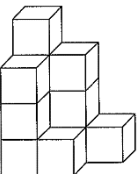
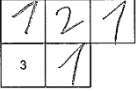
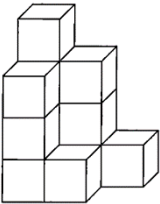
	Die Anforderung (b) (Dreiecke sollen entstehen) wird umzusetzen versucht. Dabei wird die Anzahl der einzuzeichnenden Linien nicht beachtet (a) und/oder die Anzahl der Dreiecke, die entstehen sollen.
---	---

Während das Verstehen der Begrifflichkeiten (gerade Linien, Dreieck) i.d.R. keine zentrale Problematik darstellen dürfte, birgt die Umsetzung der Kombination *beider* Vorgaben durchaus Schwierigkeiten:

Darstellungen übertragen

Die Schüler*innen sollen die als Schrägbild dargestellten Würfelgebäude erfassen und jeweils den begonnenen Bauplan ergänzen bzw. einen Bauplan erstellen. Dazu müssen sie die Beziehung zwischen der dreidimensionalen Darstellung und der zweidimensionalen Ansicht von oben herstellen.

Aufgabe 26 und 30 in Testheft A1, Aufgabe 35 in Testheft B1

 a)  b)  	Wenn bislang noch nicht mit den verschiedenen Darstellungsformen <i>Bauwerk</i> – <i>Bauplan</i> gearbeitet wurde oder das grundsätzliche Verständnis hierzu fehlt, stellt die Bearbeitung dieser Aufgaben grundsätzlich eine Schwierigkeit dar. In den nebenstehenden Beispielen nummerieren die beiden Kinder die vorderen Quadrate des Bauwerks bzw. die Felder des Plans durch.
 	Hier muss von einem fehlenden Verständnis der Aufgabenstellung ausgegangen werden: Es wird die gesamte Anzahl der Würfel bestimmt und notiert.
b)  	Bei mehreren „Türmen“ kann zwar die Höhe der Türme korrekt ermittelt werden – die Zuordnung der entsprechenden Türme zur richtigen Position hingegen gelingt nicht.
 	Eine besondere Schwierigkeit bei der Erstellung von Bauplänen zu Würfelbauwerken stellt die Tatsache dar, dass in der zeichnerischen Darstellung nicht immer alle Würfel sichtbar sind. In diesem Beispiel hat das Kind lediglich die jeweils sichtbaren Würfel berücksichtigt.
 	Auch in dieser richtigen Lösung wird die Schwierigkeit erkennbar, die nicht sichtbaren Würfel berücksichtigen zu müssen: Vor der Korrektur wurden die „am wenigsten präsenten“ Würfel (unterste Ebene hinten) zunächst nicht mitgezählt.

9.1.3 Anregungen für den Unterricht

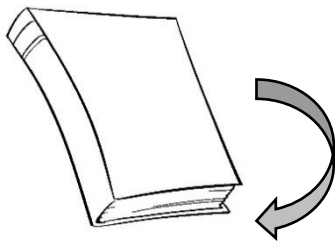
Mentales Bewegen von Objekten

Die Grundlage für die Fähigkeit zum gedanklichen Drehen bilden konkrete Handlungserfahrungen, die sprachlich begleitet werden.

Die Lernenden können hier gut mit einem Partnerkind zusammenarbeiten. Ein Kind dreht Gegenstände aus dem Alltag z. B. ein Buch, die Federtasche etc. und beschreibt mündlich die Handlung. Das Partnerkind beschreibt die beobachteten Veränderungen (→ Kommunizieren)

Kind 1: Ich drehe das Buch im Uhrzeigersinn.

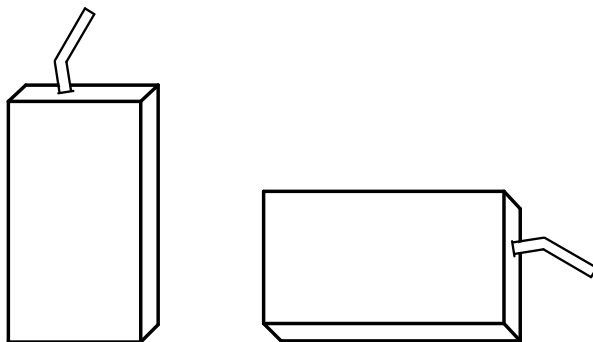
Kind 2: Der Rücken des Buches wandert von der linken auf die rechte Seite.



Bei Gegenständen mit Kanten, z. B. einem Trinkpäckchen, kann auch die „Kippbewegung“ thematisiert werden.

Kind 1: Ich kippe das Trinkpäckchen über die rechte untere Kante.

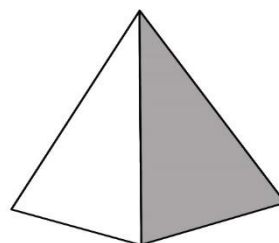
Kind 2: Der Strohhalm ist nun auf der rechten Seite.



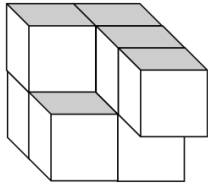
Ähnlich kann man beim Bewegen geometrischer Objekte vorgehen (Aufgabe 27 in Testheft A1). Auch hier werden zunächst konkrete geometrische Körper und Bauwerke bewegt und die Veränderungen beschrieben.

Kind 1: Ich kippe die Pyramide nach rechts.

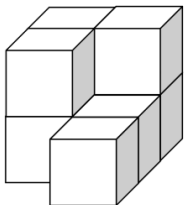
Kind 2: Die Spitze der Pyramide ist jetzt rechts.



Darüber hinaus können auch konkrete Objekte aus mehreren Bauteilen (zum Beispiel aus Steckwürfeln) genau betrachtet und die Lage markanter Merkmale beschrieben und markiert werden: z. B.: „Ich sehe eine Dreier-Stange oben rechts im Gebäude.“, „Ich sehe vorne links einen Würfel in der unteren Schicht, auf dem kein anderer Würfel liegt.“, „Ich sehe einen überstehenden Würfel, oben, vorne rechts.“



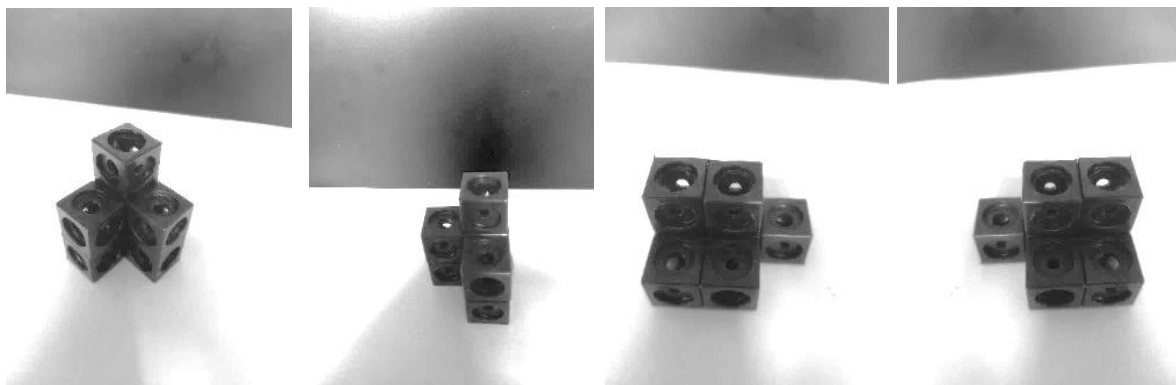
Nach der Drehung der Objekte wird die Lage der bereits beschriebenen, markanten Merkmale überprüft und erneut beschrieben: z. B. „Die Dreier-Stange liegt jetzt unten rechts.“, „Der Würfel liegt jetzt in der linken Schicht, vorne in der oberen Reihe. Die freie Stelle ist jetzt links von diesem Würfel.“, „Der überstehende Würfel liegt jetzt unten rechts.“



Bei nachfolgenden Aufträgen zu Bauwerken aus Steckwürfeln werden zunächst Vermutungen zur Lage der markanten Merkmale formuliert und mit der tatsächlichen Bewegung überprüft, z. B.: „Kippe das Bauwerk in Gedanken nach links. Wo wird sich dann der überstehende Würfel befinden?“

Zunehmend sollte es den Lernenden gelingen, nun auch markante Merkmale in der bildlichen Darstellung von geometrischen Objekten zu finden und sich einzuprägen. Nun geht es um das Wiedererkennen der markanten Merkmale, um zu beurteilen, ob es sich um das gleiche Objekt handelt, und um die Beurteilung der Lage der markanten Stellen, um zu beurteilen, wie das Objekt bewegt wurde.

Fotografiert man geometrische Objekte in verschiedener Lage, lassen sich z. B. Quartette herstellen, die man für Zuordnungsübungen im Unterricht nutzen kann.



Copyright Fotos: IQB

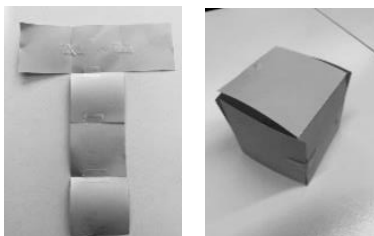
Differenzierend könnte auch einer der verwendeten Würfel in einer anderen Farbe gewählt werden.

Mentales Operieren mit Objekten

Beim gedanklichen Operieren *mit* Objekten wird nicht zwangsläufig das ganze Objekt bewegt bzw. analysiert, sondern es werden Teile des Objekts gefaltet, abgeschnitten, geklappt, gedreht, unterteilt, usw.

Ein Beispiel hierfür ist das mentale Aufklappen von Würfelnetzen. Konkrete Handlungserfahrungen sind unerlässlich in der Auseinandersetzung mit Würfelnetzen. So sind die geometrischen Zusammenhänge zwischen Würfelnetz und Würfel handelnd erfahrbar zu gestalten. Im Fokus steht die Veranschaulichung und die Erschließung zwischen der Ebene (Würfelnetz) und dem Raum (Würfel).

Als hilfreiches und unterstützendes Material gestaltet sich u. a. das Material „Geo-Clix“ (Westermann-Verlag) oder „Magnetic Polydron“ (Betzold-Verlag). Sollte dieses oder vergleichbares Material nicht vorhanden sein, kann auch mit quadratischen Papier-/Pappe-Formen (z. B. Notizzetteln) gearbeitet werden. Diese können mit Klebestreifen versehen und zu einem Würfel und/oder zu einem (vermeintlichen) Würfelnetz zusammengesetzt werden.



Copyright Fotos: IQB

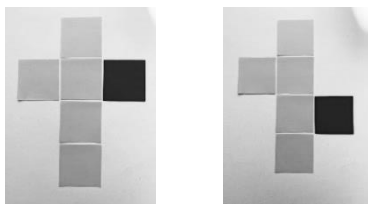
Ausgangssituation:

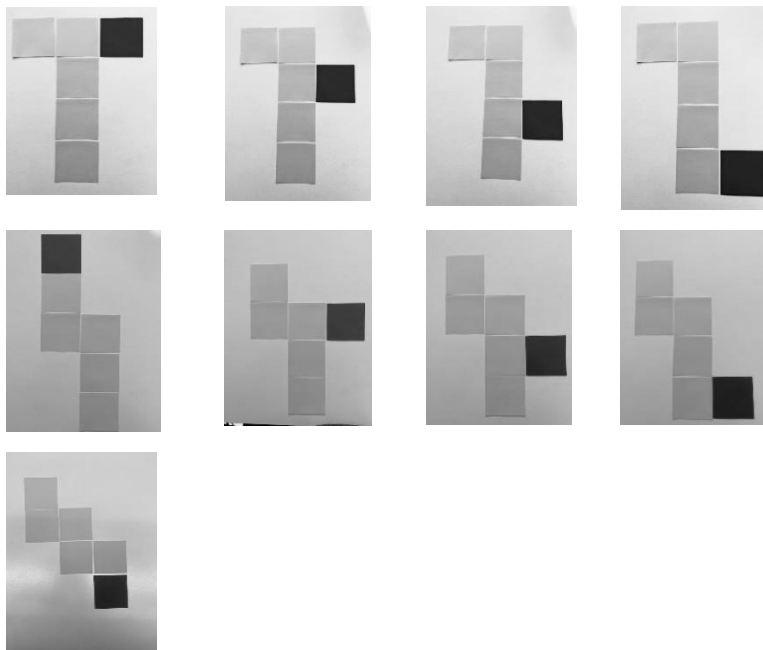
Ausgehend von einem „geklebten“ Würfel kann dieser in eines seiner 11 Würfelnetze auseinandergefaltet werden, um den geometrischen Zusammenhang von Würfel und Würfelnetz zu visualisieren. Im Nachgang können dann die Kinder im Rahmen eines aktiv-entdeckenden Vorgangs mithilfe der quadratischen Flächen Würfelnetze suchen, indem sie die einzelnen quadratischen Flächen zusammenkleben und überprüfen, ob es sich um ein Würfelnetz handelt. In dieser Auseinandersetzung können Auffälligkeiten und Kriterien für das Funktionieren des Faltvorgangs eines Würfelnetzes zu einem Würfel erarbeitet werden.

Die dynamischen Faltvorgänge lassen sich auch ergänzend durch die kostenfreie digitale Nutzung der APP „Klipp Klapp“ (<https://dlqs.uni-potsdam.de/apps/klipp-klapp>) anschaulich überprüfen.

Weiterführung:

Ein erweiterter Zugang zu Würfelnetzen ist die Strategie der Lageveränderung einer Würfelfläche innerhalb eines „funktionierenden“ Würfelnetzes. So wird eine Fläche systematisch umgelegt und im Nachgang geprüft, ob ein neues Würfelnetz entsteht. (→ Problemlösen)



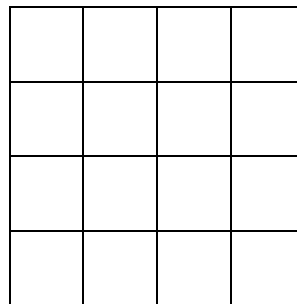


Copyright Fotos: IQB

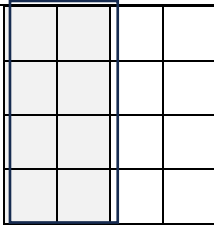
Durch mentales Operieren und im Austausch in der Gruppe werden möglichst viele verschiedene Würfelnetze gefunden und dabei Charakteristika und Kriterien für verschiedene Würfelnetze entdeckt und angewendet.

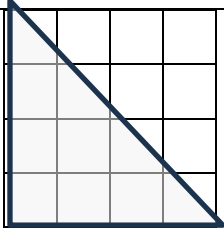
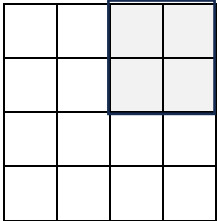
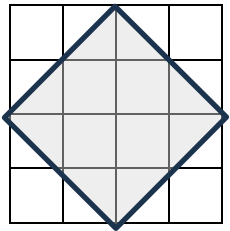
Eine trainierende handelnde Übung für das mentale Operieren kann durch mentales Verschieben, Falten, bzw. Aufklappen und Zerlegen erfolgen.

Ausgangsfigur ist ein **ausgeschnittenes Quadrat**, das 16 Quadrate (Q) groß ist (vgl. Radatz & Schipper, 1983).



Konkrete Faltaufträge tragen dazu bei, das mentale Operieren anzuregen:

Falte (oder zeichne) ein Rechteck, das 8Q groß ist. Findest du weitere Lösungen?	
--	---

Falte (oder zeichne) ein Dreieck, das 8Q groß ist. Findest du weitere Lösungen?	
Falte (oder zeichne) ein Quadrat, das 4Q groß ist. Findest du weitere Lösungen? Wie viele Lösungen gibt es?	
Zur Differenzierung: Falte (oder zeichne) ein Quadrat, das 8Q groß ist.	

Nachstehend weitere Faltaufgaben, die das mentale Operieren mit Hilfe dieses „einfachen“ Materials fördern und fordern:

Falte oder zeichne...

- ... ein Quadrat mit 1, 2, 4, 8, 9 Q.
- ... ein Dreieck mit 1, 2, 3, 4 Q.
- ... ein Rechteck mit 2, 4, 8 Q.
- ... ein Fünfeck mit 6 Q.
- ... ein Sechseck mit 6, 7 Q.
- ... ein Achteck mit 14 Q.
- ...

Aus der konkret handelnden Auseinandersetzung können sich zeichnerische Aktivitäten an geometrischen Ausgangsformen anschließen:

Ausgangsform ist ein Quadrat:



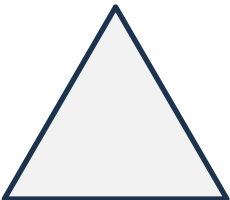
Zeichne eine gerade Linie ein, so dass 2 Dreiecke entstehen.	Geringes Anforderungsniveau
Zeichne eine gerade Linie ein, so dass 2 Rechtecke entstehen.	Geringes Anforderungsniveau
Zeichne 2 gerade Linien ein, so dass 4 Quadrate entstehen.	Geringes Anforderungsniveau
Zeichne 2 gerade Linien ein, so dass 4 Dreiecke entstehen.	Geringes Anforderungsniveau

Höhere Anforderungen an das Aufgabenformat sind entsprechend zu konstruieren:

Zeichne 2 gerade Linien ein, so dass 3 Dreiecke entstehen.	Höheres Anforderungsniveau
Zeichne 2 gerade Linien ein, so dass 1 Rechteck und 2 Dreiecke entstehen	Höheres Anforderungsniveau

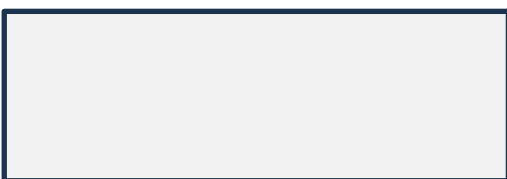
Grundsätzlich kann auch die geometrische Ausgangsform variiert werden. Rechteck und Dreieck eignen sich entsprechend für Aufgabenstellungen:

Ausgangsform Dreieck:



Zeichne 1 gerade Linie ein, so dass 2 Dreiecke entstehen.	Geringes Anforderungsniveau
Zeichne 1 gerade Linie ein, so dass 1 Viereck und 1 Dreieck entstehen.	Höheres Anforderungsniveau
Zeichne 2 gerade Linien ein, so dass 3 Dreiecke entstehen.	Höheres Anforderungsniveau

Ausgangsform Rechteck:



Zeichne 1 gerade Linie ein, so dass 2 Dreiecke entstehen.	Geringes Anforderungsniveau
Zeichne 1 gerade Linie ein, so dass 1 Dreieck und 1 Viereck entstehen	Geringes Anforderungsniveau
Zeichne 2 gerade Linien ein, so dass 3 Dreiecke entstehen.	Höheres Anforderungsniveau
Zeichne 2 gerade Linien ein, so dass 1 Rechteck und 2 Dreiecke entstehen.	Höheres Anforderungsniveau

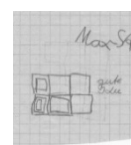
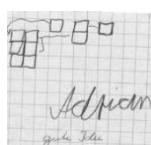
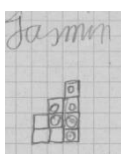
Hier bietet es sich auch an, dass Schüler*innen eigene Aufgabenstellungen erfinden.

Darstellungen übertragen

Um die Beziehung zwischen realen oder bildhaften Würfelgebäuden und deren Bauplänen zu erfassen, ist räumliches Vorstellungsvermögen notwendig. Dieses ist bei Kindern unterschiedlich ausgeprägt und kann durch handlungsorientiertes Lernen unterstützt werden.

- Freies Bauen und Beschreiben der entstandenen Objekte
- Würfelgebäude nachbauen
- Würfelgebäude nach Anweisung bauen
- Würfelgebäude nach Schrägbildern bauen
- Baupläne zu realen Würfelgebäuden zeichnen
- Baupläne zu Schrägbildern von Würfelbauwerken zeichnen
- Baupläne ergänzen
- Zuordnungen zwischen Bauplänen und Würfelgebäuden

Beim aktiv entdeckenden Lernen können die Kinder nach dem freien Bauen und Herstellen von Würfelbauwerken aufgefordert werden, ihre Würfelgebäude so auf Papier festzuhalten, dass andere sie nachbauen können. Dabei werden Beschreibungen der Lagebeziehungen durch kurze Sätze oder erste einfache Skizzen entstehen (→ Darstellen).



Copyright Fotos: IQB

Die Schwierigkeit der Beschreibung mit Wörtern oder der Deutung der einzelnen Skizzen bei gleichem Würfelbauwerk führt zur Erkenntnis, dass es sinnvoll ist, Vereinbarungen zum Erstellen von Bauplänen zu treffen.

Zum Verständnis des Zusammenhangs zwischen einem dreidimensionalen Objekt (Würfelgebäude) und einer zweidimensionalen Darstellung (Bauplan) kann der Umriss des Würfelbauwerkes auf ein Blatt Papier aufgezeichnet (mit dem Stift umfahren) und die Entstehung des Bauplanes nachempfunden werden.



Copyright Fotos: IQB

So wird deutlich, dass die Standfläche des Bauwerkes den Grundriss des Bauplanes (unterteilt in Quadrate) ergibt. Die Kinder erkennen dadurch den Vorteil und die Eindeutigkeit der räumlichen Anordnung der Würfel im Bauplan.

Folgende Aufgabenstellungen sind zur weiteren Übung möglich:

- Zeichnen des Grundrisses zu Würfelbauwerken.
- Zählen der Anzahl der Würfel und Eintragen der Höhe an der jeweiligen Position eines Bauplanes
- Bauen von Würfelgebäuden mit vorgegebener Anzahl an Würfeln und Erstellen der Baupläne dazu (z. B. „Baue verschiedene Würfelgebäude mit genau 5 Würfeln und zeichne jeweils den Bauplan dazu“ (→ Problemlösen))
- Erstellen von verschiedenen Bauplänen zu einem Bauwerk („Zeichne verschiedene Baupläne zu einem Würfelgebäude.“ Tipp: „Verändere die Lage des Bauwerkes“)
- Zuordnen von Bauplänen zu Würfelgebäuden und begründen (→ Argumentieren)
- Ergänzen von Bauplänen zu Würfelgebäuden
- Vorstellungen zu Bauplänen entwickeln und beschreiben (z. B. „Wie sieht das Bauwerk aus, das nach dem Bauplan entsteht?“ – Treppe, Brücke, Schüssel ...) (→ Kommunizieren)
- Lesen und Schreiben von Bauplänen (Eigenproduktionen)

Möglichkeiten zur Differenzierung:

Die Schwierigkeit der Aufgaben beim Erstellen und Ergänzen von Bauplänen wird durch die Anzahl der verwendeten Würfel bzw. der Komplexität des Würfelbauwerkes bestimmt bzw. beeinflusst.

Als Hilfe kann auf einer Bauunterlage oder Aufgabenkarte gebaut werden, bei der der Grundriss des Bauplanes genau der Größe der Würfel entspricht.

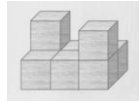


Copyright Fotos: IQB

Spielerische Übungsformen können die Entwicklung des Vorstellungsvermögens sowie das Üben der Zuordnung von Würfelbauwerk und Bauplan sowie umgekehrt unterstützen.

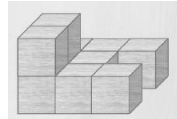
- Paare finden

(Karten mit Abbildungen von Würfelbauwerken müssen dem richtigen Bauplan zugeordnet werden.)



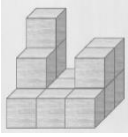
1	3	3
1	2	1
1	1	1

1	1	2
2	1	2
1	1	2



- Domino

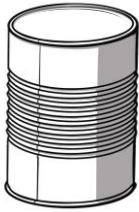
Start	3	1	2
	2	1	2
	1	1	1

	1	3	3
	1	2	1
	1	1	1

In diesem Kontext können auch Eigenproduktionen entstehen, bei denen die Kinder selbst Dominokarten oder Paare herstellen.

9.2 Aufgaben zu Körpern und Flächen

Aufgabe 27 in Testheft B1



Welche Flächenform siehst du, wenn du von oben auf diese Dose schaust?

RICHTIG	Kreis
---------	-------

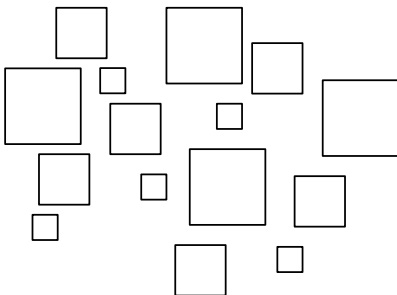
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Körper und ebene Figuren in der Umwelt wiedererkennen (2.2.b)

Aufgabe 29 in Testheft B1

Niklas schneidet Flächen aus.

Kreuze die Flächen an, mit denen Niklas ein vollständiges Würfelnetz legen kann.



RICHTIG	Die Aufgabe ist richtig gelöst, wenn alle 6 gleich großen Quadrate markiert sind. vgl. Lösungsgrafik
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)

Aufgabe 32 in Testheft A1

Wie viele Flächen haben diese Körper?

Trage ein.

	Körper	Anzahl der Flächen
a)	Kugel	_____
b)	Quader	_____

RICHTIG	1
RICHTIG	6

Teilaufgabenmerkmale

	01	03
Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	II	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)

Aufgabe 26 in Testheft B1

Wie viele Flächen haben diese Körper?

Trage ein.

	Körper	Anzahl der Flächen
a)	Kegel	_____
b)	Zylinder	_____

RICHTIG	2
RICHTIG	3

Teilaufgabenmerkmale

	02	04
Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	II	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)

Aufgabe 33 in Testheft A1

Schreibe den Namen des Körpers auf.



Welcher Körper ist es? Er hat 8 Ecken, 6 gleich große Flächen und 12 Kanten.

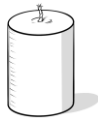
RICHTIG	Quader UND/ODER Würfel
---------	------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)

Aufgabe 24 in Testheft A1

Welche Begriffe passen zu den Gegenständen?
Verbinde.

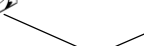


Kugel

Quader

Zylinder

Würfel

RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik			
				
				
	Kugel	Quader	Zylinder	Würfel
Wenn der Zauberwürfel zusätzlich mit dem Begriff Quader verbunden ist, ist das ebenfalls als richtig zu werten.				

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Körper und ebene Figuren in der Umwelt wiedererkennen (2.2.b)

9.2.1 Aufgabenbezogener Kommentar

	Räumliches Vorstellungsvermögen (2.1.a)	Kantenmodelle und Netze untersuchen (2.1.c)	Nach Eigenschaften untersuchen und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	Körper und ebene Figuren wiedererkennen (2.2.b)
<u>Aufgabe 27 in Testheft B1</u>	x			x
<u>Aufgabe 29 in Testheft B1</u>		x		
<u>Aufgabe 32 in Testheft A1</u>	x		x	
<u>Aufgabe 26 in Testheft B1</u>	x		x	
<u>Aufgabe 33 in Testheft A1</u>			x	
<u>Aufgabe 24 in Testheft A1</u>				x

Ergänzend zu den in der Tabelle in Bezug auf Körper und Flächen aufgeführten Aspekten, werden in den vorliegenden Aufgaben folgende Fähigkeiten benötigt:

Aufgabe 27 in Testheft B1: Bei dieser Aufgabe wird räumliches Vorstellungsvermögen benötigt, um die Dose gegebenenfalls als Zylinder zu identifizieren und die – in der perspektivischen Zeichnung – ovale Oberfläche der abgebildeten Dose entsprechend als Kreis zu erkennen. Zur korrekten Benennung der Fläche muss der Begriff der geometrischen Fläche „Kreis“ bekannt und sicher verfügbar sein.

Aufgabe 29 in Testheft B1: Zur korrekten Lösung dieser Aufgabe muss bekannt sein, dass ein vollständiges Würfelnetz 6 gleichgroße Quadrate erfordert.

Aufgabe 32 in Testheft A1 und Aufgabe 26 in Testheft B1: Hier muss bei verschiedenen geometrischen Körpern die Anzahl der Flächen in der Vorstellung bestimmt werden. Das räumliche Vorstellungsvermögen muss dabei soweit ausgeprägt sein, dass sich das Kind einen Körper mit all seinen Seiten vorstellen kann, und auch die Unterseite des Körpers berücksichtigt. Es ist notwendig, dass auch gekrümmte Flächen als Flächen erkannt werden.

Aufgabe 33 in Testheft A1: Mithilfe der genannten Merkmale über Ecken, Kanten und Flächen, setzt sich das Kind gedanklich ein Bild des gesuchten geometrischen Körpers zusammen und muss diesen schriftlich benennen. Dazu muss räumliches Vorstellungsvermögen vorhanden und der Fachbegriff bekannt sein.

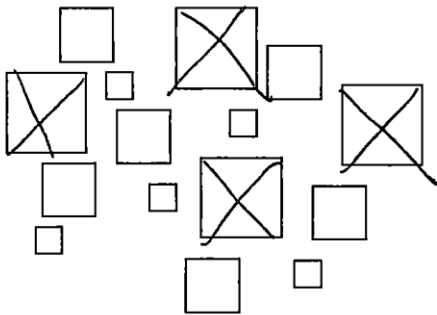
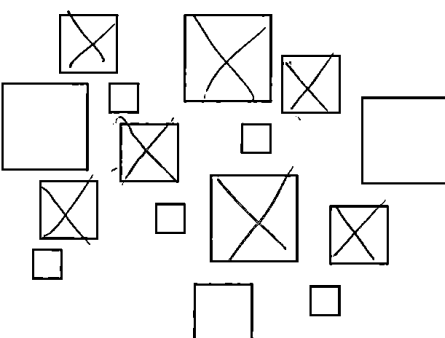
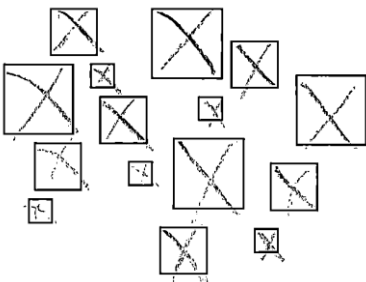
Aufgabe 24 in Testheft A1: Die gezeigten Alltagsgegenstände müssen als geometrische Körper erkannt und mit dem richtigen Fachbegriff verbunden werden.

9.2.2 Mögliche Schwierigkeiten

Aufgabe 27 in Testheft B1

<u>Ein Zylinder</u>	Unterscheidung Körper / Fläche ist nicht gefestigt.
<u>Eine Runde Fläche</u>	Die Fachbegriffe der Flächen, in diesem Fall der Kreis, sind nicht gefestigt.
<u>Kugel</u>	

Aufgabe 29 in Testheft B1

	Es wurde nicht beachtet, dass ein vollständiges Würfelnetz 6 gleichgroße Quadratflächen erfordert.
	Hier wurden unterschiedlich große Quadrate angekreuzt, die Anzahl wurde nicht beachtet.
	Der Inhalt der Aufgabe, nur die Quadrate anzukreuzen, die ein vollständiges Würfelnetz ergeben, wurde nicht erfasst.

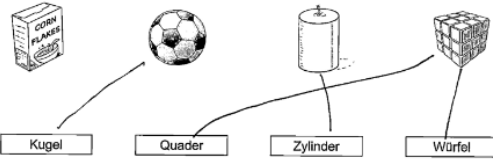
Aufgabe 32 in Testheft A1 und Aufgabe 26 in Testheft B1

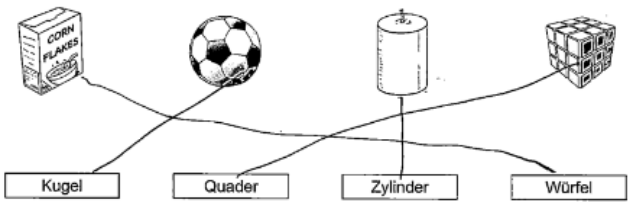
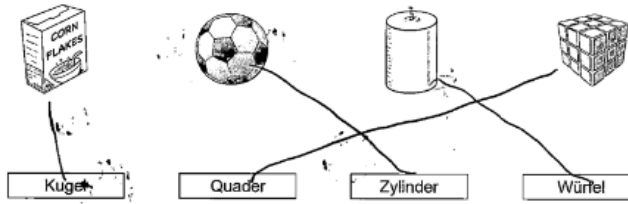
Kugel: 0	Gekrümmte Flächen werden nicht als Fläche erkannt.
Kegel: 1	
Zylinder: 2	
Kegel: 1	Die Fläche auf der Unterseite wird nicht mitgezählt.
Quader: 5	
Zylinder: 2	
Kegel: 3,4,5,...	Der Körper ist nicht bekannt.
Zylinder: 4,5,6,...	

Aufgabe 33 in Testheft A1

Schreibe die Namen der Körper auf. a)  Welcher Körper ist es? Er hat 8 Ecken, 6 gleich große Flächen und 12 Kanten. Uwe: <u>6 ECK</u>	Genannte Zahlen und Eigenschaften werden wahllos miteinander verbunden.
Schreibe die Namen der Körper auf. a)  Welcher Körper ist es? Er hat 8 Ecken, 6 gleich große Flächen und 12 Kanten. Uwe: <u>Rechteck</u>	Der Unterschied zwischen Fläche und Körper ist noch nicht gesichert. Vermutlich liegt hier gedanklich die Vorstellung eines Würfels/Quaders vor, der dann fälschlicherweise mit einem Flächenbegriff benannt wird.
Schreibe die Namen der Körper auf. a)  Welcher Körper ist es? Er hat 8 Ecken, 6 gleich große Flächen und 12 Kanten. Uwe: <u>Pyramide</u>	Es ist noch keine gesichert räumliche Vorstellung oder Wissen über geometrische Körper vorhanden.

Aufgabe 24 in Testheft A1

Welche Begriffe passen zu den Gegenständen? Verbinde.  Kugel Quader Zylinder Würfel	Der Abbildung des Würfels wurde richtigerweise auch der Begriff des Quaders zugeordnet. Da alle Begriffe einem Gegenstand zugeordnet sind, wird der letzte Gegenstand vermutlich vergessen.
---	---

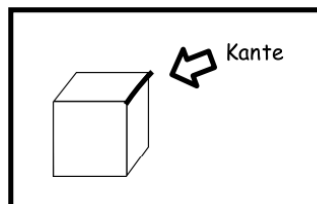
Welche Begriffe passen zu den Gegenständen? Verbinde. 	Die Begriffe Quader und Würfel wurden vertauscht – Begrifflichkeiten noch nicht gesichert. Möglicherweise wurde die Abbildung des Würfels (richtigerweise) mit dem Begriff des Quaders verbunden und der übrige Begriff „Würfel“ dann fälschlicherweise mit dem übrigen Bild (Quader) verbunden.
Welche Begriffe passen zu den Gegenständen? Verbinde. 	Die Namen der geometrischen Körper sind nicht bekannt. Es wurde nur geraten.

9.2.3 Anregungen für den Unterricht

Körper

Eigenschaften und Besonderheiten geometrischer Körper verinnerlichen Schüler*innen am nachhaltigsten über konkrete Handlungserfahrungen.

Die Hinführung erfolgt über die Vorstellung von Alltagsgegenständen, wie z. B. einer Cornflakes-Packung, einer Dose, einem Fußball, einem Würfel usw. Gemeinsam werden die Körper beschrieben (→ Kommunizieren) und dabei wichtige Begriffe wie Ecke, Kante und Fläche geklärt. Diese können in Form von Plakaten an die Wand gehängt werden:



Copyright Abbildung: IQB

Sind (Holz-) Modelle der Körper vorhanden, ist auch das „Erfühlen“ der Merkmale der Körper eine nachhaltige Erfahrung. Dabei erfühlen die Schüler*innen die mit einem Tuch zugedeckten Körper und müssen sie benennen.

Beim darauffolgenden Nachbauen vorgegebener Körper nach Anleitung, Modellen oder Bildern, sind die Schüler*innen darauf angewiesen, genau zu betrachten, Flächen, Kanten und Ecken zu zählen und sich über deren Lage, Form und Länge Gedanken zu machen (→ Problemlösen, Kommunizieren). Gut zum Nachbauen der geometrischen Körper eignen sich Schaschlik-Spieße oder Zahnstocher (als Kanten), die mit eingeweichten Linsen oder kleinen Knetkugeln (als Ecken) miteinander verbunden werden.

Diese selbstgebauten Modelle können im Anschluss in der Klasse mit einem zugehörigen „Namensschild des Körpers“ ausgestellt werden. Durch genaues Betrachten der Modelle können die Schüler*innen Steckbriefe der einzelnen Körper mit der Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen erstellen.

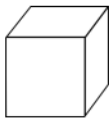
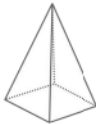
Steckbrief Würfel		
Anzahl der Ecken:	_____	
Anzahl der Kanten:	_____	
Anzahl der Flächen:	_____	
Besonderheiten:	_____	

Copyright Abbildung: IQB

Aus diesen Steckbriefen lassen sich Rätsel erstellen, indem man angegebene Anzahlen von Kanten o. ä. streicht und diese durch die Schüler*innen wieder einsetzen lässt. Je nach Schwierigkeitsgrad sollen eine oder mehrere Angaben ergänzt werden. Als Differenzierung für die leistungsstärkeren Kinder können eingebaute Fehler in den Angaben versteckt sein, die gefunden werden müssen. Anschließend können sich die Kinder darüber austauschen, wie sie die Fehler bzw. die fehlenden Angaben gefunden haben (→ Kommunizieren, Argumentieren).

Sammelt man alle Angaben der Steckbriefe in einer Tabelle, lässt sich so eine Übersicht von geometrischen Körpern als Wandplakat erstellen (s. Beispiel – hier nur eine Auswahl: Achtung: Eine Pyramide kann eine andere Grundfläche haben und dann auch mehr Seitenflächen, Ecken, Kanten, ...).

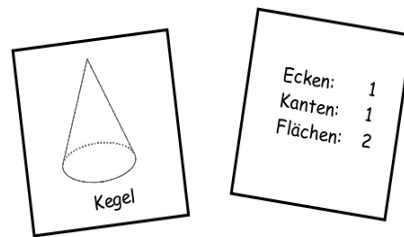
Merkplakat geometrische Körper

	Name der Körper	Anzahl der Ecken	Anzahl der Kanten	Anzahl der Flächen	Besonderheiten
	Quader	8	12	6	gegenüberliegende Flächen gleich groß
	Würfel	8	12	6	Der Würfel ist ein besonderer Quader: er hat sechs gleichgroße, quadratische Flächen
	Kugel	0	0	1	weder Ecken noch Kanten
	Pyramide	5	8	5	viereckige Grundfläche, dreieckige Seitenflächen

Copyright Abbildung: IQB

Als weitere Vertiefung lässt sich ein Memory erstellen, welches ebenfalls in verschiedenen Schwierigkeitsstufen möglich ist. Auf der einen Karte findet man den Namen des Körpers mit oder ohne entsprechendes Bild. Auf der dazugehörigen Karte sind die vollständigen oder auch nur ausgewählte Angaben der Merkmale aufgelistet. Da die Anzahl von Ecken, Kanten und Flächen des Quaders und des Würfels gleich sind, muss man darauf achten, dass aufgrund der Informationen auf der „Merkmal-Karte“ Quader oder Würfel zugeordnet werden können. Oder man erwähnt die zusätzlichen Besonderheiten des Würfels („Alle Flächen sind gleich.“, oder „Alle Flächen sind

Quadrate.“, oder „Alle Kanten sind gleich lang.“). Oder man erstellt bewusst eine „Bild-Karte“, auf der beide geometrischen Körper zu sehen sind und listet auf der „Merkmal-Karte“ die Merkmale auf, die für beide zutreffend sind.



Copyright Abbildung: IQB

Flächen

Die erstellten und vorhandenen Körper können dazu genutzt werden, um Flächen an den Körpern zu zeigen.

Ebene Flächen können aber auch an Gegenständen der Umwelt (z. B. Dosen, Schachteln, ...) gesucht und beschrieben werden (→ Kommunizieren): „Welche Fläche siehst du oben, unten, vorne, hinten, an der Seite?“

Durch Umfahren, Drucken, Abrollen oder Aufschneiden eines Körpers erfahren die Kinder handlungsorientiert, aus welchen Flächen sich ein Körper zusammensetzt. So können auch gekrümmte Flächen als Flächen erkannt werden. Die besondere Stellung der Kugel sollte dabei unbedingt thematisiert werden, da sich deren Fläche nicht abbilden lässt.

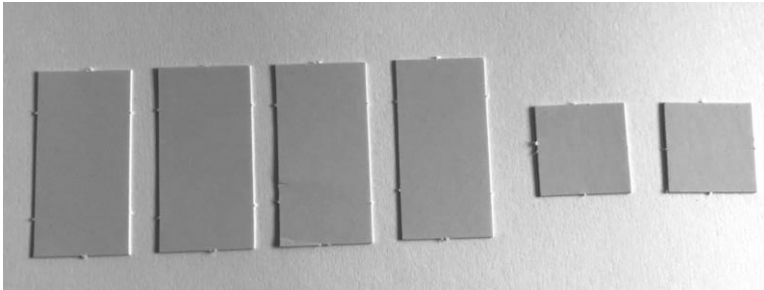
Um diese Erfahrungen festzuhalten, können die Steckbriefe, Plakate und Sammlungen aus der Arbeit mit Körpern genutzt und erweitert werden.

Auch Rätsel eignen sich gut, um die Begriffe der Flächen, die an den Körpern zu entdecken sind, und deren Eigenschaften zu festigen. In einem ersten Schritt werden die Körper zunächst gemeinsam von allen Seiten betrachtet und beschrieben (→ Kommunizieren). Dann wählt sich ein Kind einen Körper aus, beschreibt ihn und die anderen Kinder müssen erraten, um welchen Körper bzw. um welche Fläche es sich handelt. Schließlich können Rätsel ganz ohne Anschauung formuliert werden.

Mein Körper hat oben und unten einen Kreis, die Seitenfläche ist ein Rechteck.

Netze

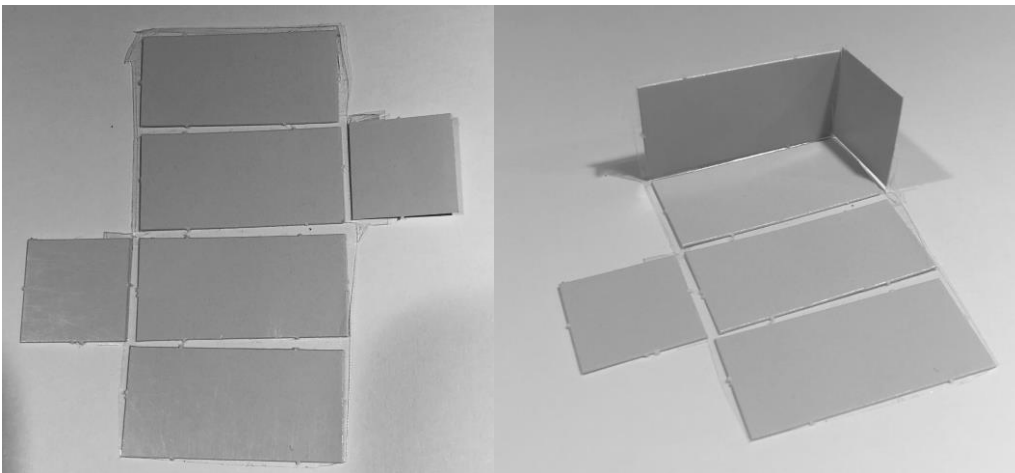
Auf der Grundlage der Arbeit mit Körpern und ihren Flächen, bei denen von den Körpern ausgehend die Flächen und die Netze der Körper betrachtet werden, kann nun von den Flächen auf die Netze und die Körper geschlossen werden.



Copyright Foto: IQB

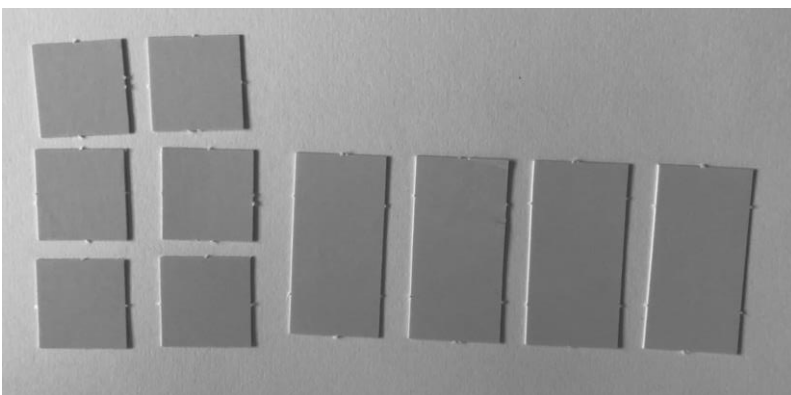
Welches Körpernetz kannst du mit diesen Flächen legen?

Das Aufkleben und Falten hilft Kindern, die noch nicht über das entsprechende räumliche Vorstellungsvermögen verfügen, ihre Ergebnisse zu überprüfen.



Copyright Fotos: IQB

Durch das Hinzufügen weiterer Flächen, auch von Flächen, die nicht relevant sind, lässt sich die Schwierigkeit steigern.

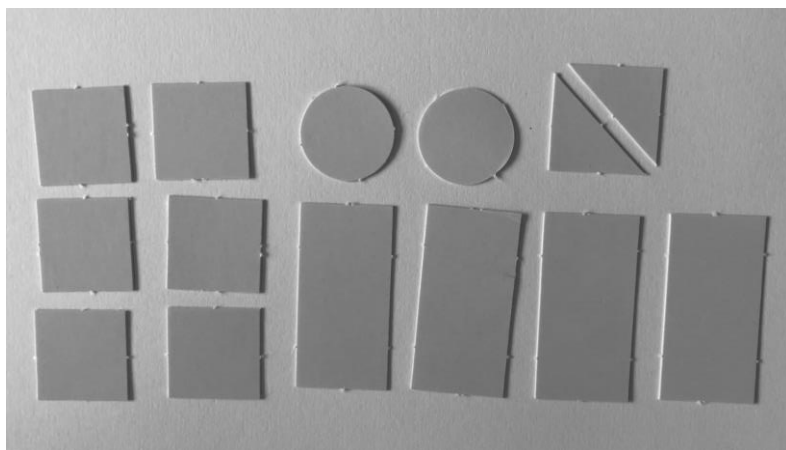


Copyright Foto: IQB

Welche Körpernetze kannst du aus diesen Flächen legen?

Aus einer größeren Anzahl von Flächen können verschiedene Körpernetze gelegt werden.

→ Würfel, Quader



Copyright Foto: IQB

Kannst du aus diesen Flächen das Netz einer Pyramide legen?

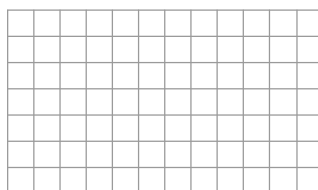
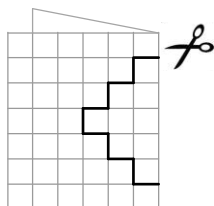
Welche Flächen fehlen, um das Netz einer Pyramide zu legen?

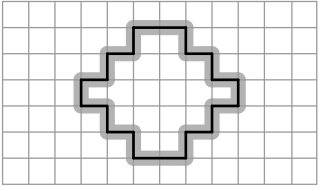
9.3 Aufgaben zu Abbildungen

Aufgabe 31 in Testheft A1

Ugur schneidet die Figur entlang der schwarzen Linie aus. Dann klappt er sie auf.

Welche Figur ist entstanden? Zeichne auf.



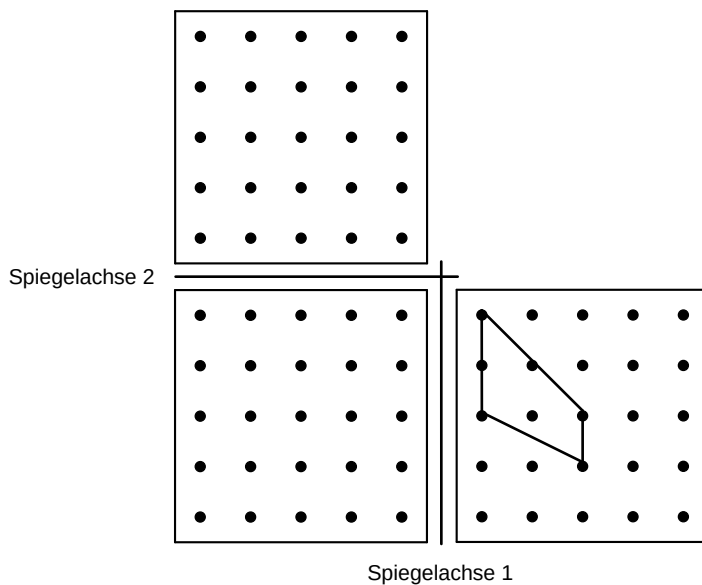
RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich ist grau markiert.)  Die Lage der Figur ist unerheblich.
---------	---

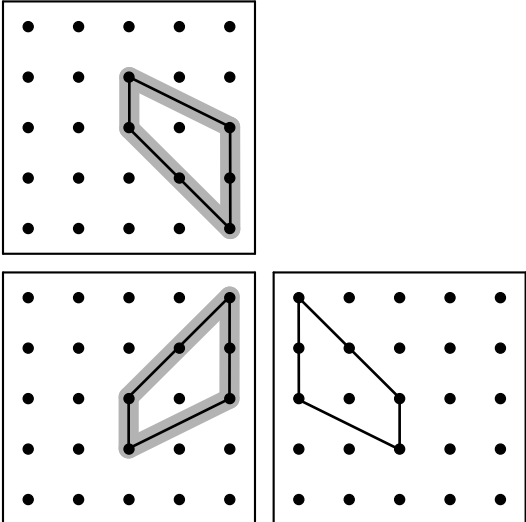
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen (2.2.d); Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)

Aufgabe 32 in Testheft B1

Spiegele die Figur erst nach links, dann nach oben. Zeichne.



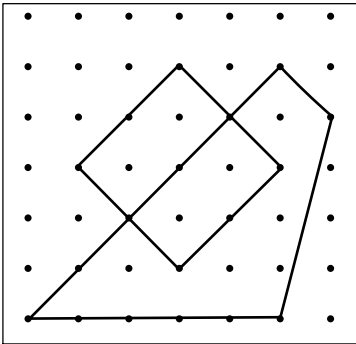
RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich ist grau markiert.)  Auch richtig ist, wenn das Feld unten links leer bleibt.
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

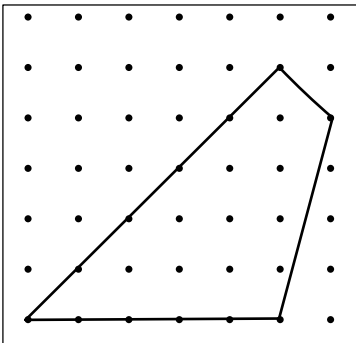
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen (5.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln (2.3.c); Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)

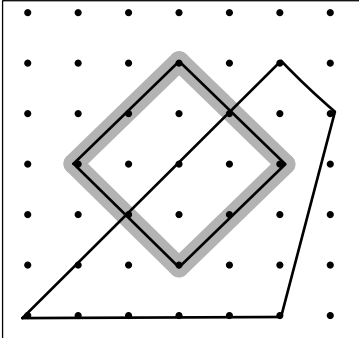
Aufgabe 25 in Testheft A1

Tamino hat diese Figuren auf dem Geobrett gespannt.



Vicki will die Figuren auf ihrem Geobrett nachspannen. Sie hat schon begonnen. Ergänze.



RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich ist grau markiert.) 
---------	--

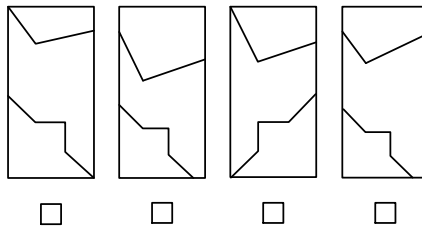
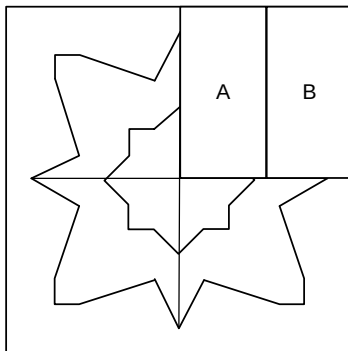
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen (2.2.d); ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern) (2.3.a)

Aufgabe 30 in Testheft B1

Es soll eine symmetrische Figur entstehen. Welches Kärtchen fehlt in A?

Kreuze an.



RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

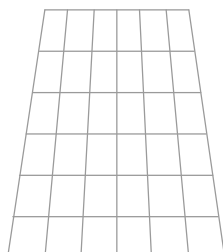
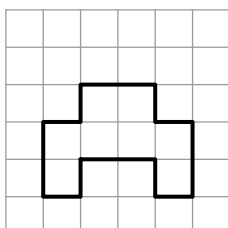
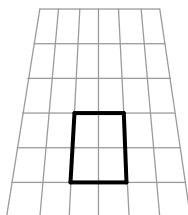
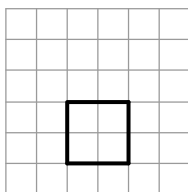
Teilaufgabenmerkmale

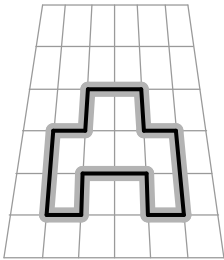
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten) (2.1.b); symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln (2.3.c); Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)

Aufgabe 36 in Testheft A1

Übertrage die Figur in das schräge Gitter daneben.

Beispiel:



RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich ist grau markiert.)  Die Form der Figur ist entscheidend, nicht deren Lage im Feld.
---------	--

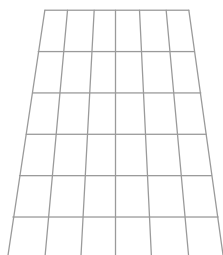
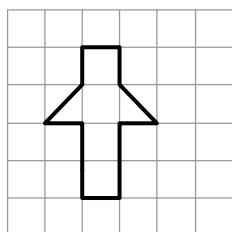
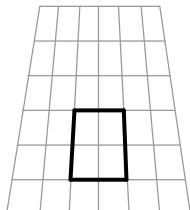
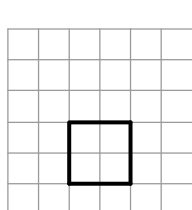
Teilaufgabenmerkmale

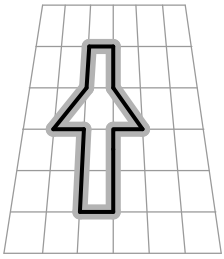
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern) (2.3.a)

Aufgabe 25 in Testheft B1

Übertrage die Figur in das schräge Gitter daneben.

Beispiel:



RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich ist grau markiert.)  Die Form der Figur ist entscheidend, nicht deren Lage im Feld.
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern) (2.3.a)

9.3.1 Aufgabenbezogener Kommentar

	Raumvorstellungsaspekt	Begriffsverständnis	Zeichnen
<u>Aufgabe 31 in Testheft A1</u>	x		x
<u>Aufgabe 32 in Testheft B1</u>		x	x
<u>Aufgabe 25 in Testheft A1</u>	(x)		x
<u>Aufgabe 30 in Testheft B1</u>	x	x	
<u>Aufgabe 36 in Testheft A1</u>	x		x
<u>Aufgabe 25 in Testheft B1</u>	x		x

Die hier kommentierten Aufgaben stammen aus dem Bereich **Abbildungen**. Bei den Aufgaben 31 in Testheft A1, 32 in Testheft B1 und 30 in Testheft B1 geht es um die Abbildung der Achsenspiegelung, bzw. die Eigenschaft symmetrischer Figuren (die durch eine Achsenspiegelung auf sich selbst abgebildet werden), den Aufgaben 25 in Testheft A1, 36 in Testheft A1 und 25 in Testheft B1 liegt das Abbilden in Rastern zugrunde.

Die Aufgaben 31 in Testheft A1, 32 in Testheft B1 und 30 in Testheft B1 setzen zur Lösungsfindung Kenntnisse über die Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren bzw. der Achsenspiegelung voraus. Symmetrische Figuren sind ein großer Bestandteil unserer Umwelt und Symmetrien unterstützen die Erfassung und Wahrnehmung von Gegenständen. Zur Aufgabenererschließung bedarf es der Kenntnis der Begrifflichkeiten wie zum Beispiel „spiegeln“, „falten“ oder „symmetrisch“, und zur korrekten Bearbeitung müssen die zu Grunde liegenden Konstruktionsschritte (z. B. identischer Abstand von Punkt und Bildpunkt zur Spiegelachse bzw. Faltlinie) bekannt sein. Für die exakte zeichnerische Umsetzung ist neben den manuellen Fertigkeiten auch das Verständnis für die in der Geometrie nötige Genauigkeit Voraussetzung.

In den Aufgaben 31 in Testheft A1 und 30 in Testheft B1 ist außerdem gedankliches Operieren gefragt. Die Kinder müssen in der Vorstellung Handlungen vollziehen. → Aspekt der **Raumvorstellung**.

Bei den Aufgaben 25 in Testheft A1, 36 in Testheft A1 und 25 in Testheft B1 müssen ebene Figuren in ein Punktfeld (Aufgabe 25 in Testheft A1) oder auf ein verzerrtes Kästchenraster (Aufgabe 36 in Testheft A1 und Aufgabe 25 in Testheft B1) freihändig übertragen werden.

Symmetrie und Achsenspiegelung

In der Aufgabenstellung von Aufgabe 31 in Testheft A1 wird der Begriff Faltung zwar durch das Bild unterstützt, muss aber in eine gedankliche Handlung übersetzt werden. Die Längen- und Winkelbeziehungen der Ausgangsfigur müssen beachtet werden und entsprechend einer

Achsenspiegelung muss die Figur passend ergänzt werden. Als Hilfestellung für die Zeichnung ist ein Karoraster vorgegeben, so dass grundlegende zeichnerische Fertigkeiten zur Lösung ausreichen. Die Position der gezeichneten Figur in dem Antwortfeld bleibt unberücksichtigt, da keine Spiegelung an einer vorgegebenen Achse durchgeführt werden muss, sondern das Endprodukt der Falt- und Schneidehandlung gezeichnet werden muss.

Bei Aufgabe 32 in Testheft B1 müssen zwei Spiegelungen nacheinander durchgeführt werden. Zunächst wird die Ausgangsfigur an einer vertikalen Achse gespiegelt. Anschließend wird das entstandene Bild an einer horizontalen Achse gespiegelt. Die Spiegelachsen liegen dabei außerhalb der Figuren. Die Verkettung der beiden Achsenspiegelungen entspricht einer Drehung der Ausgangsfigur um 180° . Als Hilfestellung ist ein Punkteraster vorgegeben.

In Aufgabe 30 in Testheft B1 ist ein unvollständiges Muster dargestellt. Die Antwortoptionen bilden je zwei Linien ab. Die Kinder können den Verlauf der Linien durch systematisches Probieren, durch geschicktes Ausschließen oder durch symmetrisches Ergänzen überprüfen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass beide Linien passen und das Muster passend fortsetzen müssen ($\rightarrow$ Problemlösen). Das gedankliche Operieren wird durch die Anordnung der Antwortoptionen erleichtert, die Felder können in Gedanken parallel eingeschoben werden. Da es sich insgesamt um eine symmetrische Figur handelt, ist eine Lösung auch übers Spiegeln möglich.

Abbildungen herstellen unter Nutzung von Rastern

Bei Aufgabe 25 in Testheft A1 soll anhand einer Vorlage eine ebene Figur im Punkteraster (die Punkte sind im Quadratgitter angeordnet) richtig ergänzt, bzw. identisch abgebildet werden. Bei der Figur handelt es sich um ein Quadrat, dessen Seiten nicht parallel zu den Geobrettkanten verlaufen. Ein zusätzliches allgemeines Viereck dient der Orientierung. Es muss weder verkleinert noch vergrößert werden, sodass neben der Figur-Grund-Wahrnehmung nur die Fähigkeit zur einfachen Reproduktion in Verbindung mit grundlegenden zeichnerischen Fertigkeiten zur Lösung ausreicht.

Punkteraster liefern für die Erstellung von Zeichnungen ebener Figuren eine hilfreiche Grundlage. Durch Verbinden der Punkte lassen sich viele ebene Figuren einfach zeichnen. Die Punkte stellen eine Orientierungshilfe dar, sie erleichtern das Nach- oder Freihandzeichnen und geben gleichzeitig ein Maß, mit dessen Hilfe die Position und die Größe der Figuren „ausgezählt“ werden können, vor.

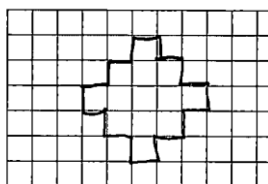
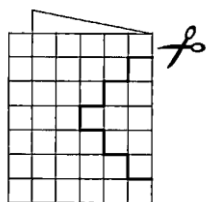
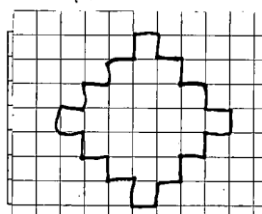
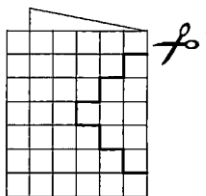
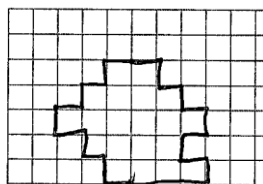
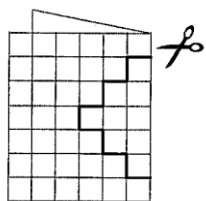
Die Aufgaben 36 in Testheft A1 und 25 in Testheft B1 fordern die inhaltsbezogene mathematische Kompetenz des Abbildens ebener Figuren in Gitternetzen. Als Vorlage dient jeweils eine ebene Figur auf quadratischen Kästchen. Die Kinder sollen diese Figuren auf ein verändertes, nämlich verzerrtes, Kästchenraster übertragen. Hier handelt es sich weder um ein bloßes Abzeichnen des gleichen Bildes noch um eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung im mathematischen Sinne. Die Kästchen, in die die ebenen Figuren gezeichnet werden müssen, sind verzerrt und nicht rechtwinklig. Sie dienen den Kindern dennoch als Orientierungshilfe und geben gleichzeitig das Maß vor, wie lange die Begrenzungslinien der Figuren sind (z. B. 2 Kästchenlängen nach oben). In Aufgabe 36 in Testheft A1 müssen Linien entlang des Kästchenrasters nachgezogen werden, wohingegen bei Aufgabe 25 in Testheft B1 auch diagonale Linien zu zeichnen sind.

9.3.2 Mögliche Schwierigkeiten

Symmetrie und Achsenspiegelung

Aufgabe 31 in Testheft A1

Das Ergänzen einer Figur an einer Spiegelachse ist den Kindern vermutlich vertraut. Diese Aufgabenstellung ist komplexer. Die Kinder müssen zunächst das auszuschneidende Muster in das nebenstehende Kästchenfeld übertragen und dann spiegelbildlich ergänzen. Als Spiegelachse muss die Faltlinie verstanden werden, diese ist aber als solche nicht gekennzeichnet. Die Position auf dem Feld ist dabei nicht relevant, das fertige Muster muss in das vorgegebene Feld passen.



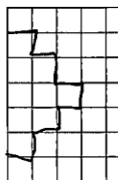
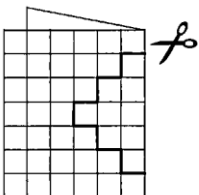
Muster nicht korrekt ergänzt.

Das Ausgangsstück wurde korrekt übertragen und weitestgehend richtig ergänzt. Durch abschließende Prüfung der Zielfigur wäre die Abweichung vermutlich aufgefallen.

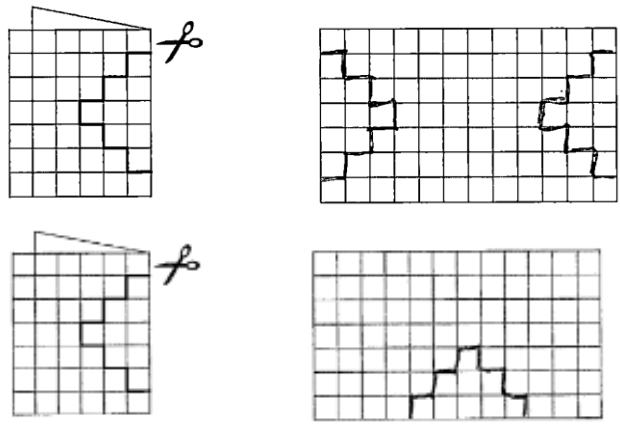
In dieser Lösung ist in der Mitte vertikal eine zusätzliche Kästchenreihe eingefügt. Ohne diese Reihe wäre die Lösung korrekt. Unter Umständen wollte das Kind hierdurch eine „gleichmäßigere“ Figur erstellen.

Die Eckpunkte der Ausgangsfigur wurden korrekt übertragen. Auch hier wurde (wie im Beispiel davor) nicht korrekt gespiegelt, möglicherweise aus dem gleichen Grund.

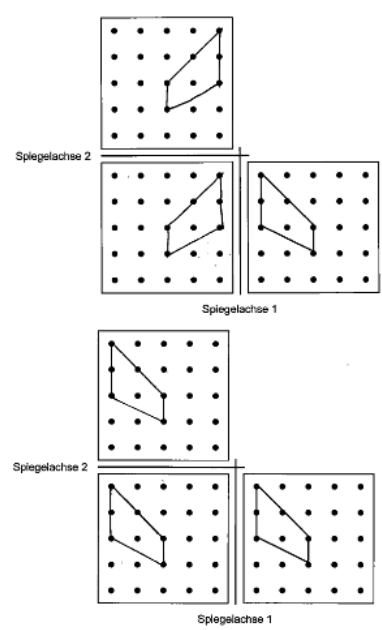
Die Herausforderungen bei den beiden letzten Beispielen ist, dass hier zwar achsensymmetrische Figuren entstanden sind, die auch durch Faltung entstanden sein können – aber nicht mit der vorgegebenen Faltkante.

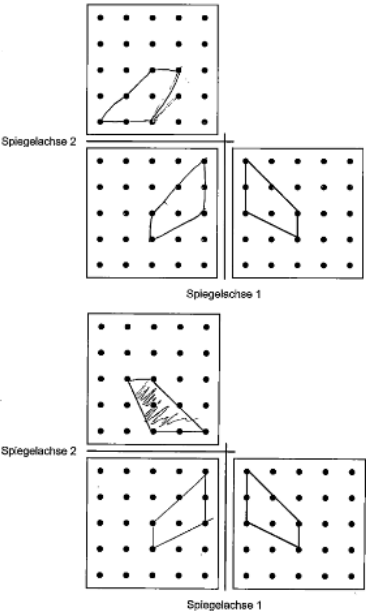
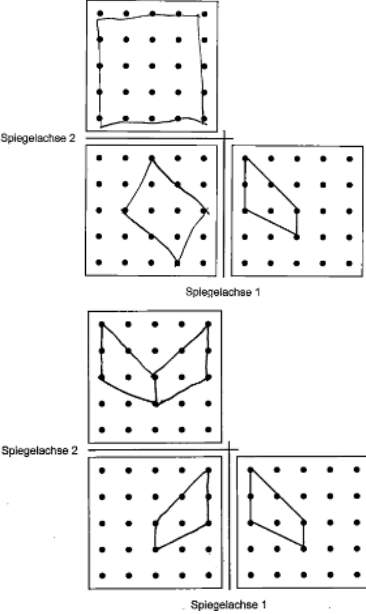


Hier wurde das Spiegelbild korrekt ergänzt aber die Faltung nicht berücksichtigt bzw. nicht das Endprodukt dargestellt. Grundlegend hierfür könnten fehlendes Aufgabenverständnis oder mangelnde Raumvorstellung sein.

	Hier wurde die Faltung nicht berücksichtigt und die Blattränder als Trennlinie für die beiden Teilfiguren betrachtet. Grundlegend hierfür könnten fehlendes Aufgabenverständnis oder mangelnde Raumvorstellung sein. Hier wurde die Figur an einer anderen Kante des Karofeldes eingezeichnet. Die Faltung wurde u. U. als Kippvorgang interpretiert.
---	---

Aufgabe 32 in Testheft B1

Aufgaben, bei denen die Spiegelachsen einen Abstand zur Figur haben, werden von Kindern möglicherweise als schwieriger empfunden als solche, bei denen die Spiegelachsen an die Figur angrenzen. Formen, die korrekt gespiegelt, aber falsch positioniert sind, lassen sich so erklären - je weiter die Ausgangsfigur von der Spiegelachse entfernt ist, desto schwieriger.	
Auch die Ausrichtung der Spiegelachse kann einen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe haben. Vertikale Spiegelungen werden oft als einfacher empfunden als horizontale. Aus diesem Grund ist es möglich, dass Fehler eher bei der zweiten durchzuführenden Spiegelung auftreten.	
	Ein typischer Fehler ist, dass anstelle der Spiegelungen eine oder zwei Verschiebung(en) durchgeführt wird / werden.

 Spiegelachse 2 Spiegelachse 1 Spiegelachse 2 Spiegelachse 1	Auch falsche Abbildungen in Form von Drehungen (der Ausgangsfigur oder der ersten Spiegelung) sind möglich.
 Spiegelachse 2 Spiegelachse 1 Spiegelachse 2 Spiegelachse 1	Weitere mögliche Fehler können auf einem falschen Begriffsverständnis oder fehlerhaftem Leseverständnis beruhen.

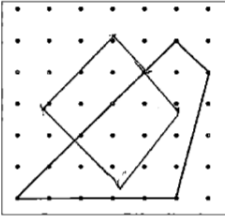
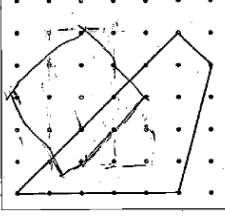
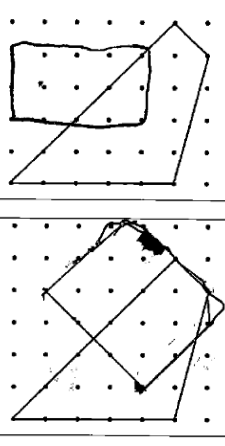
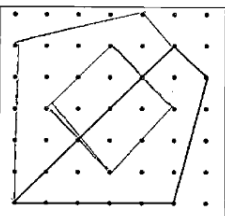
Aufgabe 30 in Testheft B1

Da die Aufgabenstellung ungewöhnlich ist, besteht die erste Hürde im Lösungsprozess in der Erschließung der Aufgabe. Zwei freie Felder sind vorgegeben, aber nur nach einem wird gefragt, nicht der Rand, sondern das Zwischenstück ist gesucht. Die Muster der Antwortoptionen ähneln sich sehr, ein oberflächliches Betrachten reicht nicht aus. Mögliche Ursachen, die zur häufigen Fehllösung „1. Kästchen ist angekreuzt“ führen, könnten ein oberflächlicher Blick mit vorschneller Entscheidung oder das alleinige Betrachten der unteren, mittebildenden Linie sein.

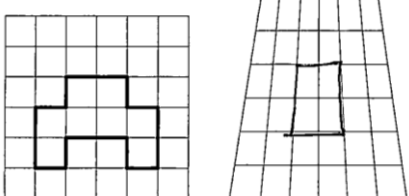
Abbildungen herstellen unter Nutzung von Rastern

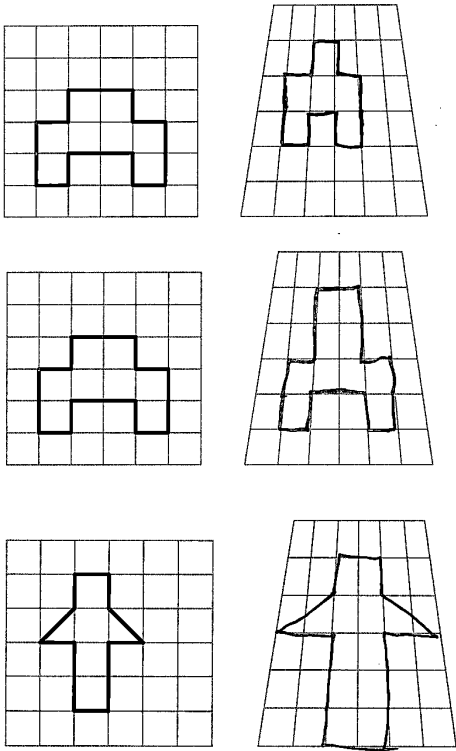
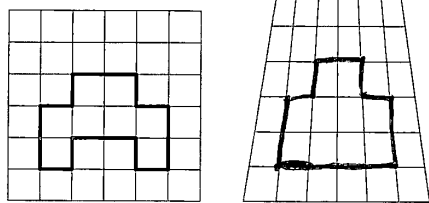
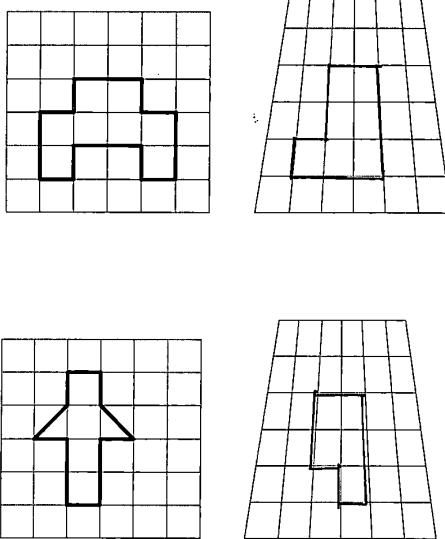
Fehler bei Abbildungen im Punkteraster (siehe Aufgabe 25 in Testheft A1) resultieren häufig daraus, dass das Punkteraster nicht oder nicht konsequent genutzt wird. Dasselbe gilt für die Nutzung des Kästchenrasters (siehe Aufgabe 36 in Testheft A1 und Aufgabe 25 in Testheft B1). Für die exakte zeichnerische Umsetzung sind außerdem die entsprechenden manuellen Fertigkeiten sowie das Bewusstsein für die in der Geometrie unverzichtbare Sorgfalt Voraussetzung.

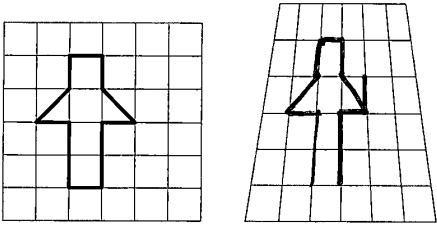
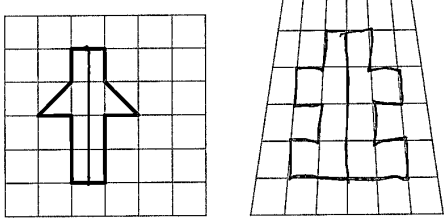
Aufgabe 25 in Testheft A1

	Die Struktur des Punkterasters wird nicht (konsequent) zur Festlegung der Eckpunkte genutzt. Statt die Eckpunkte festzulegen und miteinander zu verbinden, werden die Seiten - ohne das Raster zu beachten - gezeichnet. Hieraus resultieren Ungenauigkeiten.
	Neben mangelnder Sorgfalt wird auch hier die Struktur des Punkterasters nicht beachtet. Die Orientierungshilfe der Punkte für die Position und die Größe des Quadrats wird nicht genutzt.
	Neben mangelnder Sorgfalt beruhen diese fehlerhaften Zeichnungen auf Schwierigkeiten, das Quadrat richtig abzubilden. Bei den gezeichneten Vierecken handelt es sich nicht um Quadrate. Auch hier wird die Struktur und Orientierungshilfe des Punkterasters nicht genutzt - möglicherweise, weil die abzubildenden Quadratseiten nicht parallel zu den Geobrettkanten verlaufen.
	Hier liegt eine Fehlinterpretation der Aufgabe vor, möglicherweise bedingt durch ungenaues Lesen oder die Unkenntnis der Operation „Nachspannen“. Die Figur wird zwar korrekt ergänzt, wohl aber als „Nebenprodukt“ einer Spiegelung.

Aufgabe 36 in Testheft A1 und Aufgabe 25 in Testheft B1

	Die Lösungsfigur, die in der Aufgabe als Beispiel gegeben war, wurde identisch übernommen.
---	---

	Nicht alle Begrenzungslinien der Figur sind im korrekten Maß gezeichnet (z. B. 1 Kästchenlänge zu viel oder zu wenig oder Kästchenlinien verdoppelt).
	Nicht alle Begrenzungslinien der Figur wurden beachtet.
	Es wurde eine neue Figur gezeichnet - gänzlich anders als vorgegeben. Die Aufgabenstellung wurde nicht verstanden.

	Die Figur wurde nicht vollständig gezeichnet.
	Bei der gegebenen Figur wurde, obwohl nicht verlangt, eine Symmetrieachse eingezeichnet. Auf das schräge Kästchenraster wurde eine neue Figur gezeichnet, ebenso mit eingezeichneter Symmetrieachse. Die Aufgabenstellung wurde nicht verstanden.

9.3.3. Anregungen für den Unterricht

Symmetrie und Achsenspiegelung

Zu Beginn der Beschäftigung mit der **Symmetrie** und der **Achsenspiegelung** sollten die grundlegenden Eigenschaften der Spiegelung geklärt werden. In der Primarstufe gibt es hier verschiedene Herangehensweisen:

- *Erkennen und Herstellen von Achsensymmetrie:*

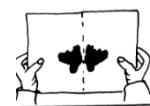
- Finden von Symmetrien bei der Betrachtung von Gegenständen und Bildern in der Realität
- Überprüfen angenommener Spiegelachsen mit dem Spiegel / mit dem MIRA-Spiegel (halbdurchsichtiger Spiegel)
- Begründen, warum es sich bei einer Figur um keine symmetrische Figur bzw. bei Abbildung um keine Achsenspiegelung handelt (→ Argumentieren): Worin liegt der Unterschied der beiden Hälften? Durch Ausschneiden einer Figur, die durch Spiegelung entstanden ist, und Falten bzw. Übereinanderklappen lässt sich prüfen, ob beide Hälften deckungsgleich sind (s.u.).
- Reparieren von Bildern durch Spiegeln



einer

- *Konstruktion achsensymmetrischer Figuren durch Falten* (Faltlinie entspricht der Spiegelachse):

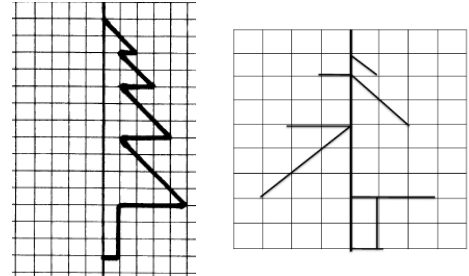
- Klecksbilder herstellen



Copyright Abbildungen: IQB

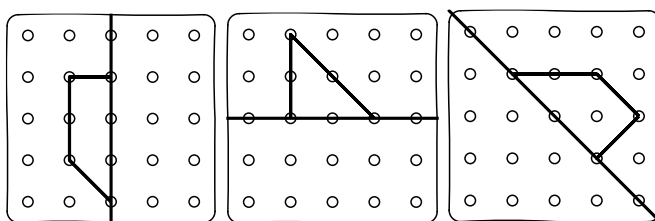
- Falten und Prickeln: Die Faltlinie ist die Spiegelachse der Figur, die durch die geprickelten Löcher entstanden ist.
- Falten und Schneiden
- Gefaltete, geprickelte Figuren auf Symmetrien untersuchen (→ Argumentieren, Kommunizieren), ob und warum es sich hierbei um symmetrische Figuren handelt, dabei die Symmetrieeigenschaften hervorheben. Hierzu eignen sich auch solche geprickelten oder ausgeschnittenen Figuren, die nicht symmetrisch sind (z. B. weil sie vor dem Schneiden oder Prickeln nicht gefaltet wurden).

- **Konstruktion achsensymmetrischer Figuren durch Spiegeln:**
MIRA-Spiegel an die zu spiegelnde Figur stellen. Hinter dem MIRA-Spiegel die gespiegelte Figur nachzeichnen. Wo der MIRA-Spiegel aufliegt, befindet sich die Spiegelachse und kann auf diese Weise eingezeichnet werden.
- **Spiegelbilder konstruieren und vervollständigen:**
Spiegeln an einer Achse, die zur Differenzierung vertikal, horizontal oder schräg ausgerichtet sein kann.
- **Angefangene Spiegelungen fortsetzen:**
Dabei können zur Differenzierung auch Bild oder Urbild unvollständig vorgegeben sein.

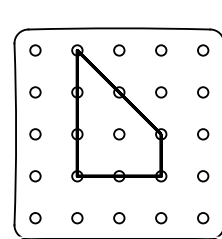


Copyright Abbildungen: IQB

- Das *Geobrett* eignet sich zur Vorbereitung auf das Spiegeln im Punkteraster und/oder Gitternetz. Hier können die Kinder aktiv handelnd geometrische Figuren erzeugen und ihre Ergebnisse anschließend im Punkteraster und/oder Gitternetz „protokollieren“. Die Symmetrieachsen können sowohl auf dem Geobrett (horizontal, vertikal, diagonal) als auch (bei der Verwendung mehrerer Geobretter) entlang der Brettkanten verlaufen.



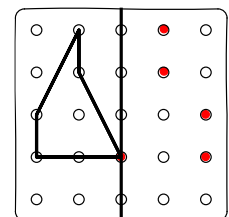
Achsen auf dem Geobrett



Achse entlang der Brettkante

Copyright Abbildungen: IQB

Um die Gummibänder spannen zu können, müssen zunächst die Eckpunkte gespiegelt werden. Für das Spiegeln (Zeichnen) im Punkteraster oder Gitternetz ist diese Vorgehensweise von großer Bedeutung.



Copyright Abbildung: IQB

Durch ein Aneinanderfügen mehrerer Geobretter lässt sich die Verkettung mehrerer Spiegelungen entlang der Geobrettkanten (wie in Aufgabe 32 in Testheft B1) nachvollziehen. Die Kinder können so auch drehsymmetrische Figuren erkennen.

Transparente Geobretter bieten den Vorteil, dass sie als Hilfestellung und zur Kontrolle einfach „umgeklappt“ werden können. Dadurch kann überprüft werden, ob die beiden Figuren deckungsgleich sind.

Anregungen zur Differenzierung und Weiterführung

Der Schwierigkeitsgrad wird erhöht, wenn

- das zu spiegelnde Objekt einen relativ großen Abstand zur Spiegelachse hat.
- entlang einer diagonalen Achse gespiegelt wird.

- an mehreren Spiegelachsen unterschiedlicher Lage nacheinander gespiegelt wird.
- das zu spiegelnde Objekt komplexer ist (beispielsweise durch schräg verlaufende Linien).
- unliniertes Papier verwendet wird.
- sowohl Urbild als auch Bild unvollständig sind.

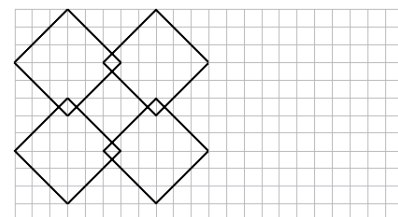
Abbildungen in Rastern (auch vergrößern und verkleinern)

Bei der Auseinandersetzung mit der Thematik des Abbildens ebener Figuren auf verschiedene Gitternetze sind visuomotorische Fähigkeiten, insbesondere die Hand-Auge-Koordination, grundlegend für den Lösungsprozess der Aufgabe. Hilfestellungen der Lehrkraft und modellhaftes Verbalisieren des Vorgehens (z. B. Länge der Verbindungslinien und die Positionierung von Eckpunkten im ständigen Vergleich mit der Vorlage) können Wahrnehmungen zur visuomotorischen Koordination unterstützen. Auf diese Weise werden die Schüler*innen angeregt, die Abmessungen und Lage der zu zeichnenden Figur mit eigenen Worten zu verbalisieren (→ Kommunizieren).

Falsche Lösungen der Schüler*innen (siehe beispielsweise: Mögliche Schwierigkeiten) in anonymisierter Form können zum Lernanlass werden. Dabei können diese analysiert und Fehler nachvollzogen werden. Im Anschluss daran bietet es sich an, eine Fehlerkorrektur/Hilfestellungen an den Autor oder die Autorin der falschen Lösung schriftlich oder mündlich zu formulieren und dadurch auch fachsprachliche Kompetenzen auszubauen (→ Kommunizieren, → Argumentieren). Falsche Lösungen der Schüler*innen eignen sich, um sprachliche, rechnerische, aber auch zeichnerische Schwächen und Fehler aufzuzeigen. Indem die Schüler*innen Fehler suchen und entdecken, aber auch feststellen, welche richtigen Anteile ihre Zeichnungen enthalten, wird ihre Motivation angeregt und die Lernendenautonomie gestärkt.

Um das geometrische Zeichnen und die Auge-Hand-Koordination von Kindern zu fördern, bieten sich regelmäßige Übungen zum Nachzeichnen an (zu einer Vorlage soll das gleiche Bild gezeichnet werden). Im Unterricht sollten hierfür Gelegenheiten geschaffen werden, um einfache Reproduktionen unter Berücksichtigung von Längen- und Winkelbeziehungen (ohne Spiegelung) zu üben. Das Zeichnen im bzw. das Übertragen ins Punkteraster übt zudem das Freihandzeichnen. Gleiches gilt auch für das Skizzieren auf Karopapier.

Beispiele: „Zeichne die Figuren ab. Worauf achtest du besonders?“

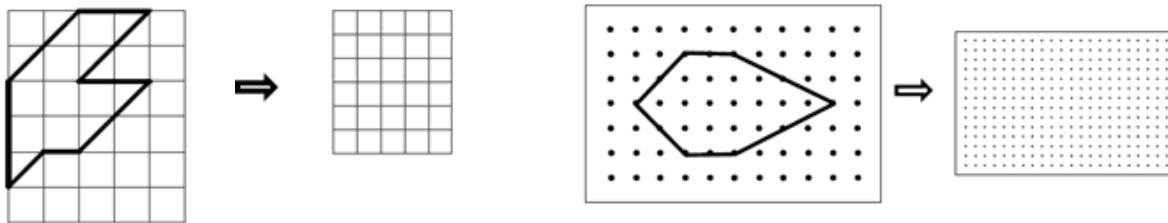


Copyright Abbildungen: IQB

Figuren können auch mittels zugrundeliegender Gitter- bzw. Punkteraster, deren Größe sich ändert, verkleinert und vergrößert werden (→ Darstellen).

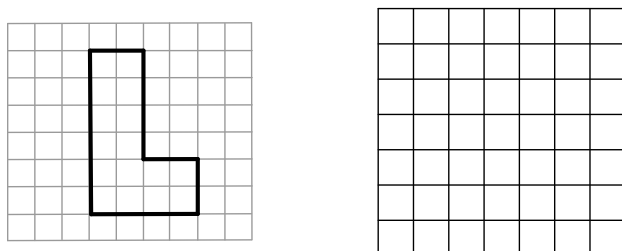
Beispiele:

„Verkleinere die Figur durch Übertragen in die kleineren Kästchen“ bzw. „Verkleinere die Figur durch Übertragen in das kleinere Punkteraster.“



Copyright Abbildungen: IQB

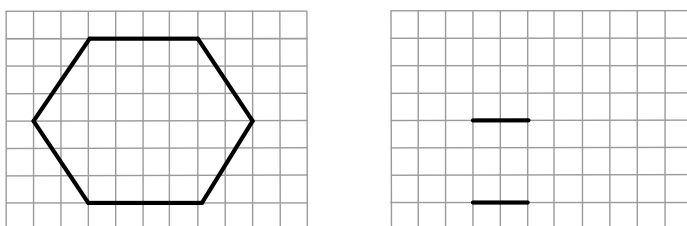
„Vergrößere die Figur durch Übertragen in die größeren Kästchen.“



Copyright Abbildung: IQB

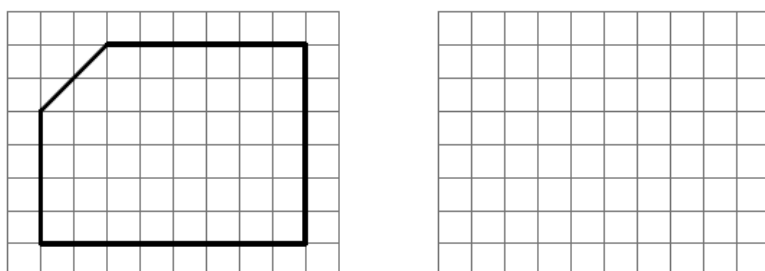
Verkleinern und Vergrößern lassen sich – wenn die Grundlagen gesichert sind – an weiteren Figuren üben. Die Kinder können zu einer Vorlage eine Verkleinerung oder Vergrößerung auf gleichem Kästchenpapier zeichnen. Differenzierungen sind u. a. mit Lösungshinweisen möglich, die bei fortschreitender Kompetenzentwicklung sukzessive entfallen.

„Zeichne die Figur weiter. Jede Seite soll halb so lang sein.“



Copyright Abbildung: IQB

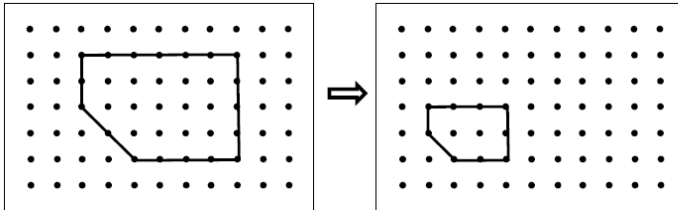
„Zeichne die Figur kleiner. Jede Seite soll halb so lang sein.“



Copyright Abbildung: IQB

Beim Verkleinern und Vergrößern machen die Schüler*innen Erfahrungen, die zum Verständnis des Maßstabs notwendig sind. In der Lebenswirklichkeit wird hiermit ein Größenverhältnis vom Abbild zur Wirklichkeit beschrieben. Auch beim Verkleinern und Vergrößern kann auf Größenverhältnisse zweier in Beziehung stehender Abbildungen eingegangen werden. Dabei bietet es sich an, zunächst auf die Begrifflichkeit des Maßstabs einzugehen und das maßstabsgetreue Vergrößern und Verkleinern im gleichen Punkte- bzw. Gitterraster zu üben. Anschließend können Kinder in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit aufgefordert werden, eigene Figuren zu zeichnen oder auch Gegenstände abzuzeichnen, einen Maßstab festzulegen und dann zu vergrößern oder zu verkleinern.

„Verkleinere die Figur im Maßstab 2:1“



Copyright Abbildung: IQB

9.4 Aufgaben zu Flächen, Rauminhalt, Umfang

Aufgabe 35 in Testheft A1

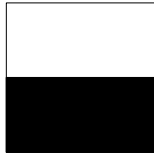
Elias behauptet:

„Die schwarze Fläche in Figur A ist genauso groß wie die schwarze Fläche in Figur B.“

A



B



Hat er recht? Kreuze an.

☐ ja

☐ nein

Begründe.



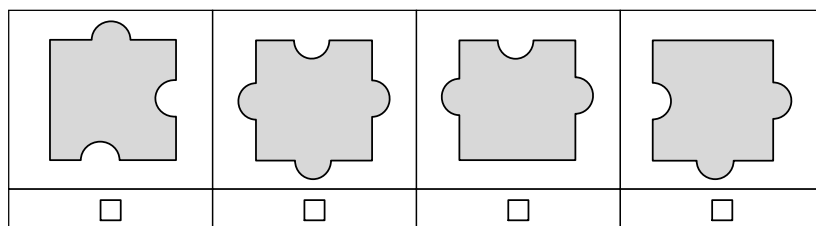
RICHTIG	JA wurde angekreuzt UND in der Begründung wurde angegeben, dass die erste Figur die Hälfte des Quadrates darstellt und die zweite Figur ebenso, z. B.: - <i>Ja, er hat recht, weil das Schwarze jeweils bei beiden Figuren die Hälfte bedeckt.</i> - <i>Bei jeder Figur ist genauso viel schwarz wie weiß.</i> - <i>Weil bei beiden die Hälfte schwarz ist.</i> Ebenso gültig ist eine zeichnerische bzw. kopfgeometrische Begründung, wie z. B. durch eine (gedachte) diagonale/waagerechte Trennlinie in Figur A, z. B.: - <i>Wenn ich einen Strich in der Mitte des Quadrats mache, passt das untere schwarze genau nach oben und dann sieht es aus wie das andere.</i>
FALSCH	NEIN wurde angekreuzt ODER JA wurde angekreuzt UND es wurde keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben, z. B.: - <i>Das sieht man.</i> - <i>Er hat recht, weil die schwarze Fläche in A genauso groß ist wie in B.</i> - <i>Sie sind beide gleich nur in einer anderen Form.</i> - <i>Das kann man nicht sagen.</i> - <i>Weil Figur B ein Rechteck bildet.</i> ODER es wurde eine Begründung gegeben, die nur den Inhalt der Aufgabenstellung wiedergibt, z. B.: - <i>Er hat recht, weil die schwarze Fläche in A genauso groß ist wie in B.</i>

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3); Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen (2.4.a)

Aufgabe 28 in Testheft A1

Welches Puzzleteil hat die größte Fläche? Kreuze an.



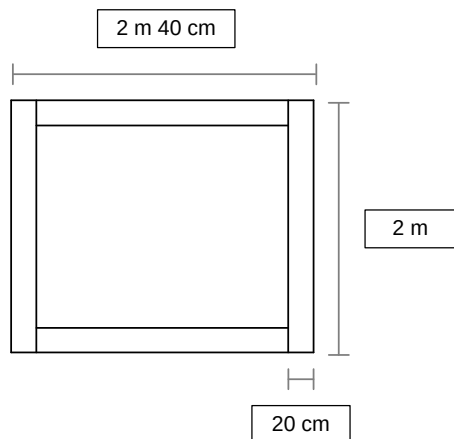
RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen (2.4.b)

Aufgabe 31 in Testheft B1

Die Umrandung von Tomeks Sandkasten besteht aus 4 Holzbalken.



Wie lang sind alle Holzbalken zusammen? _____ m

RICHTIG	8 m ODER 8,00 m Das Durchstreichen von m und die Angabe von 800 cm ist ebenfalls korrekt.
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen (2.4.b); Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)

Aufgabe 33 in Testheft B1

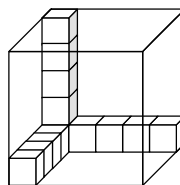
Milo sagt: „In den großen Würfel
passen insgesamt 25 solcher Würfel .“

Stimmt das? Kreuze an.

☐ ja

☐ nein

Begründe.



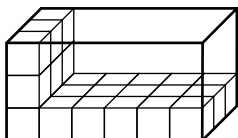
RICHTIG	NEIN wurde angekreuzt UND es wurde eine Begründung gegeben, die erkennen lässt, warum mehr als 25 Würfel in den großen Würfel passen, z. B.: - Korrekte Rechnung: $5 \times 5 \times 5 = 125$ - Weil eine Ebene 25 Würfel hat. Dann kann der große Würfel schlecht 25 haben. - Nein, weil es nicht genug Würfel sind. Auf einer Seite sind es ja schon 25. - Weil es unten schon 25 sind. - Nein, da passen mehr Würfel rein. Ich weiß es, weil da über [x] Würfel reinpassen (mit einer entsprechenden Einzeichnung von Würfeln belegt). - Es wären zu wenige, weil da schon 13 drin sind und es passen noch viel mehr als 12 rein. - Weil es insgesamt 125 sind.
FALSCH	JA wurde angekreuzt ODER NEIN wurde angekreuzt UND/ODER es wurde keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben, z. B.: - Da passen mehr Würfel rein. - Nein, weil es viel zu wenige Würfel sind. - Nein, weil in den Würfel mehr kleine Würfel reinpassen. Weil der Würfel größer ist.

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen (2.4.c)

Aufgabe 29 in Testheft A1

Der Quader wird mit kleinen Würfeln gefüllt.



Wie viele kleine Würfel fehlen noch? _____

RICHTIG	30
---------	----

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a); Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen (2.4.c)

9.4.1 Aufgabenbezogener Kommentar

	Raumvorstellungsaspekt	Begriffsverständnis	Zeichnen
<u>Aufgabe 35 in Testheft A1</u>	x	x	
<u>Aufgabe 28 in Testheft A1</u>	x	x	
<u>Aufgabe 31 in Testheft B1</u>	x		
<u>Aufgabe 33 in Testheft B1</u>	x	x	
<u>Aufgabe 29 in Testheft A1</u>	x	x	

Um Aufgaben zum Schwerpunkt *Flächen- und Rauminhalt bzw. Umfang* lösen zu können, müssen die Schüler*innen über entsprechende mathematische Fachbegriffe verfügen, also ein **Begriffsverständnis** aufgebaut haben. Ohne Kenntnisse über Aussehen, Eigenschaften und typische Merkmale einzelner Flächen- und Körperformen können Aufgabenstellungen nicht bearbeitet werden. Die mathematische Fachsprache muss im Unterricht wiederholend im Fokus stehen. Vor allem sollte auch genau nach Begriffen der ebenen und denen der räumlichen Geometrie (s. Tabelle) unterschieden werden (siehe *Flächen und Körper*). Bei Fachbegriffen, die beiden Bereichen zuzuordnen sind (Ecke und Seite), bedarf es auch unbedingt einer Thematisierung des Kontextes.

	ebene Geometrie	räumliche Geometrie
Objekte	Quadrat, Rechteck, Raute, Viereck, Dreieck, Fünfeck, Sechseck, Kreis...	Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel ...
Charakteristika	Ecke, Gerade, (Seiten-)Linie, Strecke, viereckig, krumm, quadratisch, gerade...	Ecke, Kante, (Seiten-)Fläche, würfelförmig, quaderförmig, zylinderförmig, walzenförmig ...
Relationen	liegt rechts/links/neben/zwischen/über/unter von, länger/kürzer als, genauso lang wie, deckungsgleich mit, symmetrisch zu, parallel zu, senkrecht zu, flächengleich zu...	steht rechts/links/neben/zwischen/auf/hinter/vor von, genauso groß wie, parallel zu, senkrecht zu volumengleich mit...

Neben der Kenntnis mathematischer Begriffe ist zur Lösung nachfolgender Aufgaben auch die Fähigkeit der **Raumvorstellung** notwendig.

In der Grundschule wird die Größe einer Fläche (Flächeninhalt) oder eines Körpers (Rauminhalt/Volumen) nicht mit mathematischen Formeln bzw. mit standardisierten Größen erarbeitet, sondern mit Hilfe von Einheitsflächen (z. B. Einheitsquadraten) bzw. mit Hilfe eines einheitlichen räumlichen Vergleichsmaßes (z. B. Einheitswürfel) gemessen und angegeben. Dabei sollen die Schüler*innen lernen, Flächen- bzw. Rauminhalte zu bestimmen und zu vergleichen. Dies geschieht üblicherweise durch Zerlegen von Figuren bzw. Körpern oder durch das Auslegen/Auffüllen mit Einheitsflächen/ Einheitswürfeln. Ein hinterlegtes Raster kann bei Flächen das Bestimmen der Anzahl dieser Einheitsflächen unterstützen. Bei Abbildungen von Körpern muss zudem die Dreidimensionalität des Raumes erfasst und berücksichtigt werden: Länge (von links nach rechts oder umgekehrt), Breite (von vorn nach hinten oder umgekehrt) und die Höhe (von unten nach oben oder umgekehrt). Dann wird ermittelt bzw. geprüft, wie viele der Einheitswürfel in den Körper passen bzw. aus wie vielen sich der Körper zusammensetzt.

Bei Aufgabe 35 in Testheft A1 müssen die Schüler*innen ihre Einschätzung begründen, d.h. es werden auch prozessbezogene Kompetenzen notwendig (→ Argumentieren). Dies erfordert einen entsprechenden fachlichen Sprachwortschatz.

Es ist unabdingbar, dass die Kinder eine Vorstellung zum Begriff der Flächeninhaltsgleichheit, unabhängig von der Form, haben. Diese erlangen sie, wenn sie vielerlei Handlungserfahrungen gesammelt haben, z. B. durch Falten, Auslegen, Ausmalen, Halbieren, Zerlegen, Umsortieren und Zusammensetzen (vgl. auch die Anregungen für den Unterricht). So können die Kinder dann über die gedachten, im Kopf vollzogenen Handlungen argumentieren. Die Begründung kann auf verbaler sowie auf zeichnerischer Ebene erfolgen.

Hat er recht? Kreuze an.



ja



nein

Begründe.

 Elias hat recht, weil bei Figur A ~~die~~ die schwarze Fläche halb ausgemalt ist und bei Figur B ist die schwarze Fläche auch halb ausgemalt.

 Nein^{Ja} Weil den Dreiecke und ~~kurz~~ Vierecken sind nicht gleichen. Aber man kann mann so machen:  .

Obwohl die Formen in Aufgabe 28 in Testheft A1 aussehen wie Puzzleteile, und dieser Bezug zur Lebenswelt hergestellt werden könnte, haben sich Kinder im Zusammenhang mit Puzzleteilen wahrscheinlich noch wenig Gedanken hinsichtlich des Flächeninhalts gemacht, da dies in Puzzlespielsituationen keinerlei Relevanz hat.

Diese Aufgabe lässt sich gut „kopfgeometrisch“ lösen, wenn man von einer gemeinsamen Basisflächenform, nämlich einem Quadrat ausgeht. Nun muss überprüft werden, wie viele „Nasen“ an den einzelnen Formen „nach innen“ bzw. „nach außen“ weisen – und interpretieren, was das für den Flächeninhalt der gesamten Figur bedeutet. Sehr vorteilhaft kann es sich auswirken, wenn Schüler*innen Erfahrungen beim Parkettieren mittels der sogenannten „Knabbertechnik“ gemacht haben.

In der Grundschule werden der Flächeninhalt und der Umfang von Figuren nicht über eine Formel ermittelt. Vielmehr erfolgt die Begriffsbildung auf vielfältigen Handlungserfahrungen. In Aufgabe 31 in Testheft B1 wird eine Sachsituation aus der Erfahrungs- und Erlebnisswelt der Kinder – Umrandung für den Sandkasten – verbal und zeichnerisch dargestellt. Zu deren Bearbeitung muss der Begriff „Umfang“ nicht explizit verfügbar sein. Die zeichnerische Darstellung zeigt, wie die Umgrenzungsbalken des Sandkastens gelegt werden.

Die nicht bemaßten Balken müssen mit den bemaßten in Beziehung gesetzt werden. Zudem müssen die Schüler*innen erkennen, dass die Länge von 2 m 40 cm sich aus der Balkenlänge 2 m und der Anordnung der beiden senkrechten Balken ergibt.

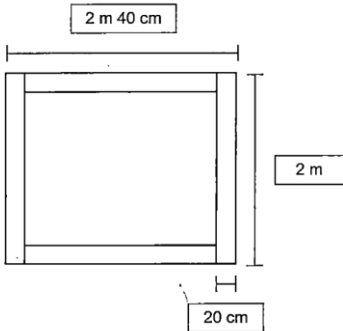
Zum korrekten Bearbeiten der Aufgaben 33 in Testheft B1 und 29 in Testheft A1 müssen die Kinder in der Lage sein, räumliche Objekte mental in Untereinheiten strukturieren zu können, um anschließend die fehlenden Würfel oder die Gesamtanzahl der Würfel, und somit das Gesamtvolumen, über Zählstrategien oder Rechenoperationen ermitteln zu können. Aufgabe 33 in Testheft B1 fordert hinzukommend eine ausführliche Begründung (→ Argumentieren) ein.

9.4.2 Mögliche Schwierigkeiten

Aufgabe 35 in Testheft A1

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
Hat er recht? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein Begründe. <i>A und B sind nicht gleich weil B größer als A</i>	Es wird über die Größe der Quadrate bzw. Flächen argumentiert.
Hat er recht? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein Begründe. <i>Weil sie nicht die gleiche form haben.</i>	Es wird über die verschiedenen Flächenformen argumentiert.
Hat er recht? Kreuze an. ☒ ja ☐ nein Begründe. <i>weil A höher und breiter ist aber es nur eine ecke hat sind sie gleich</i>	Begriffliche/sprachliche Schwierigkeiten: Diesen Kindern fehlt u. U. auch der Begriff „Hälfte“.
Hat er recht? Kreuze an. ☒ ja ☐ nein Begründe. <i>Auf beiden flächen ist gleich viel schwarz.</i>	Nur der Inhalt der Aufgabenstellung wird wiedergegeben. Unter Umständen hat das Kind richtige Gedanken, kann diese aber nur unzureichend zu Papier bringen.

Aufgabe 31 in Testheft B1

 Wie lang sind alle Holzbalken zusammen? <u>880 m</u>	Die Schüler*innen erkennen nicht, dass die 4 Bretter gleich lang sind und die Länge 2 m 40 cm bedingt ist durch die Anordnung der Bretter. Es wird der Umfang des Beetes berechnet.
Wie lang sind alle Holzbalken zusammen? <u>4,60 m</u>	Die Aufgabenstellung scheint unklar. Die Schüler*innen addieren lediglich die vorgegebenen Maße.

Aufgabe 33 in Testheft B1

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
Begründe. <u>weil da passen 58 rein.</u>	Die Gesamtanzahl wird nicht richtig ermittelt.
<u>weil man 5 würfel aufeinander stapeln kann.</u> Begründe. <u>Man braucht mehr als nur 25 würfel.</u>	Eine vollständige Begründung zu formulieren bereitet Schwierigkeiten.

Zudem könnten Kinder:

- beim Erfassen der Anzahl von Einzelwürfeln in perspektivischen Zeichnungen sämtliche der im Bild sichtbaren Würfel~~flächen~~ zählen.
- verdeckte Einzelwürfel vernachlässigen.

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
Wie viele kleine Würfel fehlen noch? <u>36</u>	Die Anzahl an Würfeln der zweiten und der dritten Ebene werden komplett notiert.
Wie viele kleine Würfel fehlen noch? <u>15</u>	Es wird nicht bedacht, dass die Anzahl an fehlenden Würfeln einer Ebene verdoppelt werden muss.

9.4.3 Anregungen für den Unterricht

Vorwissen und grundlegende Kompetenzen für ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen sind die Auge-Hand-Koordination (Koordination von Sehen und Handbewegung), die Figur-Grund-Wahrnehmung (die Fähigkeit, aus einem komplexen Hintergrund oder aus einer Gesamtdarstellung Teilfiguren zu identifizieren) und die Wahrnehmungskonstanz (Wiedererkennen von Figuren in verschiedenen räumlichen Lagen, Anordnungen oder Größen). Es ist wichtig, dass diese grundlegenden Fähigkeiten der visuellen Wahrnehmung während der gesamten Grundschulzeit geschult werden.

Figur-Grund-Wahrnehmung

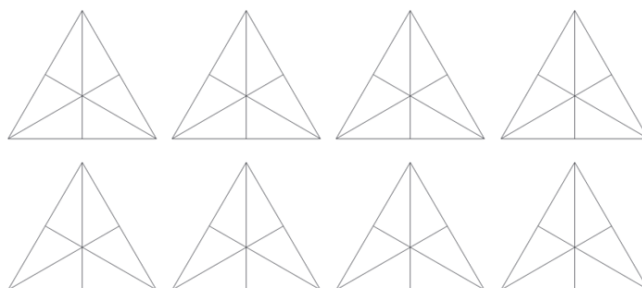
Diese Figur besteht aus Dreiecken.



Welche verschiedenen Dreiecke findest du?
Zeichne sie mit unterschiedlichen Farben ein.



Wie viele Dreiecke sind es insgesamt?
Male sie jeweils so aus, dass sie gut erkennbar sind.



Des Weiteren soll sämtlichen kopfgeometrischen Aufgaben ein aktiver Umgang mit Material vorausgehen, um das Vorstellungs- und Wahrnehmungsvermögen zu entwickeln und Kompetenzen bzgl. des Raumvorstellungsaspektes aufzubauen. Dies muss durch vielfältige handlungsorientierte Übungen, wie beispielsweise durch Legen, Bauen, Zusammensetzen, Stempeln, Zerlegen, Drehen, Kleben, Zerschneiden, Spannen am Geobrett, Falten etc. geschehen. Dennoch darf die Handlung

nie für sich alleine stehen, sondern muss verbalisiert werden. Dabei sollte die Lehrkraft die Schüler*innen dazu anleiten, statt der Umgangs- und Alltagssprache allmählich mehr und mehr die Bildungs- und Fachsprache zu nutzen.

Begründungen mathematischer Auffälligkeiten und/oder Zusammenhänge können nur mit ausreichender Präzision gelingen. Schüler*innen müssen dazu auf ein gemeinsames Repertoire an Fachbegriffen zurückgreifen können, welches demnach auch gemeinsam entwickelt und trainiert werden muss. Nur dann kann im Unterricht eine Begriffssicherheit erzielt werden, die ein innerfachliches Begründen und Argumentieren ermöglicht.

Ausgehend von den bei der Auswertung erkannten Schwierigkeiten in der Klasse kann eine Auswahl der folgenden grundlegenden, vertiefenden oder weiterführenden Erfahrungen und Übungen umgesetzt werden:

Umfang und Flächeninhalt

Umfang

Unter dem Umfang einer ebenen Figur bzw. Fläche versteht man die Länge ihrer Begrenzungslinie. Um den Kindern diese abstrakte Vorstellung zu erleichtern, bietet es sich an, im Unterricht diese zunächst handelnd erfahrbar zu machen und dadurch die Grundlage für die Ausbildung mentaler Vorstellungsbilder zu legen. Im Anschluss kann dann durch gezielte Fragen der Übergang zum mentalen Handeln und Denken angebahnt werden.

Alltagssituationen: Wann ist es wichtig, den Umfang zu bestimmen?

Beispiele:

- bei der Umrandung des Swimmingpools, eines Sandkastens, einer Terrasse
- bei der Umfassung eines Gartenbeetes, Blumenbeetes
- beim Errichten eines Zauns
- beim Ziehen von Linien um ein Fußballfeld, Spielfeld
- beim Einrahmen eines Bildes
- bei der Umrandung einer Glückwunschkarte

Die Schüler*innen erfassen die Länge der Begrenzungslinie (Umfang) durch

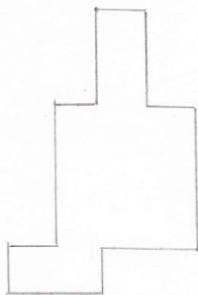
- Nachfahren mit dem Finger
- Nachmalen mit farbigen Stiften
- Ausschneiden von Figuren
- Abschreiten einer Begrenzungslinie einer großen Fläche (z. B. Fußballplatz) mit einem „Zählrad“ oder „Roll-Tacho“

Indirektes Vergleichen des Umfangs verschiedener Figuren

- Die Schüler*innen vergleichen den Umfang von Figuren mit Hilfsmitteln, z. B. legen sie eine Schnur oder einen Faden um Figuren und verbalisieren „Die Begrenzungslinie, die Umrandung oder der Umfang der Figur ist länger als..., kürzer als..., gleich lang wie ...!“
- Die Schüler*innen legen mit gleich langen Fäden verschiedene Figuren. Sie gewinnen so die Erkenntnis, dass unterschiedliche Figuren den gleichen Umfang haben können.

Direktes Vergleichen des Umfangs mit Maßeinheiten

- Die Schüler*innen umranden Figuren mit Streichhölzern oder Zahnstochern und bestimmen so den Umfang. Sie verbalisieren: „Die Umrandung, die Begrenzungslinie oder der Umfang ist 8 Streichhölzer lang.“ Sie verwenden die Streichhölzer als „Einheitsmaß“.
- Analog dazu kann der Umfang mit Hilfe des Karopapiers bestimmt werden: Wie viele Kästchenlängen misst der Umfang der Figur?
- Die Schüler*innen messen den Umfang von Figuren mit dem Lineal. Wie lang ist der Umfang?
Schätze und begründe deine Schätzung.
Bestimme dann den Umfang mit dem Lineal.



Copyright Abbildung: IQB

- Zeichne Figuren auf ein unliniertes Blatt und bestimme den Umfang mit dem Lineal.

Anwendung im Unterricht und im Alltag

- Bestimme den Umfang der verschiedenen Würfelnetze bzw. den Umfang der Fünflinge (Sowohl bei den Würfelnetzen als auch bei den Pentominos ist der Flächeninhalt gleich, der Umfang kann jedoch unterschiedlich sein.)
- Der Umfang kann dabei durch Abzählen der Karos, durch Umranden mit Streichhölzern oder durch Abmessen mit dem Lineal bestimmt werden.
- Fermi-Aufgabe: Wir umzäunen die Pferdekoppel mit Pfosten und Balken. Wie viele Balken und Pfosten brauchen wir?
- Wir umranden ein Blumenbeet in unserem Schulgarten. Wie viele Pflastersteine brauchen wir?

Flächeninhalt

In der Primarstufe soll der Flächeninhalt noch nicht auf der Grundlage von Formeln berechnet, sondern handlungsorientiert und ausgehend von Alltagssituationen erforscht werden. Zwei Flächen haben dann den gleichen Flächeninhalt, wenn sie deckungsgleich, zerlegungsgleich oder auslegungsgleich sind. Diese aktiven Zugänge entsprechen den unterrichtlichen Vorgehensweisen in der Grundschule. So kann ein Verständnis für den Flächeninhalt durch verschiedene Übungen entwickelt werden. Ein erster Zugang kann über das direkte Vergleichen von Flächen (Flächen übereinanderlegen) oder das Zerschneiden und Vergleichen erfolgen. Diese Möglichkeit ist nicht immer gegeben, weswegen im Unterricht weitere Möglichkeiten der Bestimmung des Flächeninhalts erarbeitet werden müssen. Eine gemeinsame Grundidee all dieser unten aufgeführten Aktivitäten ist das Nutzen von Einheitsflächen als Vergleichsgröße:

Alltagssituationen: Wann ist es im Alltag wichtig, den Flächeninhalt zu bestimmen?

Beispiele:

- beim Bestimmen der Größe eines Zimmers, Hauses – Pläne betrachten
- beim Kauf von Fliesen, Bodenbelägen
- beim Bestimmen der Spielplatzgröße im Rahmen der Spielplatzgestaltung – welche Geräte können aufgebaut werden?
- beim Berechnen der Größe von Spielfeldern (Fußballfeld, Tennisfeld, ...)

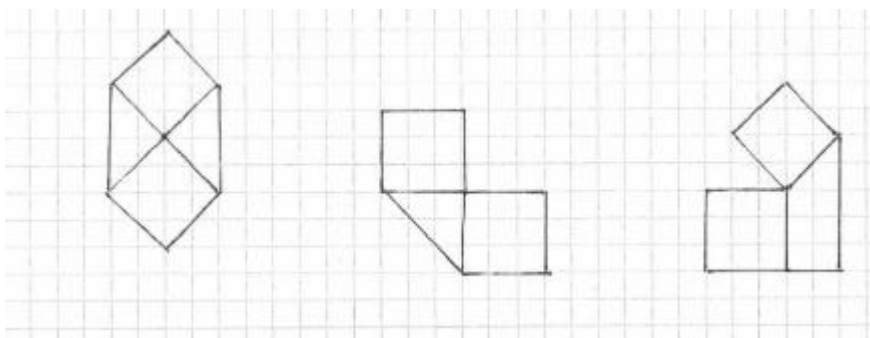
Direktes Vergleichen von Flächeninhalten

Flächengrößen können direkt verglichen werden, z. B.:

- Passt das Arbeitsblatt in die Klarsichthülle?
- Reicht der Pappkarton für das Erstellen einer Schablone?
→ Argumentieren, Kommunizieren
- Differenzierung:
Ich kann die Schablone nicht erstellen, obwohl die Fläche des Kartons größer ist. Erkläre.

Indirektes Vergleichen von Flächeninhalten

- Enaktiv: Ausmessen von Flächen mit willkürlichen Vergleichsobjekten (z. B. Tisch oder Tür mit Handflächen auszählen). Diese Aktivität ist vor allem für den Einstieg ins Thema geeignet, um nicht nur das Prinzip des Ermitteln des Flächeninhalts zu thematisieren, sondern zudem auf die Notwendigkeit von standardisierten Vergleichsobjekten sowie einer genauen Messhandlung aufmerksam zu machen.
- Tangram: Die Figuren sehen unterschiedlich aus, haben aber den gleichen Flächeninhalt.
- Welche Figur hat den größten Flächeninhalt? Begründe. (→ Verbalisieren, Kommunizieren)



Copyright Abbildung: IQB

ggf. können die Flächen ausgeschnitten und übereinandergelegt werden.

Vergleichen des Flächeninhalts mit Einheitsflächen

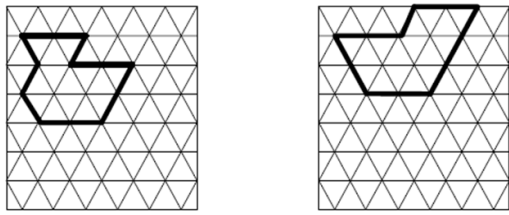
- Auslegen von Figuren mit standardisierten Plättchen/Formen/Einheitsquadraten (z. B. Parkettieren von Flächen mit verschiedenen geometrischen Flächen)
- Ein zeichnerisches „Auslegen“ ist ebenfalls möglich, dazu können Schablonen benutzt werden.

Wie viele von diesen kleinen Dreiecken  passen insgesamt in das große Dreieck?



_____ kleine Dreiecke passen insgesamt in das große Dreieck.

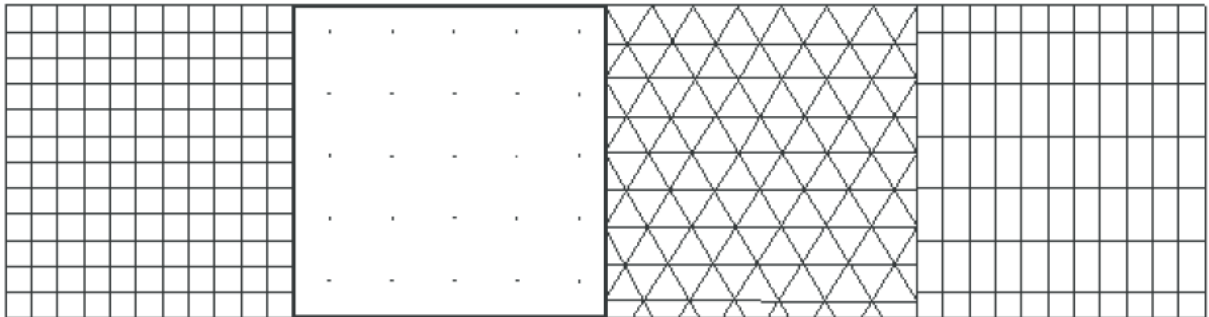
- Zeichnen, Messen durch Auszählen und Vergleichen von Flächen mit kariertem Hintergrund
- Zeichnen, Messen durch Auszählen und Vergleichen mit anderen Hintergrundrastern (vgl. Abbildung „Dreiecke“)



Copyright Abbildung: IQB

Mögliche Raster zur Thematisierung von vergleichenden Einheitsflächen sind z. B.:

- Gitterpapier (quadratische Kästchen)
- Punkteraster
- Raster aus gleichseitigen Dreiecken
- Raster aus Rauten bzw. Rechtecken.



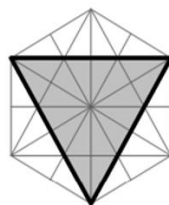
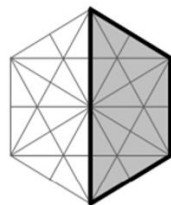
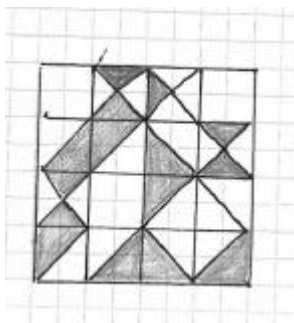
Beispiele für mögliche Raster zur Thematisierung des Flächeninhalts; Copyright Abbildungen: IQB

- Differenzierung:
Einheitsquadrate in der Diagonale halbieren bzw. vierteln und damit den Flächeninhalt bestimmen
- Zerlegungen von Flächeninhalten auf dem Geobrett, Spannen verschiedener Figuren auf dem Geobrett und anschließendes Bestimmen von Flächeninhalten durch Zerlegen in Dreiecke oder in Quadrate.

Begründungsaufgaben zu flächeninhaltsgleichen Figuren

- Ist die weiße Fläche genauso groß wie die graue Fläche? (→ Kommunizieren, Problemlösen)

Lisa sagt: „Die beiden grauen Flächen sind gleich groß.“



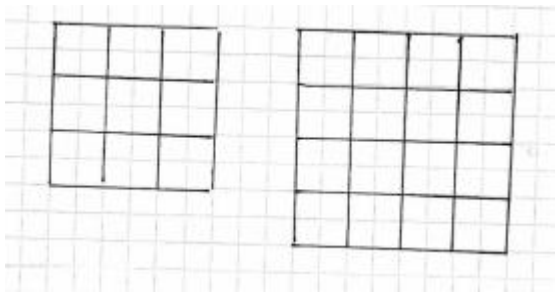
Hat Lisa recht? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.

Copyright Abbildung: IQB

- (→ Argumentieren, Kommunizieren)

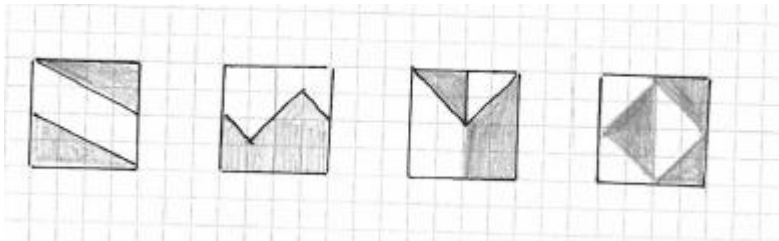
- Färbe das Quadrat so, dass die graue Fläche genauso groß ist wie die weiße Fläche. Erkläre dein Vorgehen. (→ Argumentieren, Kommunizieren)



Copyright Abbildung: IQB

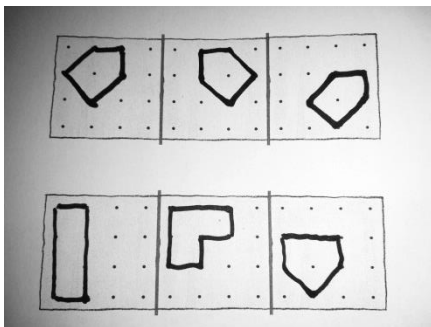
Differenzierung: Größe des Quadrats

- Differenzierung: Die Schüler*innen bestimmen den Flächeninhalt von Figuren, indem sie kein Karopapier verwenden, sondern die Einteilung der Flächen in Einheitsflächen selbst zeichnerisch anfertigen. (→ Darstellen, Kommunizieren, Argumentieren, Problemlösen)
- Ist bei diesen Quadraten die graue Fläche genauso groß wie die weiße Fläche? Begründe. (→ Argumentieren, Kommunizieren)



Copyright Abbildung: IQB

- Spannen von flächeninhaltsgleichen Figuren auf dem Geobrett, anschließendes Einzeichnen auf einem Punkteraster:

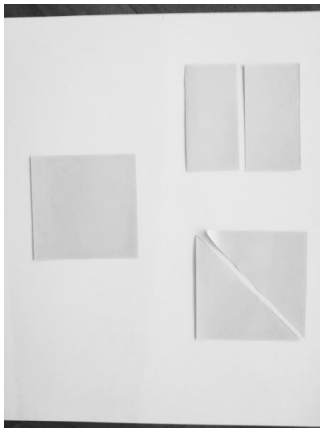


Copyright Foto: IQB

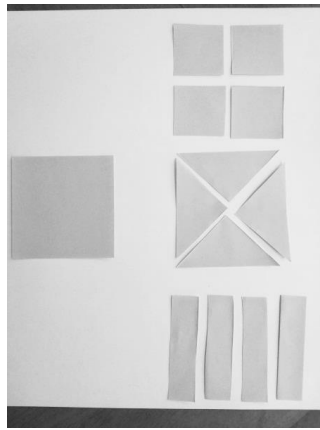
Dieses Beispiel gibt Anlass zur Diskussion, dass Flächeninhaltsgleichheit nicht automatisch Deckungsgleichheit bedeuten muss. (→ Argumentieren, Kommunizieren)

Vergleichen des Flächeninhalts durch Falten

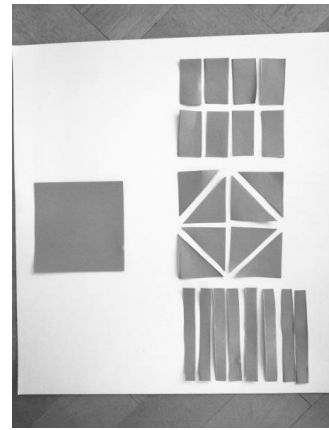
- Auch das Falten kann eine Aktivität darstellen, die die Gleichheit von Flächeninhalten bewusst machen kann.
Falte oder zerschneide ein Quadrat so, dass es in gleich große Teile zerlegt wird. Finde verschiedene Möglichkeiten.



Zerlegung in jeweils zwei gleich große Hälften
Copyright Fotos: IQB

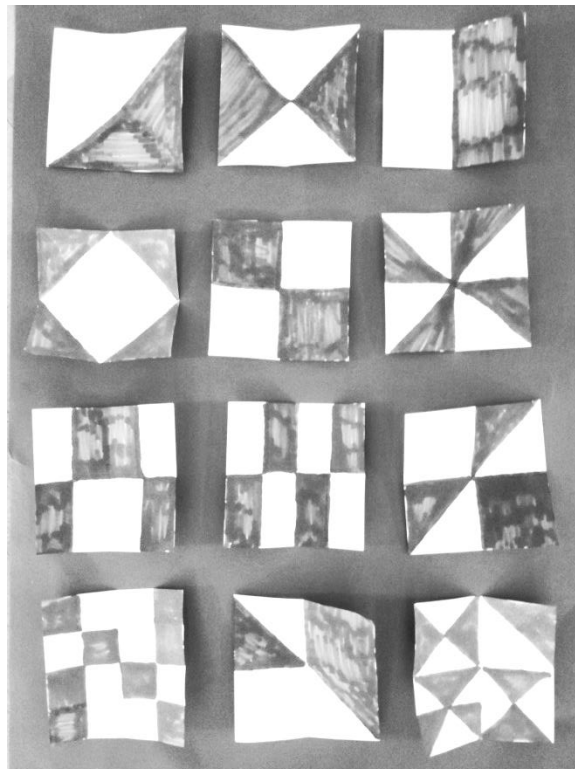


Zerlegung in jeweils vier gleich große Teilflächen



Zerlegung in jeweils acht gleich große Teilflächen

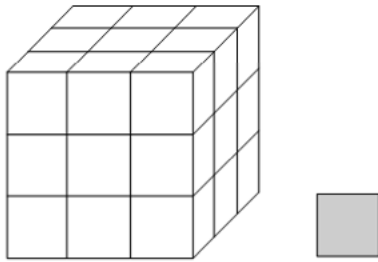
- Nimm Notizzettel aus dem Zettelkasten. Färbe immer eine Hälfte. Finde möglichst viele verschiedene Möglichkeiten. Das Falten kann dir helfen.



Copyright Foto: IQB

Bestimmen von Körperoberflächen

- Im Rahmen der Differenzierung können Flächeninhalte auch als Oberfläche von dreidimensionalen Körpern bestimmt werden:



Wie viele graue Quadrate brauchst du, wenn du alle Seiten des weißen Würfels bekleben willst? Berücksichtige auch Seiten, die du nicht siehst.

Ich brauche _____ Quadrate.

Flächeninhalt und Umfang im Vergleich zueinander

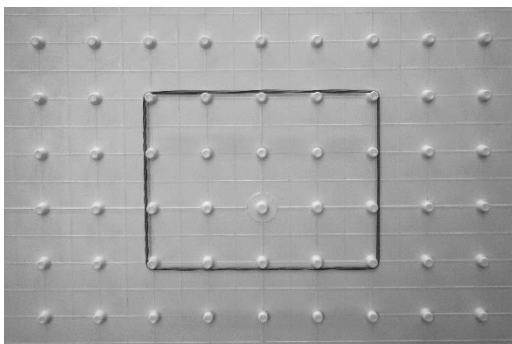
Eine Schwierigkeit besteht darin, dass es den Schüler*innen schwerfällt, die Begriffe „Umfang“ und „Fläche“ zu unterscheiden. Deshalb können die Begriffe mit symbolischen Handlungen verdeutlicht werden:

Fläche: Hand auf ein Blatt legen

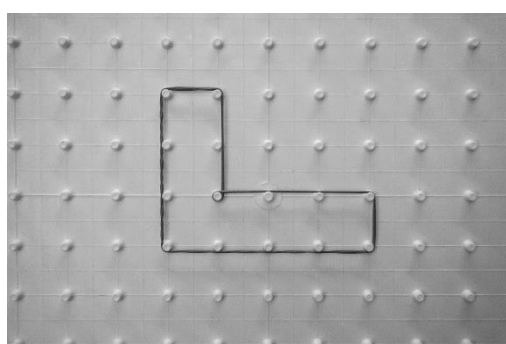
Umfang: Blatt mit Finger/Stift umkreisen

Übungen:

- Bei der Bestimmung des Umfangs einer Figur auf dem Geobrett dient der Abstand zwischen zwei direkt benachbarten Stiften als Maßeinheit.
Die Schüler*innen ermitteln den Umfang durch das Abzählen der Abstände.
Hierbei muss man darauf hinweisen, dass diagonale Verbindungen zunächst ausgeschlossen bleiben. (Zur Differenzierung nach oben hin eignen sie sich allerdings gut.) Das Abzählen der Stiftabstände beschränkt sich nur auf Figuren, deren Seiten waagrecht und senkrecht gespannt werden.



Figur A

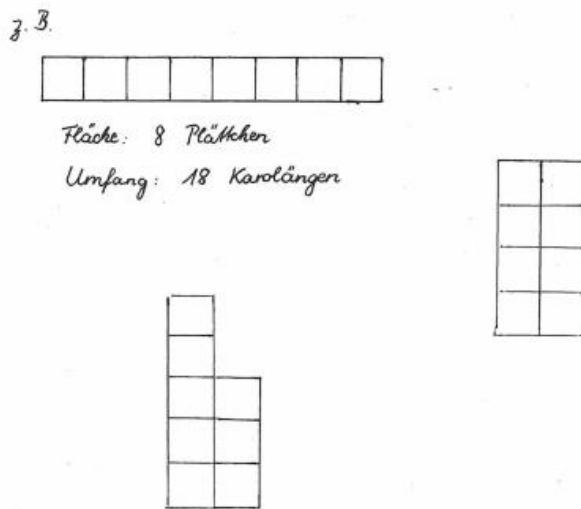


Figur B

Copyright Fotos: IQB

Beim Vergleich der Figuren A und B kann man auf den Unterschied zwischen Umfang und Flächeninhalt hinweisen. Beide Figuren haben den gleichen Umfang (14 Abstände), aber unterschiedliche Flächeninhalte (A: 12 Kästchen, B: 6 Kästchen).

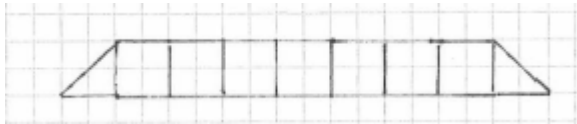
- Die Schüler*innen legen Figuren aus 8 Plättchen und bestimmen jeweils den Flächeninhalt und den Umfang.



Copyright Foto: IQB

Dabei gewinnen die Schüler*innen folgende Erkenntnisse:

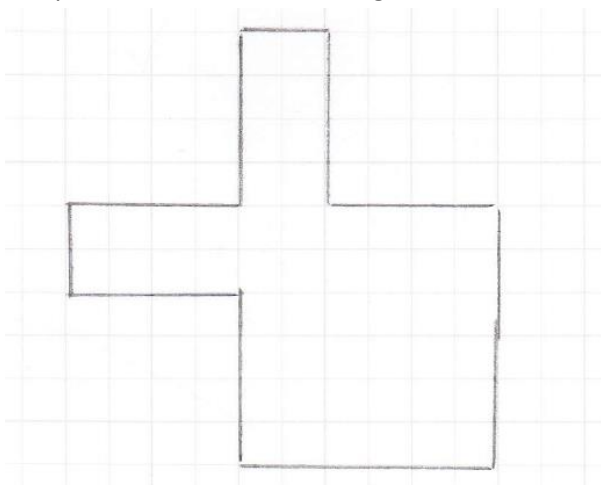
- Umfangsgleiche Figuren müssen nicht denselben Flächeninhalt haben.
- Flächeninhaltsgleiche Figuren können einen unterschiedlichen Umfang haben.
- Differenzierung:
Peter schneidet ein Plättchen in der Diagonalen durch und legt damit diese Figur.



Copyright Foto: IQB

Er sagt: „Sowohl die Größe der Fläche als auch der Umfang bleiben gleich.“ Hat er recht?
(→ Argumentieren, Kommunizieren)

- Zeichne Figuren auf das Karopapier. Alle Figuren sollen den Umfang von 10 Karolängen haben. (→ Problemlösen)
- Wir verkleinern bzw. vergrößern eine Figur. Welche Auswirkungen hat das auf Fläche und Umfang?
Beispiel: Bestimme den Umfang und die Fläche dieser Figur.



Copyright Abbildung: IQB

Verkleinere die Figur: 2 Karokästchen entsprechen 1 Karokästchen. Bestimme Umfang und Fläche dieser Figur.

Vergrößere die Figur: 2 Karokästchen entsprechen 4 Karokästchen. Bestimme Umfang und Fläche dieser Figur.

- Finde eine Figur mit 9 oder 11 Kästchenlängen.
Dabei können die Schüler*innen erkennen, dass Figuren mit rechtwinkligen Ecken nur Umfänge mit geraden Zahlen haben können. Der kleinste Umfang beträgt 4 Kästchenlängen. (→ Problemlösen, Argumentieren)

Rauminhalt

Entwicklung eines Volumenbegriffs

Analog zum quantitativen Flächeninhaltsvergleich mittels Einheitsmaßen, erfolgt auch die Erarbeitung des Rauminhalts handlungsorientiert und sprachbegleitet über das Messen und Vergleichen von Objekten mit gleichen Einheiten. Hierbei entdecken die Kinder beim Bauen, dass Objekte, die aus gleich vielen, gleichen Teilen bestehen, raumgleich sind. Vielfältige Lernumgebungen, welche die Form der natürlichen Differenzierung bieten, sind möglich.

Sinnvoll sind vorausgehende Übungen, bei denen die Schüler*innen zahlreiche raumgeometrische Erfahrungen im Umgang mit Baumaterialien sammeln können, wie z. B.:

- Freies Bauen mit Einheitswürfeln
- Erstellen von Bauplänen und Bauen nach Bauplänen
- Betrachten und Beschreiben der Gebäude aus verschiedenen Perspektiven
- Vergleichen von Bauwerken und dazu passenden Schrägbildern

Indirektes Vergleichen mit Hilfe einer Vergleichsgröße

- Aus einer Rolle Knete eine Kugel formen, um anschließend daraus einen Würfel oder ein anderes Gebilde zu kneten. → Der Rauminhalt bleibt stets gleich.
- Bauen von verschiedenen Phantasiegebäuden mit gleicher Anzahl an Einheitswürfel, Streichholzschachteln oder LEGO-Steinen. Z. B. „Baue aus 7 Würfeln verschiedene Würfelgebäude.“ Hierbei sind auch Baudiktate in Partnerarbeit möglich.
- Analog: „Finde alle Würfelvierlinge. Vergleiche den Rauminhalt. Was stellst du fest? Begründe“ (→ Argumentieren, Kommunizieren).
- Bauen mit den Teilen des SOMA-Würfels: Hier kann die offensichtliche Volumengleichheit trotz unterschiedlichem Aussehen der Bauwerke thematisiert werden.
- Bauen unterschiedlicher Quader aus 20 Einheitswürfeln
- Besprechen der Zusammensetzung des Dienes-Materials, z. B. des Tausenderwürfels
- Besprechen der Struktur eines Würfels



Der Würfel nimmt einen Raum von 2x2x2 kleinen Würfeln ein.



Der Würfel nimmt einen Raum von $3 \times 3 \times 3$ kleinen Würfeln ein.

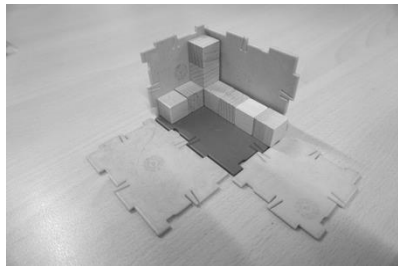
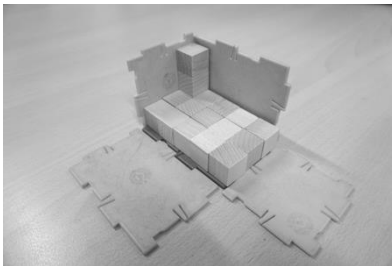
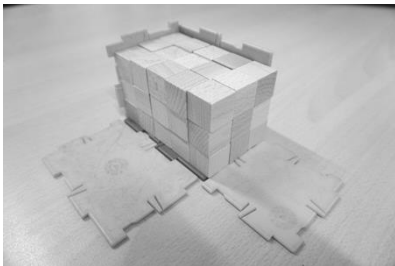
Copyright Fotos: IQB

Begründungen einfordern, z. B. warum ein Würfel der Kantenlänge 2 aus 8 kleinen Würfeln besteht.

- Einheitswürfel in verschiedene Schachteln, Würfel oder Quader stapeln, die oben offen sind und die Anzahl bestimmen. Dabei werden unterschiedliche Strategien besprochen, um das Volumen des Hohlkörpers zu bestimmen.

Beispiel: Ich bestimme die Anzahl der Einheitswürfel für eine Bodenplatte, überlege, wie viele dieser Bodenplatten übereinandergestapelt werden und berechne dann die Anzahl mit einer Malaufgabe.

ODER: Ich bestimme die Anzahl der Einheitswürfel einer Stange, überlege, wie viele Stangen in die Schachtel hineinpassen und berechne dann mit der Malaufgabe die Gesamtzahl.



Copyright Fotos: IQB

- Fermi-Aufgabe: Passen die Kartons mit den Wasserfarbkästen aller Kinder der Schule in ein Klassenzimmer?

Passen eine Million Einheitswürfel in unser Klassenzimmer? (→ Argumentieren, Kommunizieren, Problemlösen, Modellieren, Darstellen)

Alltagssituationen:

- Wann ist es wichtig, den Rauminhalt zu bestimmen (Gläser, Tankfüllung)?
- Formen von Verpackungen im Hinblick auf Lager- und Transportfähigkeit überprüfen, wie z. B. von Milch- bzw. Apfelsaftverpackungen, Wasserkisten
(→ Argumentieren, Kommunizieren, Problemlösen, Modellieren, Darstellen)

10. Worum geht es im Inhaltsbereich Muster und Strukturen allgemein?

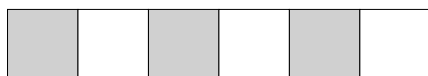
Begriffsklärung

In der mathematikdidaktischen Literatur werden die Begriffe „Muster“ und „Struktur“ vielfach synonym verwendet. Dennoch sind Nuancen in den Begrifflichkeiten zu unterscheiden.

Die Bezeichnung Muster beruht auf dem Wort „monstrare“ (lat.) und meint ein erklärendes Zeigen. Die Bezeichnung Struktur beruht auf dem Wort „struere“ (lat.) und meint Zusammensetzen.

In einem mathematischen Muster sind Beziehungen bzw. Gesetzmäßigkeiten zwischen Zahlen, Formen, Funktionen, etc. dargestellt. Wird die Gesetzmäßigkeit erkannt, lassen sich Vorhersagen treffen, wie ein Muster „weitergehen“ oder erweitert werden kann.

Muster können gekennzeichnet sein durch Regelmäßigkeit (im folgenden Beispiel bei allen drei Mustern) oder Wiederholungen (z. B. bei Muster 1).

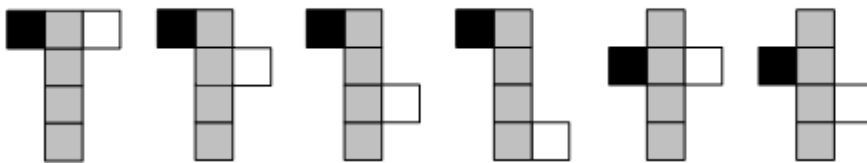


Muster dienen dazu, auch diejenigen Teile eines mathematischen Sachverhalts sichtbar oder herstellbar zu machen, die man in den gegebenen Situationen zunächst nicht sieht. Beim Ausfüllen der folgenden Tabelle kann man beispielsweise neben dem Zusammenhang zwischen Anzahl und Preis (1 Kind: 3 Euro, 3 Kinder: 9 Euro) verschiedene weitere Beziehungen entdecken, z. B. 20 ist das Doppelte von 10 und 60 ist auch das Doppelte von 30.

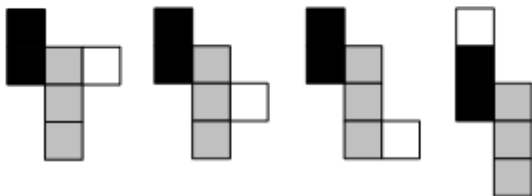
Anzahl der Kinder	1	3	5	10	20	27
Eintrittspreis	3 €			30 €	60 €	

Unter Struktur versteht man den Kern eines mathematischen Beziehungsgefüges und dessen Eigenschaften. Struktur ist also die Art und Weise, wie die Teile eines Ganzen miteinander verbunden sind. Die Struktur hinter dem oben abgebildeten Muster 3 ist z. B. durch die Achsensymmetrie gegeben und im Muster 1 durch die Wiederholung des Grundelements aus den ersten beiden Quadraten. Auch am Beispiel der Würfelnetze lässt sich eine mathematische Strukturierung verdeutlichen, die plausibel erklären lässt, dass es nur diese 11 Würfelnetze gibt. Diese Strukturierung basiert auf den 4er-, 3er- oder 2er-Streifen und einer systematischen Verschiebung oder einem systematischen Umlegen der weiteren Quadrate in jeder Reihe (wobei kongruente Netze jeweils ausgeschlossen werden). In dieser Strukturierung lassen sich wiederum verschiedene Muster entdecken (z. B. in der ersten Reihe hängen immer vier Quadrate aneinander, die einzelnen Quadrate wandern auf der rechten Seite um eines nach unten, etc.).

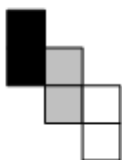
Würfelnetze mit **Viererstreifen**



Würfelnetze mit **Dreierstreifen**



Würfelnetze mit **Zweierstreifen**



Wie die Beispiele zeigen, sind Muster und Strukturen eng aufeinander bezogen. Muster sind eher Phänomene in denen man Strukturen erkennen kann und Strukturen ähneln eher „Bauplänen“, die wiederum dazu dienen können, Muster herzustellen. Je nach Aufgabenstellung kann das Muster oder die Struktur mehr im Vordergrund stehen.

Unterricht

Muster und Strukturen sind als übergreifendes Prinzip das Fundament aller Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts und der Mathematik als Wissenschaft. Gegenstand des Mathematikunterrichts ist das Erkunden, das Entdecken, das Herstellen und das Nutzen von Mustern.

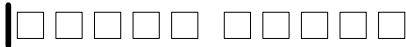
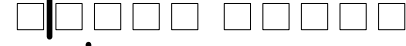
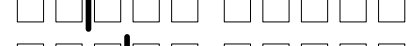
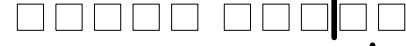
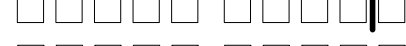
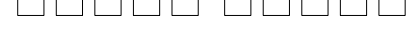
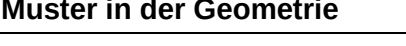
Das Denken in Mustern und Strukturen bedeutet eine entscheidende Steigerung der Denkökonomie. Je besser ein Kind Zahlen, Rechnungen, Formen, einzelne Wissensselemente und Fertigkeiten vernetzen kann, desto geringer wird sein Gedächtnis belastet.

Bei der Diskussion von Mustern und Strukturen werden insbesondere die allgemeinen mathematischen Kompetenzen *Darstellen*, *Argumentieren* und *Kommunizieren* gefordert und gefördert.

Im Folgenden werden Beispiele zu den verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen dargelegt, an denen das übergreifende Prinzip von Mustern und Strukturen für den Mathematikunterricht verdeutlicht wird. Vor allem die enge Vernetzung zwischen Arithmetik und Geometrie wird daraus ersichtlich.

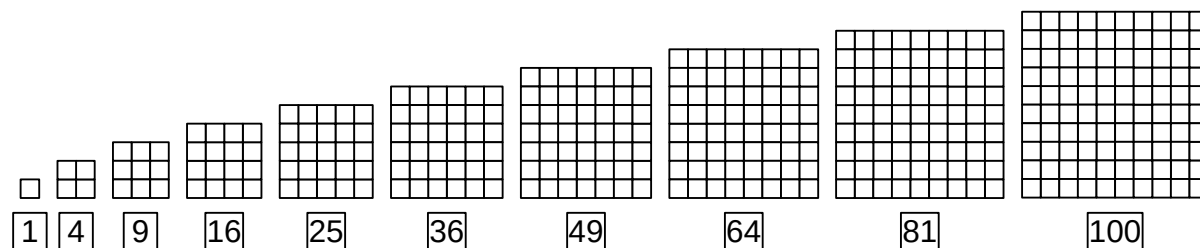
Muster in der Arithmetik

Muster und Strukturen sind grundlegend für das Zahlverständnis (z. B. Stellenwertsystem, mathematische Strukturen in Arbeitsmitteln) und das Verständnis der Rechenoperationen (z. B. Entwicklung von Grundvorstellungen zu Multiplikationsaufgaben, Zahlzerlegungen).

	$0 + 10$
	$1 + 9$
	$2 + 8$
	$3 + 7$
	$4 + 6$
	$5 + 5$
	$6 + 4$
	$7 + 3$
	$8 + 2$
	$9 + 1$
	$10 + 0$

Muster in der Geometrie

Das Beispiel Quadratzahlen zeigt den Bezug zwischen einer geometrischen Folge und einer arithmetischen Zahlenfolge.



Vertiefend können folgende Fragestellungen bearbeitet werden: Wie viel muss man zur ersten Quadratzahl addieren, um zur zweiten zu kommen? Wieviel fehlt von der Zweiten zur Dritten? ... Was fällt dir auf? Wie heißt die Quadratzahl von 11, von 12, ...?

Muster in der Kombinatorik

Muster und Strukturen in der Kombinatorik werden z. B. in Baumdiagrammen deutlich. Alle Möglichkeiten eines kombinatorischen Problems können so übersichtlich erfasst werden.

Die Klasse 3a besucht eine Zirkusvorstellung. Max, Uli, Susanne und Gabriele sind enge Freunde und wollen nebeneinandersitzen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, sich nebeneinanderzusetzen?

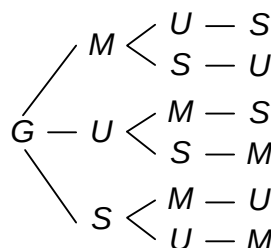
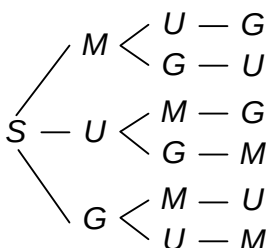
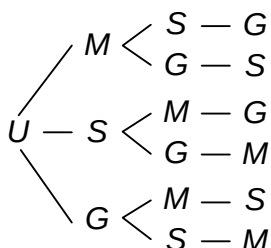
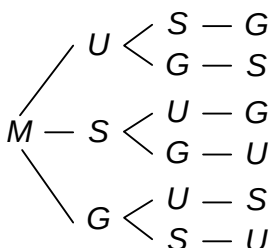
Es gibt _____ Möglichkeiten.

Max = M

Uli = U

Susanne = S

Gabriele = G



Muster in der sachbezogenen Mathematik

Wenn zwischen Größen und/oder Zahlen ein Rechenmuster besteht, mit dem man eine Größe und/oder Zahl aus der anderen bestimmen kann, so spricht man davon, dass Größen bzw. Zahlen in einem „funktionalen Zusammenhang“ stehen.

Mögliche Beispiele:

3. Proportionaler Zusammenhang von zwei Größen:

Welches Waschmittel ist günstiger?



A



B

A

Gewicht in kg	5	1
Preis in €	15	3

B

Gewicht in kg	4	2	1
Preis in €	10	5	2,50

4. Funktionaler Zusammenhang von zwei Zahlen:

Bestimmen der Kantenlänge und des Rauminhalts von Würfeln (durch Auszählen von

Kantenlänge	2	3	4		
Rauminhalt	8	27	64		

Einheitswürfeln).

10.1 Aufgaben zu Arithmetischen Mustern

Aufgabe 35 in Testheft B

40		10
	74	26
		13
	58	
62		80

Ergänze Amirs Satz.

Amir sagt: „Die Zahl 13 passt nicht zu den anderen, denn alle anderen Zahlen

_____.

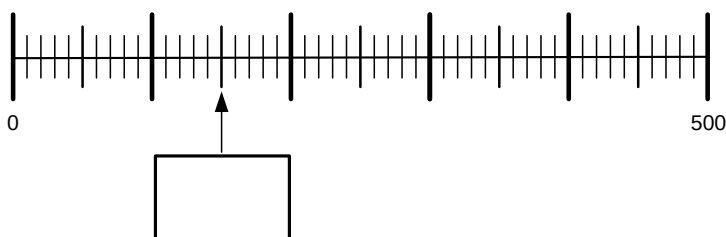
RICHTIG	Sinngemäß eine der folgenden Antworten: sind gerade ODER sind durch zwei teilbar ODER kann Amir/ich durch 2 teilen ODER sind aus der 2er-Reihe
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)

Aufgabe 29 in Testheft C

Wie heißt die Zahl? Trage ein.



RICHTIG	150
---------	-----

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)

Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)
---	--

Aufgabe 34 in Testheft B

2	5	7	9
16	40	56	

Welche Zahl fehlt? Kreuze an.

64

☐

72

☐

88

☐

90

☐

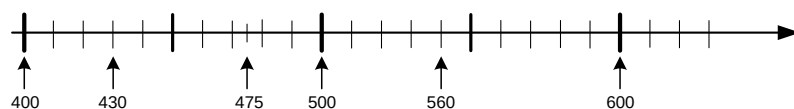
RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt. Richtig ist auch, wenn nichts angekreuzt wurde und 72 in der Tabelle eingetragen wurde.
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen (3.2.b)

Aufgabe 38 in Testheft B

Eine Zahl ist falsch. Streiche sie durch.



RICHTIG	Die Aufgabe ist richtig gelöst, wenn die Zahl 560 durchgestrichen ist. Die Aufgabe ist auch richtig gelöst, wenn die Zahl 560 anders markiert ist.
---------	--

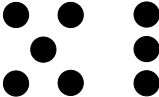
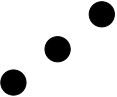
Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)

Aufgabe 32 in Testheft C

Die dargestellte Zahl soll dreistellig sein.

Wie viele Plättchen kann Asta zu den Hundertern noch dazulegen?

Hunderter	Zehner	Einer
		

_____ Plättchen

RICHTIG	1
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)

Aufgabe 24 in Testheft B

Welche Zahl ist dargestellt?

Hunderter	Zehner	Einer	
			_____

RICHTIG	415
---------	-----

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)

Aufgabe 32 in Testheft B

3 Zahlenpaare wurden nach der gleichen Regel gebildet.

Ein Zahlenpaar passt nicht.

Kreuze es an.

31	62	13	26	42	84	23	45
----	----	----	----	----	----	----	----

☐
☐
☐
☐

Begründe.



RICHTIG	"23 45" wurde angekreuzt UND in der Begründung wird deutlich, dass die Zahlen immer verdoppelt bzw. halbiert (von hinten gelesen) werden, dies aber beim vierten Zahlenpaar nicht zutrifft, z. B.: <i>Die zweite Zahl ist immer das Doppelte der ersten, beim 4. Zahlenpaar ist das nicht das Doppelte.</i> <i>Die erste Zahl ist immer die Hälfte der zweiten, beim 4. Zahlenpaar ist das nicht die Hälfte.</i> <i>Die Zahl wurde immer verdoppelt außer bei der vierten. (Dort müsste eine 46 stehen.)</i> <i>Beim vierten Paar müsste 23 und 46 stehen, da bei allen anderen immer verdoppelt wird.</i>
FALSCH	"23 45" wurde NICHT angekreuzt ODER "23 45" wurde angekreuzt UND/ODER es wurde keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben.

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)

Aufgabe 31 in Testheft B

Finde eine Zahlenfolge zu der Regel. Trage ein.

Regel: immer + 25

_____ ; _____ ; _____ ; _____ ; _____

RICHTIG	Alle Zahlenfolgen, die die Regel berücksichtigen und vollständig ausgefüllt sind.
---------	---

Teilaufgabenmerkmale	
1	1.1
2	2.1
3	3.1
4	4.1
5	5.1
6	6.1
7	7.1
8	8.1
9	9.1
10	10.1
11	11.1
12	12.1
13	13.1
14	14.1
15	15.1
16	16.1
17	17.1
18	18.1
19	19.1
20	20.1
21	21.1
22	22.1
23	23.1
24	24.1
25	25.1
26	26.1
27	27.1
28	28.1
29	29.1
30	30.1
31	31.1
32	32.1
33	33.1
34	34.1
35	35.1
36	36.1
37	37.1
38	38.1
39	39.1
40	40.1
41	41.1
42	42.1
43	43.1
44	44.1
45	45.1
46	46.1
47	47.1
48	48.1
49	49.1
50	50.1
51	51.1
52	52.1
53	53.1
54	54.1
55	55.1
56	56.1
57	57.1
58	58.1
59	59.1
60	60.1
61	61.1
62	62.1
63	63.1
64	64.1
65	65.1
66	66.1
67	67.1
68	68.1
69	69.1
70	70.1
71	71.1
72	72.1
73	73.1
74	74.1
75	75.1
76	76.1
77	77.1
78	78.1
79	79.1
80	80.1
81	81.1
82	82.1
83	83.1
84	84.1
85	85.1
86	86.1
87	87.1
88	88.1
89	89.1
90	90.1
91	91.1
92	92.1
93	93.1
94	94.1
95	95.1
96	96.1
97	97.1
98	98.1
99	99.1
100	100.1

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)

Aufgabe 27 in Testheft C

Finde eine Zahlenfolge zu der Regel. Trage ein.

Regel: immer - 20

_____ ; _____ ; _____ ; _____ ; _____

RICHTIG	Alle Zahlenfolgen, die die Regel berücksichtigen.
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)

Aufgabe 25 in Testheft C

Ein Ausschnitt aus der Hundertertafel.

Ergänze die drei fehlenden Zahlen.

		44

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
					86	87	88	89	90
					96	97	98	99	100

RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik		
	32		
	42	43	44

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)

Aufgabe 35 in Testheft C

$$19 + 56 = 75$$

$$29 + 46 = 75$$

$$39 + 36 = 75$$

$$49 + 26 = 75$$

Warum bleibt das Ergebnis immer gleich?

Begründe.



RICHTIG	Es wurde eine Begründung gegeben, aus der hervorgeht, dass der erste Summand (die erste Zahl) immer um 10 größer und der zweite Summand (die zweite Zahl) immer um 10 kleiner wird, z. B.: <i>Die 1. Zahl wird um 10 größer und die 2. Zahl wird um 10 kleiner.</i> <i>Weil vorne immer +10 ist, hinten immer -10.</i> <i>Denn bei der ersten Zahl wird der Zehner immer um 1 größer und bei der zweiten immer um 1 kleiner.</i>
FALSCH	Es wurde keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben, z. B.: <i>Der erste wird größer, der zweite wird kleiner.</i>

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)

Aufgabe 25 in Testheft B

Ein Ausschnitt aus der Hundertertafel.

Ergänze die beiden fehlenden Zahlen.

54	55	
	65	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
					86	87	88	89	90
					96	97	98	99	100

RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik
	45
	54 55 56
	65

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)

Aufgabe 37 in Testheft B

Die Aufgaben verändern sich nach einer Regel.

$$215 + 15$$

$$225 + 13$$

$$235 + 11$$

$$245 + 9$$

Teilaufgabe 37a in Testheft B

a) Schreibe die nächste Aufgabe auf.

_____ + _____

RICHTIG	255 [+] 7
---------	-----------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)

Teilaufgabe 37b in Testheft B

b) Beschreibe die Regel.

1. Zahl: _____.

2. Zahl: _____.

RICHTIG	Sinngemäß eine der folgenden Formulierungen: <i>[Die erste Zahl] wird um 10 größer. [Die zweite Zahl] wird um 2 kleiner.</i> <i>[Die erste Zahl] immer +10. [Die zweite Zahl] immer -2.</i>
FALSCH	Es wurde keine, eine falsche oder unvollständige Beschreibung gegeben.

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)

10.1.1 Aufgabenbezogener Kommentar

Bei Aufgaben mit arithmetischen Mustern müssen Beziehungen zwischen vorgegebenen Zahlen (wie in den Aufgaben 8, 32, 34, 35 und 14 im Testheft B sowie in den Aufgaben 4 und 12 im Testheft C) oder Zusammenhänge/Regelmäßigkeiten in strukturierten Zahldarstellungen (wie in den Aufgaben 24, 2 und 38 im Testheft B sowie in den Aufgaben 2, 29 und 32 im Testheft C) erkannt, beschrieben und/oder fortgesetzt werden.

Operative Beziehungen kann ein Kind häufig schnell erfassen, wenn leicht zu entdeckende Zahlbeziehungen wie z. B. Vorgänger/Nachfolger, das Doppelte/die Hälfte, immer um 100 größer, immer um 2 kleiner etc. zugrunde liegen.

Bei einigen Aufgaben sind die Beziehungen nicht auf den ersten Blick offensichtlich, so dass Strategien genutzt werden müssen, um diese zu erkennen. Während es bei den Darstellungsformen Stellenwerttafel, Zahlenstrahl und Ausschnitt aus der Hundertertafel eher um ein Erfassen der strukturierten Zahldarstellung geht, kann bei manchen Aufgaben ein systematisches Probieren und Prüfen von operativen Zusammenhängen hilfreich sein, um die Bildungsvorschrift zu erfassen. Das Ermitteln des Unterschieds oder einer multiplikativen Beziehung zwischen den Zahlen kann bei einigen arithmetischen Mustern (z. B. in Tabellen oder Zahlenfolgen) für das Erfassen der Beziehung/Struktur hilfreich sein.

Um das Erkennen von Gesetzmäßigkeiten zu fördern, sind Aufgaben geeignet, bei denen kein zu hoher Anspruch an die Rechenfertigkeit gestellt wird. So kann verhindert werden, dass Kinder die Gesetzmäßigkeiten nicht erkennen können, weil sie sich beispielsweise verrechnen. Deshalb eignen sich z. B. Aufgaben im Zahlenbereich bis 100 für die Thematisierung arithmetischer Muster und Strukturen.

Die anschließenden Anregungen für den Unterricht zu arithmetischen Mustern sind in folgende Kategorien eingeteilt:

1. Arithmetische Muster und Strukturen in Veranschaulichungen und Arbeitsmitteln

- Stellenwerttafel: A1, B9
- Zahlenstrahl: A15, B 6
- Hundertertafel: B, C

2. Arithmetische Muster und Strukturen bei Zahl- und Aufgabenbeziehungen

- Zahlenpaare: A9, A11
- Zahlenfolgen: A8, B4
- Zahlenbeziehungen: A12
- Aufgabenbeziehungen: B12, A14

Arithmetische Muster und Strukturen in Veranschaulichungen und Arbeitsmitteln

Stellenwerttafel

Für das Bearbeiten der Aufgaben 24 in Testheft B und 32 in Testheft C benötigen die Schüler*innen ein solides Zahlenverständnis sowie einhergehend ein sicheres Stellenwertverständnis und die Kenntnis von Darstellungswechseln; in diesem Fall geht es ganz konkret um den Darstellungswechsel von einer Zahl hin zu Plättchen in einer Stellenwerttafel und umgekehrt.

Um Aufgabe 32 in Testheft C lösen zu können, müssen die Schüler*innen darüber hinaus

- das Prinzip der fortgesetzten Bündelung verstanden haben.
- den Begriff „dreistellig“ kennen.

Zahlenstrahl

Aufgabe 38 in Testheft B und Aufgabe 29 in Testheft C

Der Zahlenstrahl ist eine gängige Veranschaulichung des Zahlenraums, die den Kindern in der Regel spätestens ab Klasse 2 vertraut ist. Die lineare Anordnung der Zahlen hilft bei der Strukturierung und des Zahlenraums und bei der Orientierung im Zahlenraum. Ergänzend kann durch die Verwendung unterschiedlicher Markierungen (z. B. längere und kürzere Striche) die besondere Rolle der 10 im Dezimalsystem deutlich werden.

Der Zahlenstrahl betont in besonderer Weise den Ordinalzahlaspekt von Zahlen. Ein ordinales Zahlverständnis wird unter anderem bei Übungen zum Ordnen von Zahlen und zur Orientierung im Zahlenraum benötigt.

Der Aufbau des Zahlenstrahls als Darstellungsmittel folgt dabei folgenden Regeln:

- Auf dem Zahlenstrahl werden die Zahlen von links nach rechts größer.
- Jeder natürlichen Zahl kann genau ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet werden. Auch die 0 hat einen Punkt.
- Für natürliche Zahlen gilt: Benachbarte Zahlen/Punkte sind immer gleich weit voneinander entfernt.
- Ein Zahlenstrahl kann skaliert sein – das heißt, dass Zahlen mit ihren entsprechenden Abständen zu den Nachbarzahlen durch Striche am Zahlenstrahl markiert werden können.
- Die Skalierungsstriche können mit den entsprechenden Zahlen beschriftet werden. Diese Beschriftung kann, muss aber nicht vollständig sein (so wie in den Aufgabenstellungen).
- Als visuelle Strukturierungshilfe sind die Skalierungsstriche der Stufenzahlen (10, 100, 1000, ...) oder der halbierten Stufenzahlen (5, 50, 500, ...) manchmal hervorgehoben, zum Beispiel etwas länger und/oder etwas dicker als die anderen Striche.

Zahlenstrahle müssen nicht bei null beginnen, sie können auch einen Ausschnitt eines bestimmten Zahlenraums darstellen (siehe Aufgabe 38 im Testheft B: Zahlenraum zwischen 400 und 630). Die vorgegebenen Zahlen geben einen Hinweis auf die Skalierung. Sie geben vor, wie groß die Abstände zwischen den Zahlen des Zahlenstrahls bzw. zwischen den Skalierungsstrichen sind. Erst wenn diese Beziehungen erfasst und genutzt werden, können Zahlen am Zahlenstrahl abgelesen und eingetragen werden.

Bei den beiden Aufgaben, Aufgabe 29 in Testheft C und Aufgabe 38 in Testheft B, liegt aufgrund der Verwendung eines in Zehnerschritten skalierten Zahlenstrahls jeweils eine elementare Aufgabe vor, die durch einfache Anwendung von Grundlagenwissen gelöst werden kann. Bei Aufgabe 29 in Testheft C ist es zum einen möglich, die fehlende Zahl durch Abzählen in Zehnerschritten (sowohl vor- als auch rückwärts) von einer gegebenen Zahl aus (0 oder 500) zu bestimmen. Zum anderen

kann man über das Erkennen der Hauptskalierung (100er Schritte) die genau in der Mitte liegende Zahl zwischen 100 und 200 als Lösungszahl ermitteln oder mit diesen Bezügen erneut durch Abzählen der Zehnerschritte finden. Bei Aufgabe 15 in Testheft C ist ein Zahlenstrahlausschnitt mit sechs Zahlen vorgegeben. Eine dieser sechs Zahlen steht an der falschen Stelle – diese muss von den Kindern ermittelt und durchgestrichen werden. Durch das Erkennen der Skalierung in Zehnerschritten können die Kinder die fünf Zahlen, die an der richtigen Stelle angegeben sind, bestätigen und somit die falsche Zahl ausschließen.

Hundertertafel

Die Aufgaben 2 in Testheft B und 2 in Testheft C setzen zur Lösungsfindung Kenntnisse über die Struktur der Hundertertafel (Entlang der Zeilen verändern sich die Zahlen um $+1/-1$, entlang der Spalten um $+10/-10$) und das Verständnis für den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems voraus.

Die Kinder sollen Ausschnitte aus der Hundertertafel ergänzen. Bei Aufgabe 25 in Testheft B müssen zwei der vier angrenzenden Zahlen einer vorgegebenen Zahl gefunden werden, die beiden anderen sind gegeben. In Aufgabe 25 in Testheft C gibt es nur eine Zahl zur Orientierung und der Ausschnitt erfordert zunächst eine Orientierung nach links und anschließend nach oben. Als zusätzliche Orientierung ist bei beiden Aufgaben eine unvollständige Hundertertafel vorgegeben.

Die Hundertertafel stellt eine Fortführung der im 1. Schuljahr eingeführten Zwanzigertafel dar und steht strukturell in einem engen Zusammenhang zum Hunderterfeld. Beide ermöglichen eine flächige Darstellung des Zahlenraumes. Im Gegensatz zum Hunderterfeld (Abb. 1) mit strukturiert angeordneten Punkten (kardinaler Aspekt) enthält die Hundertertafel (Abb. 2) die Zahlen in Zifferndarstellung und betont somit nicht die Menge, sondern den ordinalen Aspekt der Zahlen.

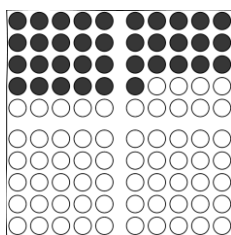


Abbildung 5: Hunderterfeld

Copyright Foto: IQB

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abbildung 6: Hundertertafel

Copyright Foto: IQB

Arithmetische Muster und Strukturen bei Zahl- und Aufgabenbeziehungen

Neben dem Verständnis zum Aufbau der Zahlen sowie zu den Rechenoperationen sollen die Kinder **Beziehungen und Strukturen zwischen Zahlen und Aufgaben erkennen und nutzen.**

Zahlenpaare

Bei dieser Aufgabe müssen die einzelnen Zahlen eines Zahlenpaares miteinander verglichen und Zusammenhänge zwischen ihnen erkannt werden. In der geforderten Begründung muss die ermittelte Beziehung zwischen den Zahlenpaaren bzw. das Wiederkehren des Musters beschrieben werden.

Zahlenfolgen

Arithmetische Zahlenfolgen sind Sequenzen, bei denen jedes Element der Zahlenfolge durch Veränderungen des vorherigen Elements (oder mehrerer vorheriger Elemente) gebildet wird. Der numerischen Regelmäßigkeit arithmetischer Zahlenfolgen sind keine Grenzen gesetzt. Beginnend bei der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... bis hin zu einer der bekanntesten Zahlenfolgen, der Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., bietet dieses Format einen mathematischen Spielraum, der zum analytischen Arbeiten, Beschreiben und Begründen herausfordert. Beginnend mit der einfachen Fortführung einer Zahlenfolge mit einer bekannten Regel, bis hin zur Entdeckung des zugrundeliegenden arithmetischen Prinzips und der Beschreibung und Erklärung der numerischen Zusammenhänge, wird die Auseinandersetzung mit Zahlenfolgen zu einer reichhaltigen mathematischen Lerngelegenheit.

So wird in Aufgabe 31 in Testheft B verlangt, von einer beliebigen Startzahl aus, eine Zahlenfolge mit einer vorgegebenen Regel (+ 25) zu bilden. Diese Form der Bildung einer Zahlenfolge besitzt ein geringeres Anforderungsniveau als die Aufgabe 27 in Testheft C. In dieser Aufgabe werden die Zahlen einer Zahlenfolge mit der Regel (- 25) gesucht. Dies gestaltet sich anspruchsvoller, da die Startzahl nun nicht beliebig gewählt werden kann, sofern nicht mit negativen Zahlen gearbeitet werden möchte (siehe Schwierigkeiten). Eine mögliche Strategie zur Lösungsfindung ist der Weg, vom letzten Element der Zahlenfolge ($20 \cdot 5$ ggf. plus einer weiteren beliebigen Zahl) zu starten und dann sukzessive 20 zu subtrahieren.

Zahlbeziehungen

Diese Aufgabe verlangt, dass einzelne Zahlen in Beziehung zueinander gesetzt werden. Dabei sind die Eigenschaften der Zahlen zu ermitteln und miteinander zu vergleichen. Zusammenhänge wie Vorgänger/Nachfolger, das Doppelte / die Hälfte oder gleiche Stellenwerte werden von den Kindern leichter erfasst, während gemeinsame Teiler oder Zahleigenschaften wie gerade und ungerade oftmals schwerer zu erkennen sind. Bei dieser Aufgabe muss erkannt werden, dass alle Zahlen bis auf die 13 gerade Zahlen sind.

Aufgabenbeziehungen

Bei Aufgabe 35 in Testheft C und Aufgabe 37 in Testheft B ist jeweils ein sog. „schönes“ bzw. strukturiertes Päckchen gegeben. In Aufgabe 37 in Testheft B müssen die Kinder die Struktur des Päckchens erkennen, diese Struktur für das Notieren der nächsten Aufgabe nutzen und sie schließlich beschreiben. Bei Aufgabe 35 in Testheft C muss das Päckchen weder beschrieben, noch fortgesetzt werden; stattdessen muss hier eine Begründung gefunden werden, warum in diesem strukturierten Päckchen die Summe immer gleichbleibt. Um diese Begründung formulieren zu können, müssen die Kinder erkannt haben, dass die beiden Summanden gegensinnig verändert werden, nämlich um 10 (der erste Summand wird immer um 10 größer, der zweite immer um 10 kleiner), und dass sich daher die Summe selbst nicht verändert. Wichtig bei dieser Begründung ist, dass deutlich wird, dass die Summanden nicht einfach nur „größer“ und „kleiner“ werden, sondern um genau den gleichen Wert.

10.1.2 Mögliche Schwierigkeiten

Arithmetische Muster und Strukturen in Veranschaulichungen und Arbeitsmitteln

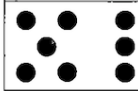
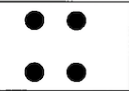
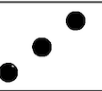
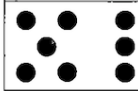
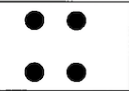
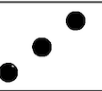
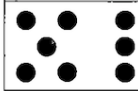
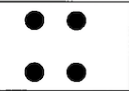
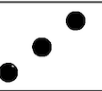
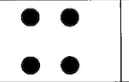
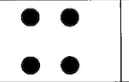
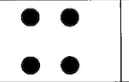
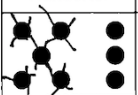
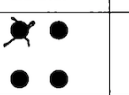
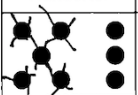
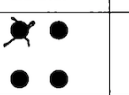
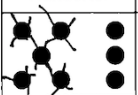
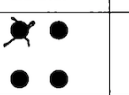
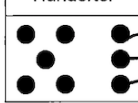
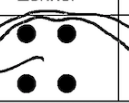
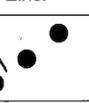
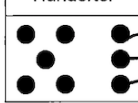
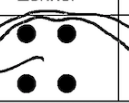
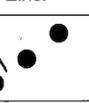
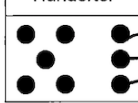
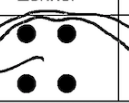
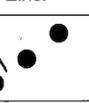
Stellenwerttafel

Im Allgemeinen können Schwierigkeiten auftreten, wenn die Kinder nicht (ausreichend) vertraut sind mit Stellenwerten, der Stellenwerttafel und der Möglichkeit, Zahlen mit verschiedenen Materialien darzustellen.

Aufgabe 24 in Testheft B

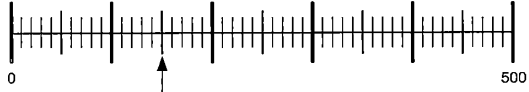
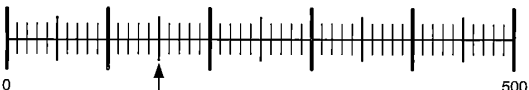
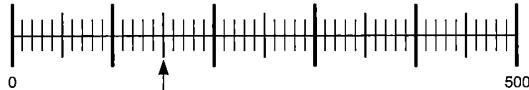
Fehlerhafte Schüler*innenlösung:	Mögliche Erklärungen:						
a) Welche Zahl ist dargestellt? <table><tr><th>Hunderter</th><th>Zehner</th><th>Einer</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table> <u>10</u>	Hunderter	Zehner	Einer				Die Gesamtanzahl der Plättchen wird ermittelt und notiert.
Hunderter	Zehner	Einer					
							
a) Welche Zahl ist dargestellt? <table><tr><th>Hunderter</th><th>Zehner</th><th>Einer</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table> <u>514</u>	Hunderter	Zehner	Einer				Die einzelnen Ziffern werden in der falschen Reihenfolge notiert.
Hunderter	Zehner	Einer					
							

Aufgabe 32 in Testheft C

Fehlerhafte Schüler*innenlösung:	Mögliche Erklärungen:						
Die dargestellte Zahl soll dreistellig sein. Wie viele Plättchen kann Asta zu den Hundertern noch dazulegen? <table border="1"><thead><tr><th>Hunderter</th><th>Zehner</th><th>Einer</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table> <u>843</u> Plättchen	Hunderter	Zehner	Einer				Die Aufgabenstellung wird nicht beachtet und die dargestellte Zahl wird notiert.
Hunderter	Zehner	Einer					
							
Die dargestellte Zahl soll dreistellig sein. Wie viele Plättchen kann Asta zu den Hundertern noch dazulegen? <table border="1"><thead><tr><th>Hunderter</th><th>Zehner</th><th>Einer</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table> <u>2</u> Plättchen	Hunderter	Zehner	Einer				Die Bündelung im Stellenwertsystem wird nicht bedacht.
Hunderter	Zehner	Einer					
							
Die dargestellte Zahl soll dreistellig sein. Wie viele Plättchen kann Asta zu den Hundertern noch dazulegen? <table border="1"><thead><tr><th>Hunderter</th><th>Zehner</th><th>Einer</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table> <u>5</u> Plättchen	Hunderter	Zehner	Einer				Der Begriff dreistellig wird fehlinterpretiert – in diesen Beispielen werden Zahlen, die an jeder Stelle die gleiche Ziffer haben, dargestellt.
Hunderter	Zehner	Einer					
							
Die dargestellte Zahl soll dreistellig sein. Wie viele Plättchen kann Asta zu den Hundertern noch dazulegen? <table border="1"><thead><tr><th>Hunderter</th><th>Zehner</th><th>Einer</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table> <u>555</u> Plättchen	Hunderter	Zehner	Einer				
Hunderter	Zehner	Einer					
							

Zahlenstrahl

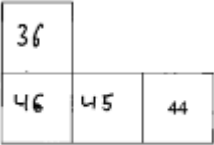
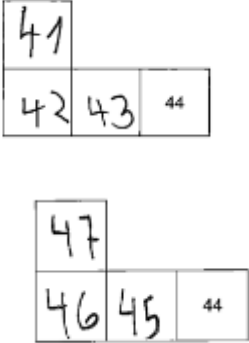
Aufgabe 38 in Testheft B und Aufgabe 29 in Testheft C

Fehlerhafte Schüler*innenlösung:	Mögliche Erklärungen:
Wie heißt die Zahl? Trage ein.  15	Die Kinder sehen statt der Zehner- eine Einerskalierung, d. h. die dicken Striche werden fälschlicherweise als „10er“ und nicht als „100er“ erkannt.
Wie heißt die Zahl? Trage ein.  250 Wie heißt die Zahl? Trage ein.  350	Die Kinder erkennen wahrscheinlich die Zehnerskalierung, geben aber eine falsche Hunderterstelle an.
Wie heißt die Zahl? Trage ein.  105	Die Kinder erkennen möglicherweise die Hauptskalierung (100er Schritte) und zählen dann in Einer- statt Zehnerschritten weiter. Eventuell werden aber auch die Zehner- und Einerstelle vertauscht.
Wie heißt die Zahl? Trage ein.  1,50m	Die Einerskalierung eines Lineals (Schüler*innenlineal) wird auf den Zahlenstrahl übertragen.

Hundertertafel

Die Hundertertafel verdeutlicht den analogen Aufbau der einzelnen Zehner. Sie ermöglicht die Entdeckung von Zahlbeziehungen und bietet sich an, um strukturelle Zusammenhänge zwischen Zahlen zu entdecken und zu besprechen. Ohne Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems und ohne eine bereits entwickelte sichere Orientierung im Zahlenraum kann die Struktur der Hundertertafel allerdings nicht gewinnbringend genutzt werden.

Aufgabe 25 in Testheft C und Aufgabe 25 in Testheft B

Fehlerhafte Schüler*innenlösung:	Mögliche Erklärungen:
	<i>Spaltenfehler:</i> Lücken, die ober- oder unterhalb zu füllen sind, sind fehleranfälliger als Lücken, die rechts oder links zu füllen sind. In den Spalten sind Zahlen benachbart, die nicht direkt aufeinanderfolgen, sondern die genau 10 voneinander entfernt sind. Für manche Kinder ist es schwer verständlich, dass ein Schritt nach oben oder unten 10 mehr oder weniger bedeutet, ein Schritt nach rechts oder links hingegen 1 mehr oder weniger. <i>Zahlendreher</i> Bei dem ersten Fehler könnte es sich auch um einen Zahlendreher handeln. Hier wurde die 54 statt der 45 eingetragen. Für den Fehler könnte der Unterschied zwischen Schreib- und Sprechweise ursächlich sein. An diesem Fehler zeigt sich, dass der persönliche Austausch über die Vorgehensweise beim Ausfüllen wichtige Informationen über die Denkwege und mögliche Schwierigkeiten des Kindes gibt, die allein durch die Fehleranalyse einer schriftlichen Bearbeitung manchmal fehlen.
	<i>Zeilenfehler</i> Hier wird nicht beachtet, dass die Zahlen von links nach rechts jeweils um 1 größer, von rechts nach links entsprechend um 1 kleiner werden.
	<i>Falsche (lineare) Vorstellung</i> Die Ausschnitte werden nicht im Kontext der Hundertertafel betrachtet – es wird weiter gezählt. Bei Fehler 1 handelt es sich auch um einen Spaltenfehler.

	<i>Aufgabenformat nicht bekannt oder mangelndes Aufgabenverständnis</i> Die nebenstehende Hundertertafel wird nicht zur Verortung des Ausschnitts genutzt oder nicht mit dem Ausschnitt in Verbindung gebracht, sondern sie wurde komplett ausgefüllt.
---	--

Arithmetische Muster und Strukturen bei Zahl- und Aufgabenbeziehungen

Aufgabe 32 in Testheft B

Fehlerhafte Schüler*innenlösung:	Mögliche Erklärungen:
Kreuze es an. ☒ 31 62 ☐ 13 26 ☐ 42 84 ☐ 23 45 Begründe. <i>es Das erste stimmt nicht weil es immer das doppelte sein muss deswegen stimmt das nicht.</i>	Zusammenhang zwischen den Zahlen der Zahlenpaare wird richtig erkannt. Möglicherweise führt hier ein Rechenfehler zur falschen Lösung.
Kreuze es an. ☐ 31 62 ☐ 13 26 ☐ 42 84 ☒ 23 45 Begründe. <i>es Das letzte!</i>	Die Lösung ist richtig angekreuzt, aber die Begründung fehlt.
Kreuze es an. ☐ 31 62 ☐ 13 26 ☐ 42 84 ☒ 23 45 Begründe. <i>es Es sind nicht 4 mehr aber auch nicht 2 mehr</i> Kreuze es an. ☒ 31 62 ☒ 13 26 ☒ 42 84 ☒ 23 45 Begründe. <i>es x: 23 32 45 54</i>	Die Lösung ist richtig angekreuzt, aber die Begründung ist falsch

Kreuze es an. <table><tr><td>31</td><td>62</td><td>13</td><td>26</td><td>42</td><td>84</td><td>23</td><td>45</td></tr><tr><td>☐</td><td>☐</td><td>☐</td><td>☒</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> Begründe. <u>es weil man Reche umherade ist.</u>	31	62	13	26	42	84	23	45	☐	☐	☐	☒					Die Lösung ist richtig angekreuzt, aber die Begründung ist ungenau bzw. unvollständig.
31	62	13	26	42	84	23	45										
☐	☐	☐	☒														
Kreuze es an. <table><tr><td>31</td><td>62</td><td>13</td><td>26</td><td>42</td><td>84</td><td>23</td><td>45</td></tr><tr><td>☐</td><td>☒</td><td>☐</td><td>☐</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> Begründe. <u>es Die Zahlen sind am wenigsten auseinander</u>	31	62	13	26	42	84	23	45	☐	☒	☐	☐					Der Abstand zwischen den einzelnen Zahlen eines Zahlenpaares wurde berechnet und deren Größe verglichen.
31	62	13	26	42	84	23	45										
☐	☒	☐	☐														

Aufgabe 34 in Testheft B verlangt, dass die Beziehung in der Tabelle zwischen den Zahlen der 1. Zeile und den darunter stehenden Zahlen in der zweiten Zeile als das Achtfache erkannt wird. So kann die richtige Zahl 72 angekreuzt werden.

Zahlenfolgen

Aufgabe 31 in Testheft B

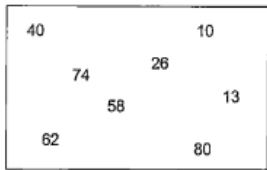
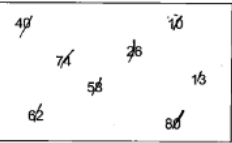
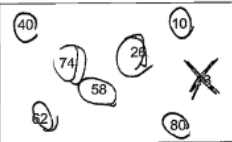
Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
a) Regel: immer + 25 <u>25 + 25 + 25 + 25 + 25</u>	Interpretation der Aufgabenstellung nicht korrekt: Regel der Zahlenfolge wird als Notieren der wiederholten Addition der Zahl 25 gedeutet
a) Regel: immer + 25 <u>5 10 15 20 25</u>	Interpretation der Aufgabenstellung nicht korrekt: Regel der Zahlenfolge wird als Bildung einer additiven numerischen Regelmäßigkeit zur Zielzahl 25 gedeutet
a) Regel: immer + 25 <u>25 50 75 90 105</u>	Rechenfehler bei der Ausführung der Regel der Zahlenfolge

Aufgabe 27 in Testheft C

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
b) Regel: immer - 20 25-5 25-5, 30-10, 22-2, 29-9 27-1	Interpretation der Aufgabenstellung nicht korrekt: Regel der Zahlenfolge wird als Aufforderung zur Differenzbildung gedeutet und Aufgaben zu dieser Differenz werden gesucht
b) Regel: immer - 20 20, 0, 0, 0, 0	Interpretation der Aufgabenstellung nicht korrekt: Regel der Zahlenfolge wird angewendet, kann aber nicht im Sinne der Regel fortgeführt werden, da das Rechnen mit negativen Zahlen nicht bekannt ist bzw. nicht umgesetzt werden kann
b) Regel: immer - 20 20, 0, 20, 0, 20	Interpretation der Aufgabenstellung nicht korrekt: Regel der Zahlenfolge wird eigenständig erweitert (+ 20), so dass bestehende Regel (- 20) angewendet werden kann.
b) Regel: immer - 20 20, 40, 60, 80, 100	falsche Rechenoperation: statt minus 20 wird plus 20 als Regel angewandt

Zahlbeziehungen

Aufgabe 35 in Testheft B

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
 Ergänze Amirs Satz. Amir sagt: „Die Zahl 13 passt nicht zu den anderen, denn alle anderen Zahlen <u>groß und die 13</u> <u>ist klein</u> .“	Die Zahlen werden hinsichtlich der Größe betrachtet/verglichen oder geordnet.
 Ergänze Amirs Satz. Amir sagt: „Die Zahl 13 passt nicht zu den anderen, denn alle anderen Zahlen <u>10, 13, 26, 40, 58, 62, 74, 80</u>  Ergänze Amirs Satz. Amir sagt: „Die Zahl 13 passt nicht zu den anderen, denn alle anderen Zahlen <u>Sind: 62, 80, 58, 26, 74,</u> <u>40, 10</u> .“	Die Aufgabenstellung wird falsch gedeutet: Die Zahlen werden geordnet oder ohne die Zahl 13 aufgeschrieben.

Ergänze Amirs Satz. Amir sagt: „Die Zahl 13 passt nicht zu den anderen, denn alle anderen Zahlen <u>haben keine 3 als Einer</u>	Nur die einzelnen Ziffern werden verglichen. Die Aussage des Kindes stimmt, könnte aber auch in ähnlicher Weise für andere Zahlen angewendet werden und ist somit keine schlüssige Begründung.
--	---

Aufgabenbeziehungen

Aufgabe 37 in Testheft B

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
Die Aufgaben verändern sich nach einer Regel. $\begin{array}{r} 215 + 15 \\ 225 + 13 \\ 235 + 11 \\ 245 + 9 \end{array}$ a) Schreibe die nächste Aufgabe auf. <u>255 + 6</u> b) Beschreibe die Regel. 1. Zahl: <u>Wird immer + 10 gerechnet.</u> 2. Zahl: <u>Wird immer - 2 gerechnet.</u> Die Aufgaben verändern sich nach einer Regel. $\begin{array}{r} 215 + 15 \\ 225 + 13 \\ 235 + 11 \\ 245 + 9 \end{array}$ a) Schreibe die nächste Aufgabe auf. <u>250 + 7</u> b) Beschreibe die Regel. 1. Zahl: <u>immer + 10</u> 2. Zahl: <u>immer - 2</u>	Die Regel wird für beide Summanden richtig erkannt, aber die nächste Aufgabe (wahrscheinlich durch einen Rechenfehler) falsch gebildet.
Die Aufgaben verändern sich nach einer Regel. $\begin{array}{r} 215 + 15 \\ 225 + 13 \\ 235 + 11 \\ 245 + 9 \end{array}$ a) Schreibe die nächste Aufgabe auf. <u>255 + 8</u> b) Beschreibe die Regel. 1. Zahl: <u>Wird immer größer</u> 2. Zahl: <u>Wird immer kleiner</u>	Die Regeln werden ungenau beschrieben und nur teilweise richtig umgesetzt.

Die Aufgaben verändern sich nach einer Regel. $\begin{array}{r} 215 + 15 \\ 225 + 13 \\ 235 + 11 \\ 245 + 9 \end{array}$ a) Schreibe die nächste Aufgabe auf. <u>255 + 6</u> b) Beschreibe die Regel. 1. Zahl: <u>Wird immer um 10 größer</u> 2. Zahl: <u>Wird immer um 3 kleiner</u>	Die Regel wurde für den 2. Summanden falsch bestimmt, so dass auch die nächste Aufgabe fehlerhaft ist.
Die Aufgaben verändern sich nach einer Regel. $\begin{array}{r} 215 + 15 \\ 225 + 13 \\ 235 + 11 \\ 245 + 9 \end{array}$ a) Schreibe die nächste Aufgabe auf. <u>255 + 2</u> b) Beschreibe die Regel. 1. Zahl: <u>Die erste Zahl verändert sich 10,</u> 2. Zahl: <u>wird immer um 2 kleiner</u>	Die Regel wird für beide Summanden richtig erkannt, aber die nächste Aufgabe falsch gebildet – der notierte 2. Summand gibt die Veränderung der Zahlen in der zweiten Spalte an.
Die Aufgaben verändern sich nach einer Regel. $\begin{array}{r} 215 + 15 \\ 225 + 13 \\ 235 + 11 \\ 245 + 9 \end{array}$ a) Schreibe die nächste Aufgabe auf. <u>205 + 17</u> b) Beschreibe die Regel. 1. Zahl: <u>Ein zehn geht</u> 2. Zahl: <u>Eine zwei kommt</u> Die Aufgaben verändern sich nach einer Regel. $\begin{array}{r} 215 + 15 \\ 225 + 13 \\ 235 + 11 \\ 245 + 9 \end{array}$ a) Schreibe die nächste Aufgabe auf. <u>255 + 17</u> b) Beschreibe die Regel. 1. Zahl: <u>immer plus 1 in der Mitte</u> 2. Zahl: <u>immer plus 2</u>	Leserichtung bei beiden Summanden oder nur bei einem Summanden falsch – Die Regel wird erkannt, aber das Päckchen oder die Veränderung einer Spalte wird von unten gelesen und beschrieben. Somit wird als „nächste Aufgabe“ die vorangegangene Aufgabe des Päckchens angegeben oder für eine Spalte wird der Summand der vorangehenden Aufgaben notiert.

Die Aufgaben verändern sich nach einer Regel. 215 + 15 225 + 13 235 + 11 245 + 9 a) Schreibe die nächste Aufgabe auf. <u>245 + 9</u> b) Beschreibe die Regel. 1. Zahl: <u>immer kommt *Ein Zehner dazu</u> 2. Zahl: <u>immer - 2</u>	Die Regel wird für beide Summanden richtig beschrieben, aber der Begriff „nächste“ falsch interpretiert. So wird die letzte Aufgabe aufgeschrieben.
--	--

Aufgabe 35 in Testheft C

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
19 + 56 = 75 29 + 46 = 75 39 + 36 = 75 49 + 26 = 75 Warum bleibt das Ergebnis immer gleich? Begründe. <u>ES Weil auf der einen Seite/Spalte wird der Zehner größer und in der anderen Spalte kleiner.</u> 19 + 56 = 75 29 + 46 = 75 39 + 36 = 75 49 + 26 = 75 Warum bleibt das Ergebnis immer gleich? Begründe. <u>ES Die erste Zahl wird immer größer. Die zweite Zahl wird immer kleiner.</u>	Die Zahlen der einzelnen Spalten und Zeilen werden miteinander verglichen und in Beziehung gesetzt. Die Beschreibung der Veränderung ist jedoch zu ungenau.

10.1.3 Anregungen für den Unterricht

Arithmetische Muster und Strukturen in Veranschaulichungen und Arbeitsmitteln

Stellenwerttafel

Die Stellenwerttafel ist eine Möglichkeit um Zahlen im dekadischen System darzustellen.

Hierzu bieten sich im Umgang mit der Stellenwerttafel verschiedene Möglichkeiten an:

Werte können eingetragen und abgelesen werden oder Zahlen werden durch Wegnehmen bzw. Hinzufügen oder Verschieben/Umlegen von Plättchen/Magneten variiert.

Übungsbeispiele:

Gefüllte Stellenwerttafel

H	Z	E
		

- **Ablesen:**
 - Wie heißt die Zahl? Begründe. Schreibe sie auf.
- **Hinzufügen/Wegnehmen:**
 - Lege ein/zwei Plättchen dazu. Welche Zahlen können entstehen? Warum bist du sicher, dass das alle sind? Begründe. (→ Argumentieren)
 - Nimm ein/zwei Plättchen weg. Welche Zahlen können entstehen? Warum bist du sicher, dass das alle sind? Begründe. (→ Argumentieren)
 - Welche Zahl entsteht, wenn du in der Hunderter-, Zehner-, Einerspalte zwei Plättchen dazu legst? Schreibe auch eine Rechnung dazu auf.
 - Die Zahl soll um 300 kleiner werden. Wie musst du die Plättchen in der Stellenwerttafel verändern? Begründe. (→ Argumentieren)
- **Umlegen:**
 - Welche Zahlen können entstehen, wenn du (bei der Ausgangsdarstellung) ein Plättchen umlegst? Probiere verschiedene Möglichkeiten aus und schreibe die jeweiligen Zahlen auf. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Warum bist du sicher, dass das alle sind? Begründe. (→ Argumentieren)

Weitere beispielhafte Aufgabenstellungen:

Leere Stellenwerttafel

H	Z	E



- **Darstellen:**

- Lege in einer Stellentafel eine Zahl. Addiere 100 (10, 200, 20 usw.). Was musst du in der Stellenwerttafel verändern? Beschreibe und begründe. (→ Argumentieren)
- Lege eine gerade Zahl / ungerade Zahl. An welcher Stelle erkennst du, dass es eine gerade bzw. eine ungerade Zahl ist. Beschreibe. (→ Kommunizieren)
- Lege durch 10 (5, 2) teilbare Zahlen. Wie gehst du vor? Erkläre. (→ Kommunizieren)
- Woran kannst du in der Stellenwerttafel schnell erkennen, ob eine Zahl durch 10 (5, 2) teilbar ist? Begründe.
- Partnerarbeit: Die Stellenwerttafel wird mit Plättchen gefüllt und der Partner liest die dargestellten Zahlen ab.
- Du hast 4 Plättchen. Wie viele verschiedene Zahlen kannst du bilden, wenn du die Plättchen in eine Stellenwerttafel mit T, H, Z, E legst? Wie gehst du vor? Woher weißt du, dass du alle Zahlen gefunden hast? Begründe (→ Argumentieren)

- **Rätsel formulieren:**

- Wie viele Plättchen könnten es sein? Es sind doppelt so viele Einer wie Zehner. Es sind doppelt so viele Zehner wie Hunderter.
- „Ich lege die Zahl 536. Jetzt nehme ich ein Plättchen weg. Die neue Zahl heißt 436. Wo habe ich das Plättchen entfernt? Begründe. (→ Argumentieren)
- Partnerspiel „Zahlen raten“: A legt – verdeckt – eine Zahl, z. B. eine dreistellige mit drei Plättchen (dies wird dem Partner B gesagt). B muss nun die Zahl durch Fragen herausfinden, auf die A nur mit „ja“ oder „nein“ antwortet.

(Idee aus „Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte“, Seite 69, Elmar Hengartner, Ueli Hirt, Beat Wälti und Primarschulteam Lupsingen, Klett und Balmer Verlag Zug, 2010)

Die vorgestellten Aufgabenstellungen sind handlungsorientiert, variieren im Schwierigkeitsgrad und erreichen Schüler*innen aller Leistungsniveaus. Eine weitere Möglichkeit der Differenzierung ergibt sich, wenn Kinder selbst Rätsel entwickeln können.

Alle vorgestellten Aufgaben bieten Möglichkeiten, die Kinder verbalisieren zu lassen, wie sie die Zahlen und Zahlbeziehungen, die in der Stellenwerttafel gegeben sind, interpretieren. Bei den Beschreibungen müssen die Kinder auf Fachbegriffe zurückgreifen und somit Fachsprache nutzen (→ Kommunizieren)

Zahlenstrahl

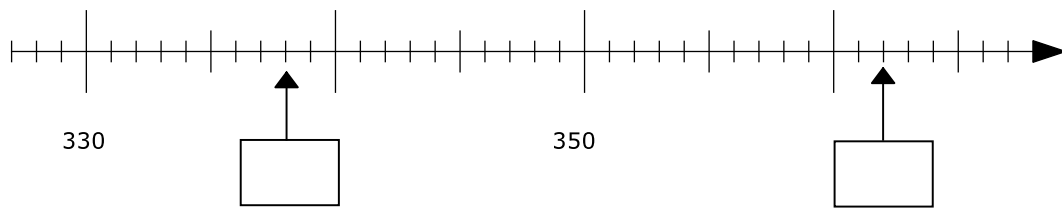
Übungen am skalierten Zahlenstrahl

Aus den ersten beiden Jahrgangsstufen ist den Kindern der Zahlenstrahl als mathematisches Arbeitsmittel bekannt, auf dem die Zahlen geordnet sind. Im Unterricht bietet seine Verwendung vielfältige Anlässe zur Kommunikation über den Aufbau des Zahlenraums sowie über mathematische Zusammenhänge (→ Argumentieren, Kommunizieren). Zur Hinführung, Vertiefung und Erweiterung der Orientierung im Zahlenraum ist die Kombination unterschiedlicher Aufgabenstellungen mit der Verwendung einer variierenden Skalierung möglich.

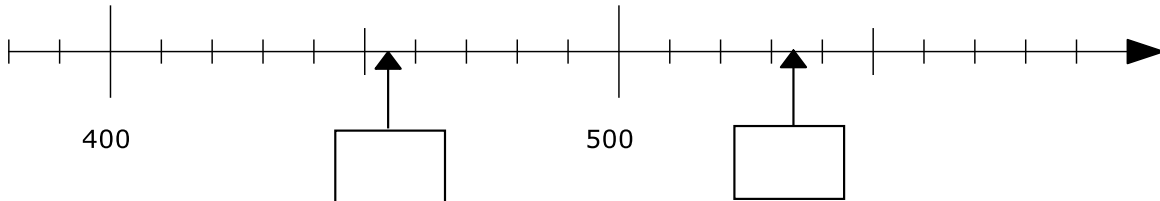


Copyright Foto: IQB

- Beispiel 1: Zahlen an einem vorgegebenen, vollständig skalierten Zahlenstrahl eintragen lassen (alle natürlichen Zahlen haben eine Markierung auf dem Zahlenstrahl)



- Beispiel 2: Zahlen an einem vorgegebenen, nicht vollständig skalierten Zahlenstrahl eintragen lassen (nicht alle natürlichen Zahlen haben eine Markierung auf dem Zahlenstrahl)

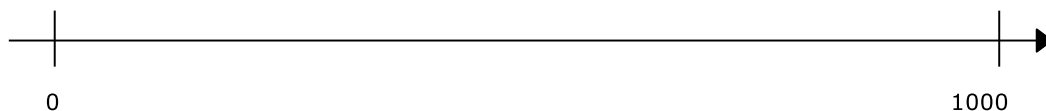


Um diese Aufgabe bewältigen zu können, muss zuerst die Skalierung (10er Schritte) erkannt und dann müssen die beiden markierten Zahlen, zwischen denen jeweils die gesuchten Zahlen liegen, bestimmt werden. Zahlen, die genau mittig liegen (hier liegt die erste Zahl zwischen 450 und 460 und die zweite Zahl zwischen 530 und 540), sind in der Regel eindeutig zu finden.

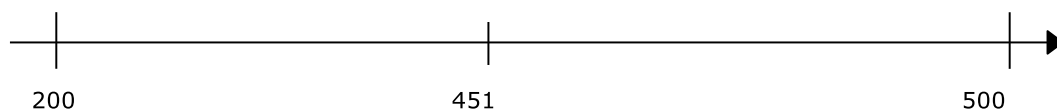
Übungen am Zahlenstrahl ohne Skalierung

Übungen am Zahlenstrahl ohne Skalierung zeigen, ob die Kinder den Zusammenhang zwischen geometrischen und arithmetischen Zusammenhängen am Zahlenstrahl verstanden haben und nutzen können.

- Beispiel 1: Wo liegt die Zahl 650 ungefähr? Markiere sie. Wie bist du vorgegangen? (→ Kommunizieren, Argumentieren)



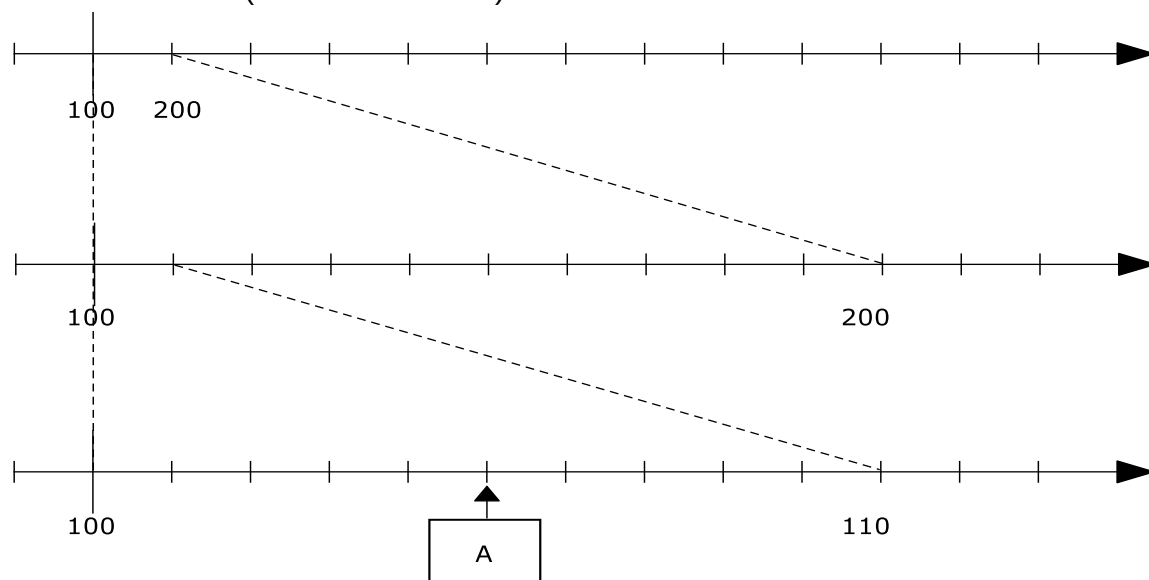
- Beispiel 2: Hier wurde die Zahl 451 eingetragen. Kann das stimmen? Wie gehst du vor? Begründe. (→ Kommunizieren, Argumentieren)



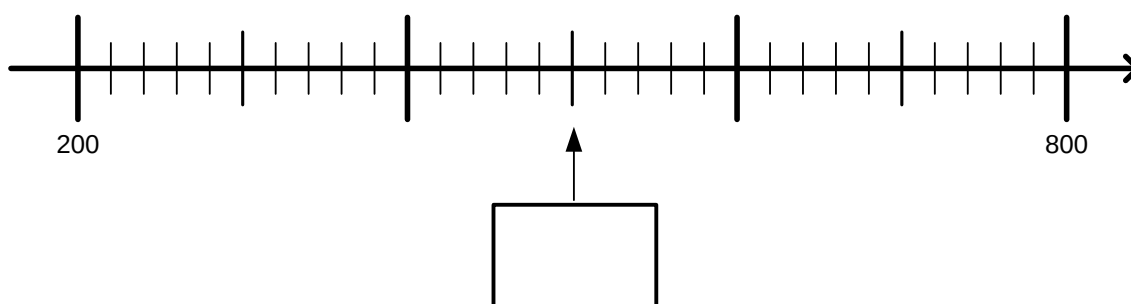
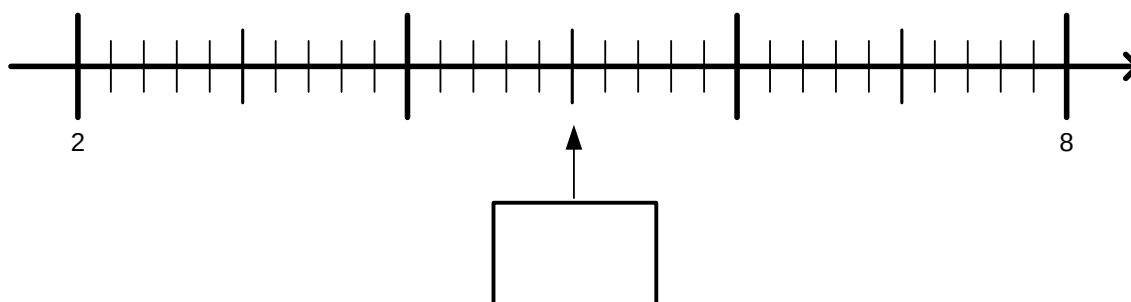
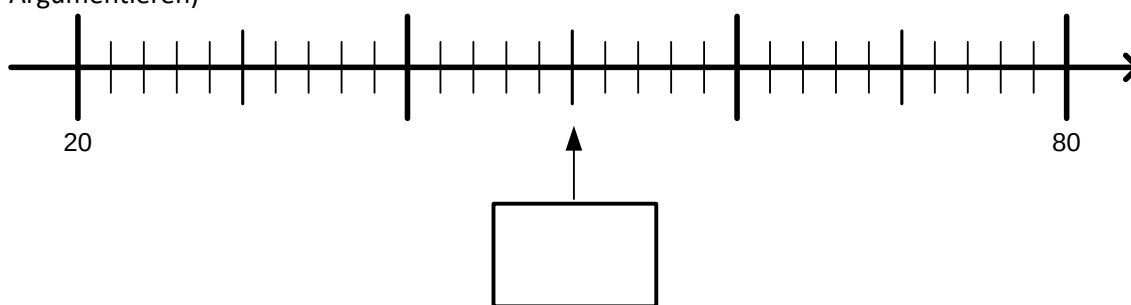
Übertragung der Erkenntnisse auf Zahlenstrahle mit unterschiedlicher Skalierung

Damit die Kinder einen mathematischen Zusammenhang zwischen den einzelnen Maßstäben verschiedener Zahlenstrahle herstellen können, sind beispielsweise folgende Übungen hilfreich.

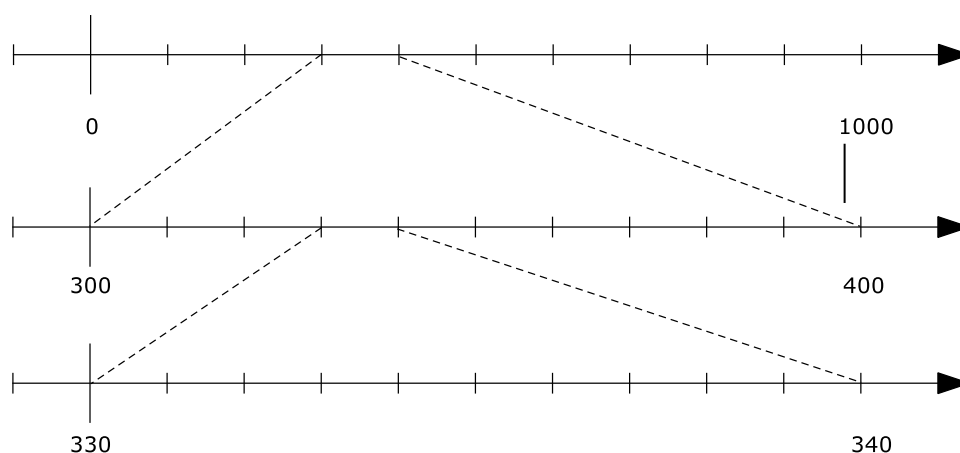
- Beispiel 1: Wie heißt die Zahl A? Trage sie auch an den anderen beiden Zahlenstrahlen ein. Wie gehst du vor? (→ Kommunizieren)



- Beispiel 2: Vergleiche die 3 Zahlenstrahle. Was haben sie gemeinsam? Wodurch unterscheiden sie sich? Wie heißen die Zahlen, die genau in der Mitte liegen? Wie kannst du sie ermitteln? (→ Kommunizieren, Argumentieren)



Beispiel 3: Erkläre, wie die 3 Zahlenstrahle zusammenhängen? Was bedeuten die gestrichelten Linien? (→ Kommunizieren, Argumentieren)



Hundertertafel

Viele Anregungen zur Arbeit mit der Hundertertafel finden sich z. B. bei www.pikas-kompakt.dzlm.de.

- Grundlegende Strukturen der Hundertertafel erkennen:
 - Anlegen eines Wortspeichers mit den zur Beschreibung erforderlichen Begrifflichkeiten und Satzmustern: Zeile, Spalte, Diagonale, über, unter, links von, rechts von, zwischen, ... (→ Kommunizieren)
 - Schablonen verwenden, um den Blick der Kinder zu fokussieren.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Copyright Foto: IQB

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Copyright Foto: IQB

- Zahlbeziehungen für die Orientierung auf der Hundertertafel nutzen:
 - Zahlbeziehungen mit Worten beschreiben (→ Kommunizieren): „Wenn ich mich auf der Hundertertafel ein Feld nach links bewege, wird die Zahl um 1 kleiner.“ „In einer Spalte der Hundertertafel werden die Zahlen nach unten immer um 10 größer.“
 - Bewegungen auf der Hundertertafel mit Material oder in der Vorstellung: „Starte bei der 56, gehe 3 Schritte nach unten und anschließend 2 Schritte nach rechts. Auf welcher Zahl landest du?“, „Welche Zahlen lagen auf dem Weg?“ (→ Kommunizieren), „Gibt es verschiedene Wege, um von der Startzahl zur Zielzahl zu gelangen? Wenn ja, welche?“ (→ Argumentieren)
 - Spiel „Schiffe versenken“ in der Hundertertafel: Schiffe in der eigenen Hundertertafel verstecken und die Position der Partnerschiffe herausfinden und eintragen.
- Entdeckungen an der Hundertertafel, Vermutungen anstellen und begründen (→ Argumentieren):
 - Zahlenfolgen in der Hundertertafel fortsetzen, verstehen und begründen

- Fehler in der Hundertertafel finden: „An dieser Stelle muss die (...) stehen, weil ...“

Anregungen zur Differenzierung

- Hilfestellungen bieten Schablonen und Fenster, welche auf die Tafel gelegt werden (s. o.).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Aufgaben können grundsätzlich mit oder ohne Unterstützung der Hundertertafel gelöst werden.
- Die Kinder erhalten Hundertertafeln, in denen alle, einzelne oder gar keine Zahlen vorausgefüllt sind. Auch eine Hundertertafel, die in vier 5x5-Quadrate eingeteilt ist, kann bei der Orientierung unterstützend wirken.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									20
									30
									40
									50
									60
									70
									80
									90
									100

Ausschnitte können zur Vereinfachung in der Hundertertafel eingezeichnet sein.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									20
									30
									40
									50
									60
									70
									80
									90
									100

- Ausschnitte können in verschiedenen Schwierigkeitsstufen angeboten werden. Der Schwierigkeitsgrad wird erhöht, wenn Lücken in der Diagonalen zu füllen sind. Der Schwierigkeitsgrad wird niedriger, wenn mehrere Zahlen vorgegeben sind oder nur benachbarte Zahlen einzutragen sind.

Arithmetische Muster und Strukturen bei Zahl- und Aufgabenbeziehungen

Zahlenpaare

Vielfältige Übungen zum Erkennen, Beschreiben und Nutzen von Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen wie gerade/ungerade Zahlen, Vorgänger/Nachfolger, das Doppelte/die Hälfte sowie anderen Relationen oder Zahlzerlegungen unterstützen die Entwicklung tragfähiger Zahlvorstellungen und das flexible Rechnen. Das Aufgabenformat „Zahlenpaare“ ist zum Entdecken von Zahleigenschaften und -beziehungen geeignet.

Möglichkeiten zur Differenzierung ergeben sich aus:

- der Variation der Anzahl der vorgegebenen Zahlenpaare,
- dem Finden fehlender Zahlen sowie
- dem Komplexitätsgrad der Beziehungen zwischen den Zahlen.

z. B. einfache Regel (Vorgänger/Nachfolger, Doppelte/Hälfte, immer + 4 /immer - 3 ...) für die Beziehung zwischen den Zahlen eines Paares

2	4	5	10	17	34	9	18	21	42	25	50
---	---	---	----	----	----	---	----	----	----	----	----

z. B. schwierigere/komplexere Regel (z. B. das Vierfache/der vierte Teil; der Vorgänger des Doppelten ...) für die Beziehung zwischen den Zahlen eines Paares

3	12	6	16	10	40	5	20	25	100	21	84
---	----	---	----	----	----	---	----	----	-----	----	----

Übungsformen zu Zahlenpaaren:

- Beschreibe, wie die Zahlenpaare gebildet werden. Es gibt eine Regel, die für alle Paare gilt. (→ Kommunizieren)

4	9	10	21	7	15	2	5	13	27	3	7
---	---	----	----	---	----	---	---	----	----	---	---

- Ergänze die fehlenden Zahlen. Beschreibe die Regel. Wie hast du sie gefunden? (→ Kommunizieren)

5	4	11	10	17	16	7		34			20
---	---	----	----	----	----	---	--	----	--	--	----

- Finde weitere Zahlenpaare zur Regel /zum Muster. Beschreibe die Regel. Wie hast du sie gefunden? (→ Kommunizieren)

2	6	5	15	7	21	4	12				
---	---	---	----	---	----	---	----	--	--	--	--

6	8	11	13	14	16	4	6				
---	---	----	----	----	----	---	---	--	--	--	--

- Fehler in Zahlenpaaren finden und begründen (→ Argumentieren):

- Welches Zahlenpaar passt nicht? Begründe.

1	6	5	10	14	18	4	9	11	16	6	11
---	---	---	----	----	----	---	---	----	----	---	----

- Offene Aufgabenstellungen und Eigenproduktionen
Zahlenpaare zu vorgegebenen Regeln selbst entwickeln (→ Problemlösen):

- Finde Zahlenpaare zur Regel immer + 5

--	--	--	--	--	--	--	--

- Erfinde eigene Zahlenpaare und schreibe die Regel dazu auf.

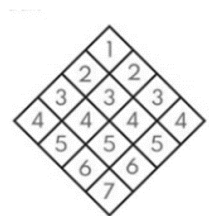
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Regel: _____

Eine Steigerung des Anspruchsniveaus erreicht man durch unterschiedliches Zahlenmaterial sowie durch die Komplexität der Beziehungen.

Zahlenraute, Zahlenfolge

Als Ausgangspunkt für die Auseinandersetzung zur Entdeckung und Beschreibung numerischer Zusammenhänge bietet sich auch das Format einer *Zahlenraute* an (vgl. SINUS Box 2, 2016; Zeitschrift GS, NR 76, 2023).



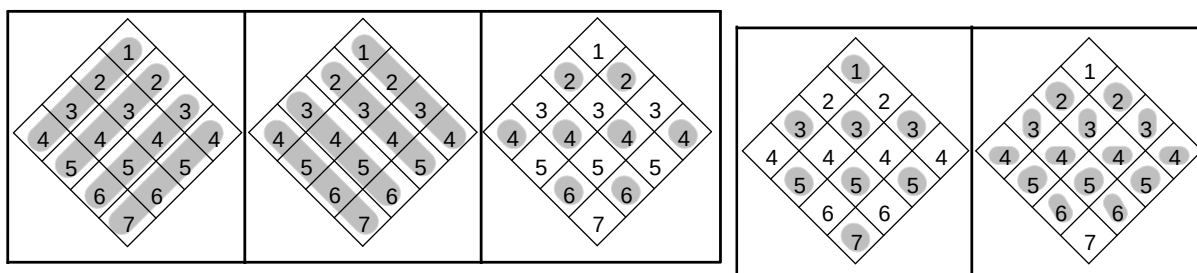
Im Mittelpunkt steht eine ausgefüllte Zahlenraute:

Das Aufgabenformat verbindet in idealer Weise arithmetische und geometrische Muster und Strukturen, die je nach Größe der Zahlenraute in unterschiedlichen Zahlenräumen von Kindern erforscht werden können (Was kannst du entdecken? Was fällt dir auf?).

Angeleitetes Forschen mit Hilfe von Forscheraufträgen unterstützen den Entdeckungsvorgang:

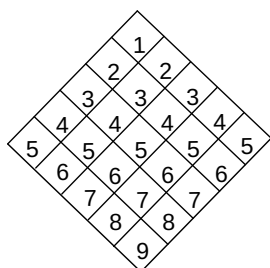
- Färbe alle geraden Zahlen gleich ein.
- Färbe alle ungeraden Zahlen gleich ein.
- Färbe alle gleichen Zahlen gleich ein.
- Färbe die größte und die kleinste Zahl gleich ein (Wo liegen diese? Und wie oft kommen sie vor?).
- Finde Zahlenreihen, bei denen man weiterzählen kann (Zahlenfolgen). Wie heißen die Regeln für diese Zahlenfolgen?
- Findest du eine „Spiegelachse“? Färbe ein. Woran siehst du, dass dies eine „Spiegelachse“ ist? (→ Argumentieren)
- Addiere die gegenüberliegenden Eckzahlen. Fällt dir an den Summen etwas auf? Kannst du deine Entdeckung erklären? Kannst du diese Entdeckung auch an größeren oder kleineren Zahlenfeldern machen? Warum? Warum nicht? (→ Kommunizieren und Argumentieren)
- Addiere die Zahlen der Diagonalen. Entdeckst du ein Muster? Beschreibe es. (→ Kommunizieren)
- Addiere die Zahlen der Zeilen. Entdeckst du ein Muster? Beschreibe es. (→ Kommunizieren)
- Finde Zahlenfelder, deren Summe 20, 30, 40 ergeben. Färbe ein. Wie bist du vorgegangen? (→ Kommunizieren)
- Addiere geschickt alle Zahlen der Zahlenraute. Wie gehst du vor? (→ Kommunizieren)

Diese Entdeckungen und Zusammenhänge können farblich hervorgehoben und anschließend vorgestellt werden. (→ Darstellen, Kommunizieren)



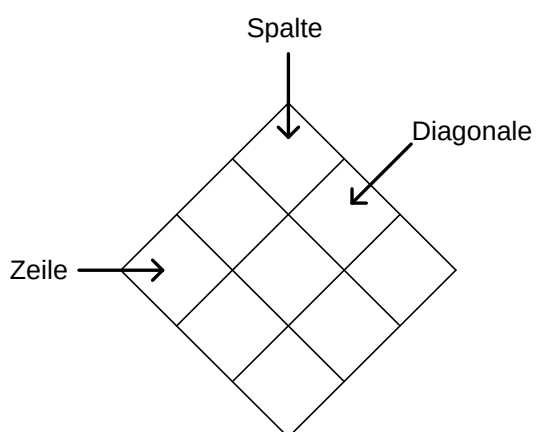
Grafiken aus: vgl. SINUS Box 2, 2016; Grundschule Mathematik 76, 2023

Die Beschreibung von Auffälligkeiten in Teilstrukturen der Zahlenraute können vertieft und ausgeweitet werden, wenn die Zahlenraute „wächst“.



Grafik aus: vgl. SINUS Box 2, 2016; Grundschule Mathematik 76, 2023

Die zahlreichen Entdeckungen hinsichtlich numerischer Zusammenhänge, können dann auch in Eigenproduktionen, in nicht vorgegebene/nicht ausgefüllte Zahlenrauten fließen. So ergeben sich weitere Auffälligkeiten bzw. Muster, z. B. Zahlenfolgen, die Gesprächsanlässe zu numerischen Auffälligkeiten auf verschiedenen Lernebenen bieten. Somit wird eine besondere Verknüpfung zwischen Sprache und Mathematik geschaffen (→ Kommunizieren). Voraussetzung ist eine verbindliche Fachsprache:



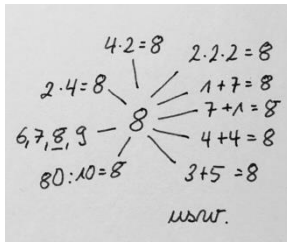
Grafik aus: vgl. SINUS Box 2, 2016; Grundschule Mathematik 76, 2023

Zahl- und Aufgabenbeziehungen

Die Aufgabe 35 in Testheft B zeigt eine Möglichkeit, um den Zusammenhang zwischen Zahlen zu thematisieren.

Zu jeder Zahl können verschiedene Beziehungen beschrieben werden. Dementsprechend können hierzu u. a. folgende Übungen stattfinden:

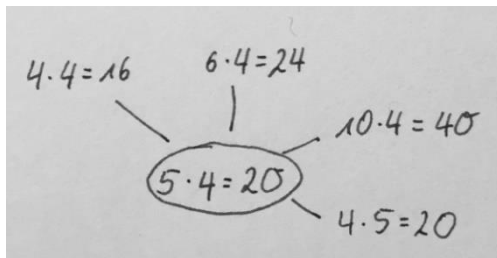
- Finde Aufgaben mit Ergebnis 8.



Copyright Foto: IQB

Das Verständnis für das Zerlegen einer Zahl in verschiedene Möglichkeiten kann durch handlungsorientiertes Arbeiten oder bildhafte Darstellungen unterstützt werden.

- Finde Aufgaben, die mit der Aufgabe $5 \cdot 4$ zusammenhängen. Beschreibe die Zusammenhänge.



Copyright Foto: IQB

Um das Erkennen von Aufgabenbeziehungen wie in strukturierten Päckchen zu unterstützen, kann das Nachlegen der Aufgaben mit Material hilfreich sein. Dabei wird die erste Aufgabe des Päckchens mit geeignetem Material gelegt. Anschließend wird aus der ersten Aufgabe die zweite Aufgabe durch Dazulegen oder Wegnehmen von Material erzeugt. Die Veränderung wird schriftlich festgehalten. So wird mit allen Aufgaben des Päckchens verfahren. Die Folgeaufgabe wird immer aus der vorangegangenen Aufgabe gebildet. Die Aufzeichnungen der Veränderungen von Aufgabe zu Aufgabe zeigen dann das Muster. So können weitere Aufgaben zum strukturierten Päckchen („Setze fort.“) gebildet werden.

Neben dem handlungsorientierten Vorgehen zum Erkennen der Zusammenhänge zwischen den Aufgaben können die Beziehungen innerhalb von Aufgabenserien auch durch bildhafte Darstellungen veranschaulicht werden.

Möglichkeiten zum Veranschaulichen auf handelnder, bildhafter oder symbolischer Ebene:

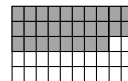
- mit geeignetem Material
z. B. gleich- oder gegensinniges Verändern

$$6 + 1 = 7 \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \circ$$

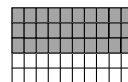
$$5 + 2 = 7 \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \circ \circ$$

$$4 + 3 = 7 \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \circ \circ \circ$$

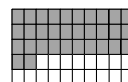
$$28 + 22 = 50$$



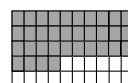
$$30 + 20 = 50$$



$$32 + 18 = 50$$

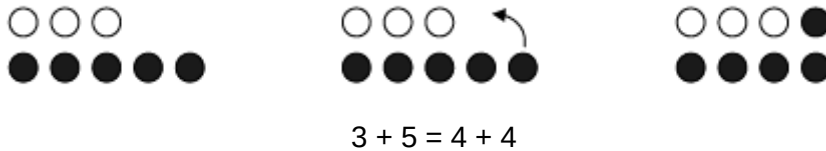


$$34 + 16 = 50$$

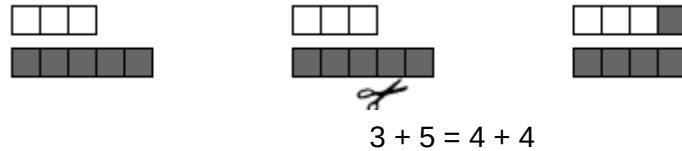


Linke Abbildung: Quelle http://www.pikas.tu-dortmund.de/upload/Bilder_allgemein/Haus1-UM-EP-3.jpg

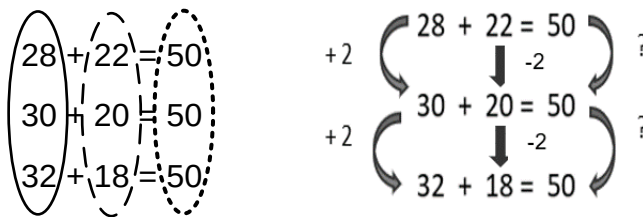
- durch Darstellen mit Pfeilen



- durch Abschneiden und Anlegen der Veränderung bei bildhaften Darstellungen



- durch Markieren mit Farben oder Pfeilen auf symbolischer Ebene



Aufgabenserien wie strukturierte Päckchen können die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen durch das Entdecken, das Beschreiben und das Begründen mathematischer Beziehungen/arithmetischer Muster vielfältig unterstützen und fördern.

Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben kann variiert werden durch

- das gegebene Zahlenmaterial
- die gegebene Rechenoperation
- die Komplexität der Beziehungen
- die Position der fehlenden Zahl oder Zahlen

Aufgabenstellungen können zur Entwicklung verschiedener prozessbezogener mathematischer Kompetenzen beitragen:

Vergleiche die Ergebnisse. Was fällt dir auf? Warum ist das so? Begründe. (→ Argumentieren)

$2 + 6 =$	$15 + 4 =$	$26 + 9 =$	$20 + 5 =$
$2 + 8 =$	$25 + 4 =$	$28 + 7 =$	$21 + 6 =$
$2 + 10 =$	$35 + 4 =$	$30 + 5 =$	$22 + 7 =$
$2 + 12 =$	$45 + 4 =$	$32 + 3 =$	$23 + 9 =$

Setze fort. (→ Problemlösen)

$2 + 8 =$	$16 + 10 =$	$18 + 4 =$	$10 + 6 =$
$2 + 10 =$	$18 + 8 =$	$28 + 4 =$	$11 + 7 =$
$2 + 12 =$	$20 + 6 =$	$38 + 4 =$	$12 + 8 =$
$2 + 14 =$	$22 + 4 =$	$48 + 4 =$	$13 + 9 =$
$2 + \underline{\quad} =$	$\underline{\quad} + \underline{\quad} =$	$\underline{\quad} + \underline{\quad} =$	$\underline{\quad} + \underline{\quad} =$
$\underline{\quad} + \underline{\quad} =$	$\underline{\quad} + \underline{\quad} =$	$\underline{\quad} + \underline{\quad} =$	$\underline{\quad} + \underline{\quad} =$

Eine Aufgabe passt nicht ins Päckchen. Woran hast du das erkannt? Erkläre bzw. begründe. Du brauchst die einzelnen Aufgaben **nicht** alle nachzurechnen. (→ Problemlösen und Kommunizieren bzw. Argumentieren)

$25 + 3 =$	$12 + 6 =$	$89 - 2 =$	$50 - 15 =$
$25 + 5 =$	$13 + 6 =$	$79 - 12 =$	$51 - 14 =$
$25 + 7 =$	$14 + 6 =$	$96 - 22 =$	$52 - 13 =$
$25 + 9 =$	$15 + 6 =$	$59 - 32 =$	$53 - 11 =$
$25 + 10 =$	$16 + 6 =$	$49 - 42 =$	$54 - 10 =$

Wie bist du beim Finden der falschen Aufgabe vorgegangen? Erkläre.

Wie müsste die Aufgabe heißen, damit sie ins Muster passt?

Nachdem strukturierte Päckchen thematisiert wurden, können sie in Eigenproduktionen aufgegriffen werden, zum Beispiel beim Erstellen von Aufgabenserien oder Päckchen mit arithmetischen Mustern. Diese Eigenproduktionen können dann wieder genutzt werden, um gemeinsam Zusammenhänge innerhalb der Päckchen zu entdecken und zu beschreiben, zum Beispiel im Rahmen eines Rätsels:

Tina hat ein Päckchen ausgesucht und beschrieben. Welches Päckchen ist es? Sie sagt: „Die erste Zahl wird immer um 5 größer. Die zweite Zahl bleibt immer gleich. Das Ergebnis wird immer um 5 größer.“

$66 + 10 =$	$15 + 21 =$	$80 + 26 =$
$66 + 12 =$	$20 + 21 =$	$79 + 27 =$
$66 + 14 =$	$25 + 21 =$	$78 + 28 =$
$66 + 16 =$	$30 + 21 =$	$77 + 29 =$
$66 + 18 =$	$35 + 21 =$	$76 + 30 =$

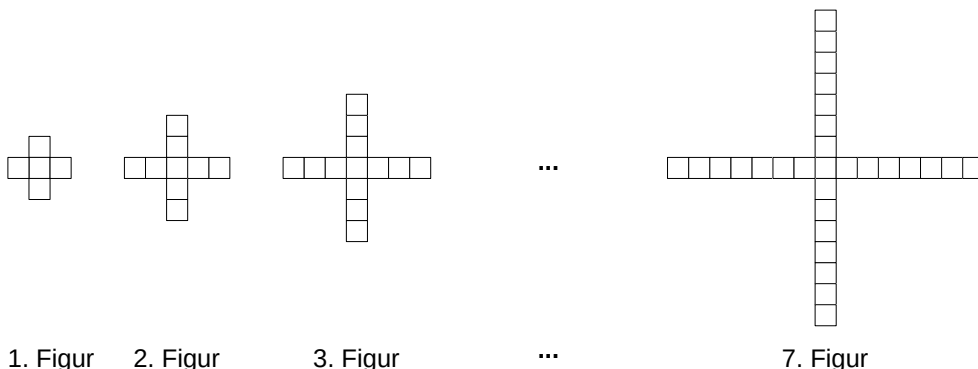
Das Erkennen der Beziehungen zwischen den Aufgaben kann erleichtert werden, wenn

- kein hoher Anspruch an die Rechenfertigkeit gegeben ist,
- das Zahlenmaterial aus dem Zahlenbereich bis 20 bzw. 100 stammt,
- Zusammenhänge veranschaulicht werden.

10.2 Aufgaben zu Geometrischen Mustern

Aufgabe 36 in Testheft B

Henri zeichnet Figuren aus Quadraten nach einer Regel.



Aus wie vielen Quadraten besteht die 5. Figur? _____

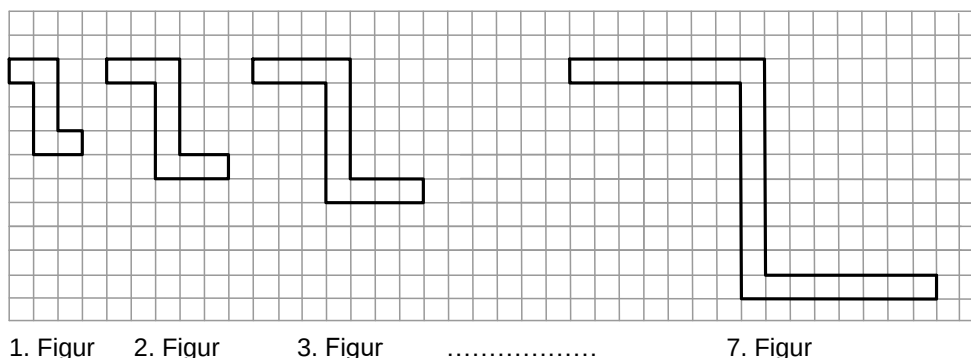
RICHTIG	21
---------	----

Teilaufgabenmerkmale

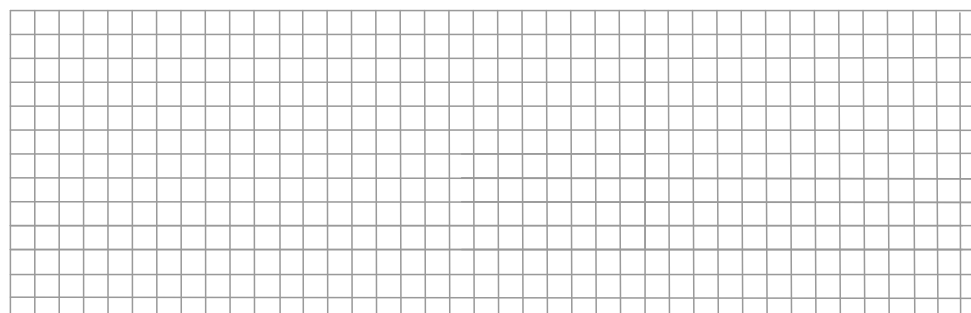
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)

Aufgabe 34 in Testheft C

Rosa zeichnet ein Muster nach bestimmten Regeln.



Zeichne die 5. Figur.



RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich ist grau markiert.)
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen (2.2.d); Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)

Aufgabe 27 in Testheft B

Welche Muster haben die gleiche Regel?

Verbinde.

ABCABCAB	
ABABABAB	
AABAACAA	
ABACABAC	

RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik
---------	------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b); arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)

Aufgabe 36 in Testheft C

Sophie erfindet eine Regel und zeichnet dazu ein Muster auf.



Schreibe nach Sophies Regel ein Muster mit den Buchstaben A und B.

Die Länge der Muster soll gleich sein.



RICHTIG	A B AA BB AAA BBB AAAA BBBB ODER B A BB AA BBB AAA BBBB AAAA
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b); arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)

10.2.1 Aufgabenbezogener Kommentar

In diesem Teil werden die Aufgaben 4 und 13 in Testheft B, Aufgabe 34 und 13 in Testheft C didaktisch kommentiert. Dabei handelt es sich um geometrische Muster, die alle zeichnerisch bzw. gedanklich übersetzt und fortgesetzt werden müssen. Häufig ist auch eine arithmetische Herangehensweise möglich, d. h., dass die Schüler*innen in den geometrischen Mustern und Folgen Zahlenmuster bzw. Zahlenfolgen erkennen können. Auf diese Weise wird von den Kindern ein Zusammenhang zwischen arithmetischen und geometrischen Mustern und Folgen hergestellt. Zur Lösung nachfolgender Aufgaben sind vor allem die basalen Fähigkeiten wie Serialität, Figur-Grund-Wahrnehmung, Konzentration, Merkfähigkeit und Raumvorstellung notwendig

Aufgabe 36 in Testheft B

Diese Aufgabe mit einem wachsenden geometrischen Muster lässt sich gut lösen, indem die Schüler*innen strategisch vorgehen. Dabei zerlegen sie gedanklich das Objekt in Einzelteile, nämlich in gleichbleibende Grundelemente und wachsende Elemente, und übersetzen diese in ein arithmetisches Muster bzw. Zahlenfolge, z. B.:

$ \begin{array}{ccccccccc} & +4 & & +4 & & +4 & & +4 & \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\ 1\ 1\ 1 & 2\ 1\ 2 & 3\ 1\ 3 & 4\ 1\ 4 & 5\ 1\ 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \end{array} $	Veränderung Muster in Einzelelementen Summe
---	--

Insgesamt gesehen erfordert dies ein sehr hohes Abstraktionsvermögen, da die Schüler*innen hier kaum eine Möglichkeit haben, das Muster selbst zu zeichnen. Untenstehende Schülerbeispiele verdeutlichen jedoch, dass viele Kinder trotzdem versuchen, zeichnerisch zu einer Lösung zu

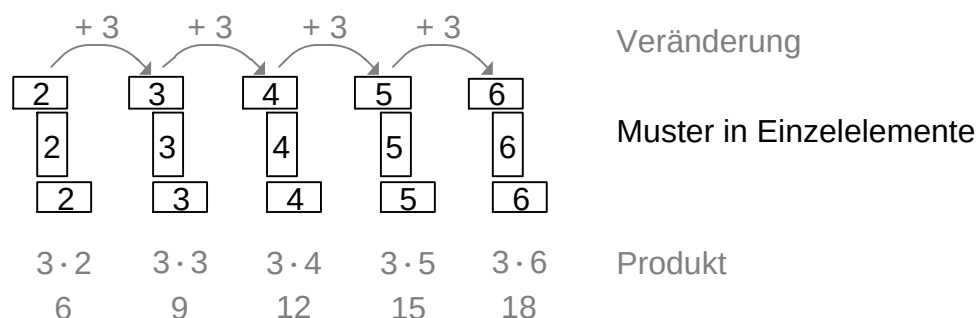
gelangen. Da aber weder Kästchenpapier noch ausreichend Platz vorhanden sind, sind die Lösungsversuche oft fehlerbehaftet.

Aufgabe 34 in Testheft C

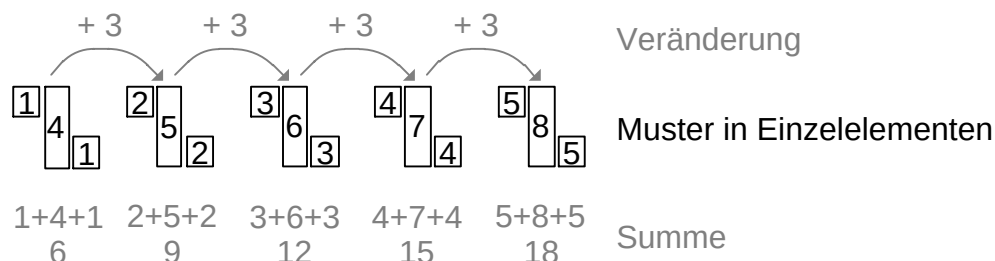
Auch diese Aufgabe mit einem wachsenden geometrischen Muster lässt sich gut lösen, indem die Schüler*innen strategisch vorgehen. Dabei zerlegen sie gedanklich das Objekt in Einzelteile, nämlich in gleichbleibende Grundelemente und wachsende Elemente und übersetzen diese in ein arithmetisches Muster bzw. in eine Zahlenfolge:

Dabei bieten sich hier unterschiedliche Vorgehensweisen an, das Muster in Einzelelemente aufzuteilen:

Möglichkeit 1:



Möglichkeit 2:



Aufgabe 27 in Testheft B

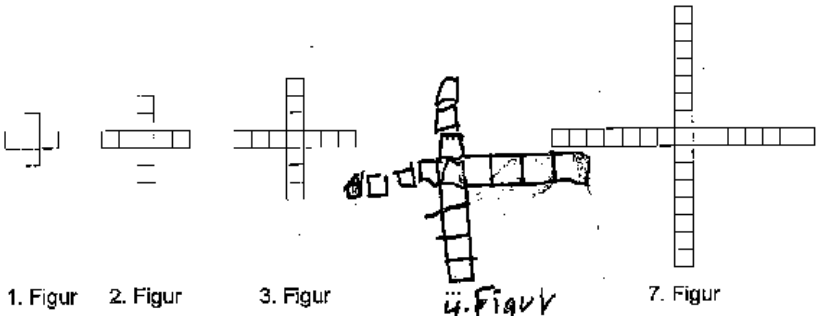
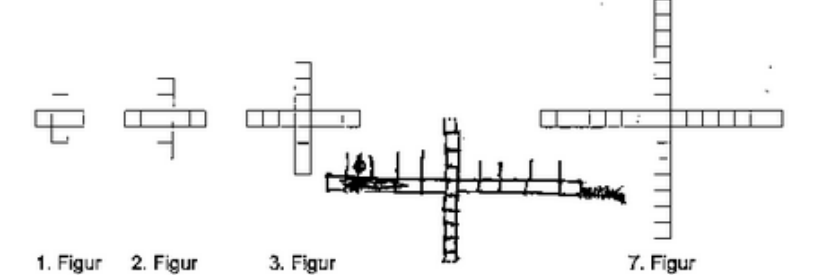
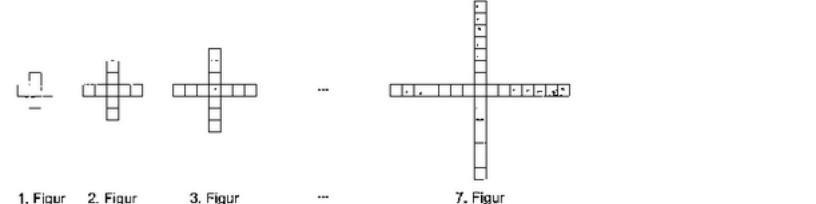
Hier müssen verschiedene Muster zunächst auf die jeweils verwendete Regel hin untersucht werden. Zusätzlich sollen gleiche Regeln als solche erkannt werden, unabhängig davon, mit welchen einzelnen Elementen das Muster gebildet wurde.

Aufgabe 36 in Testheft C

Um das neue Muster nach Sophies Regel aufzuschreiben, müssen die Kinder zunächst den Aufbau von Sophies Musters erkennen. Im nächsten Schritt müssen alle Dreiecke an der entsprechenden Stelle durch ein A ersetzt werden, alle Kreise werden durch ein B ersetzt. Oder aber die Kinder ersetzen alle Dreiecke durch ein B, alle Kreise durch ein A. Das Muster darf – laut Arbeitsanweisung – nicht verkürzt oder weitergeführt werden, die Länge soll genauso beibehalten werden.

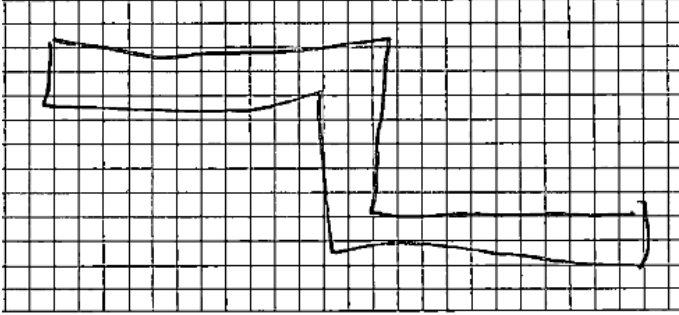
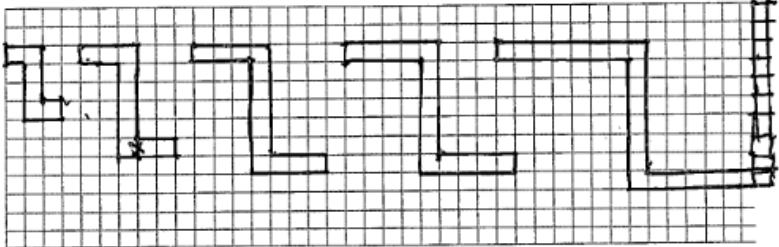
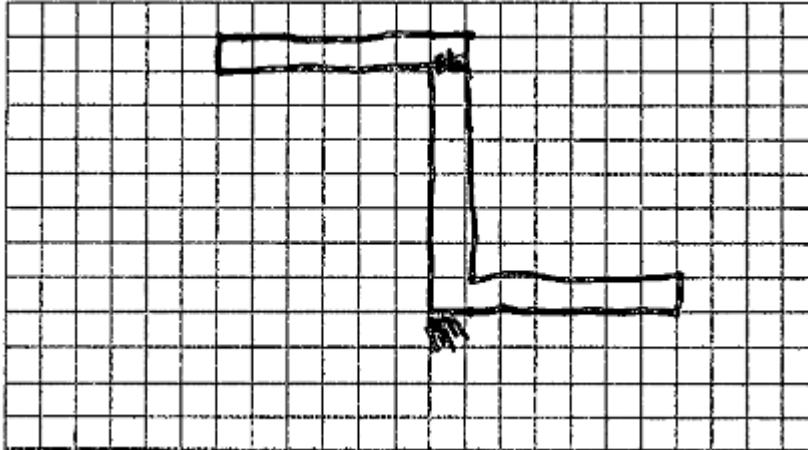
10.2.3 Mögliche Schwierigkeiten

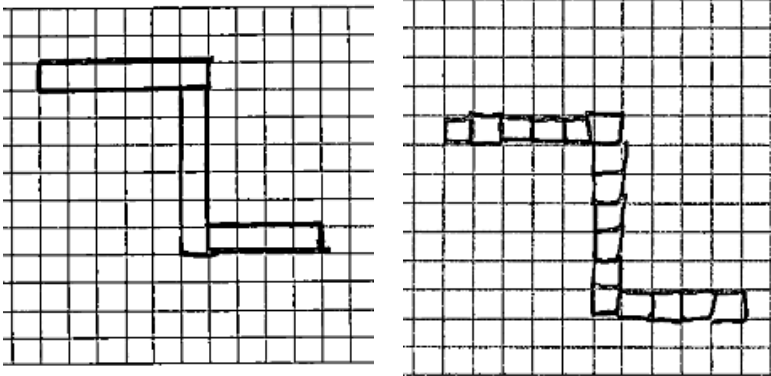
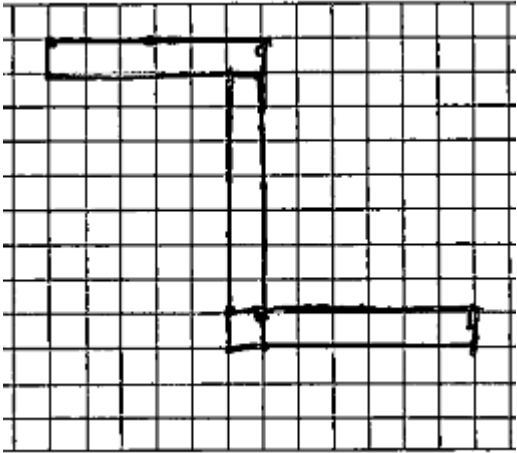
Aufgabe 36 in Testheft B

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
 1. Figur 2. Figur 3. Figur 4. Figur 7. Figur Aus wie vielen Quadraten besteht die 5. Figur? <u>17</u>	Es wird nicht genau gelesen und daher die 4. Figur anstatt der 5. Figur ermittelt.
Aus wie vielen Quadraten besteht die 5. Figur? <u>22</u>	Es wurden die Anzahlen der kleinen Quadrate je Horizontal- bzw. Vertikalachse addiert und somit das mittlere Quadrat doppelt gezählt.
 1. Figur 2. Figur 3. Figur 4. Figur 7. Figur Aus wie vielen Quadraten besteht die 5. Figur? <u>19</u>	Es wurden die Anzahlen der kleinen Quadrate je „Arm“ addiert und das mittlere Quadrat wurde übersehen. Hier wurde zudem der „obere Arm“ zu kurz dargestellt.
 1. Figur 2. Figur 3. Figur 4. Figur 7. Figur Aus wie vielen Quadraten besteht die 5. Figur? <u>29</u>	Es wurden die Quadrate der 7. Figur abgezählt; der Arbeitsauftrag wurde möglicherweise überlesen.

Aufgabe 34 in Testheft C

Viele Schwierigkeiten beruhen auf einem fehlerhaften Umgang mit den „Verbindungsquadraten“ zwischen der vertikalen und den beiden senkrechten Quadrat-Reihen. Hierbei kommt es häufig zu Fehlern um genau ein Quadrat.

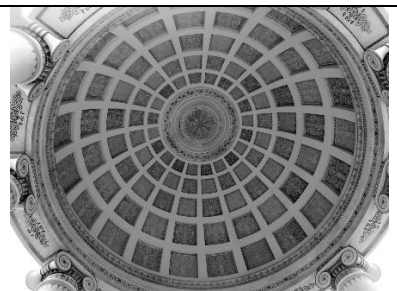
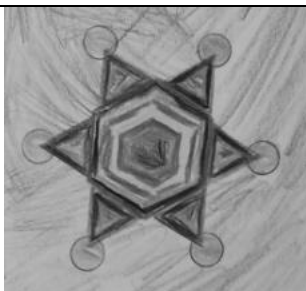
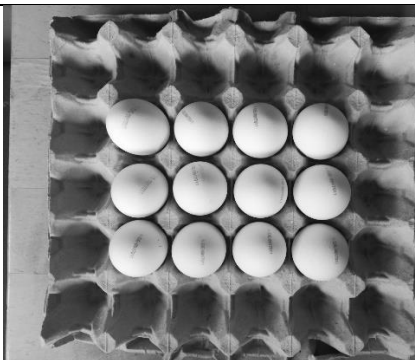
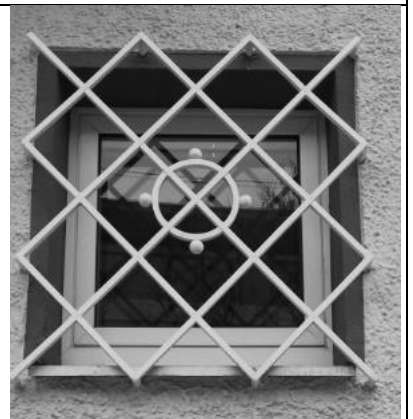
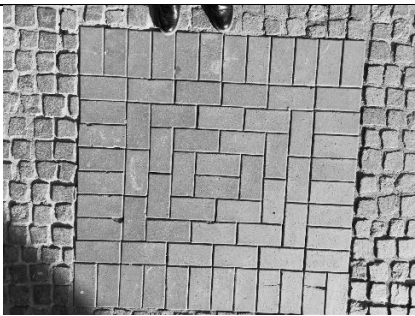
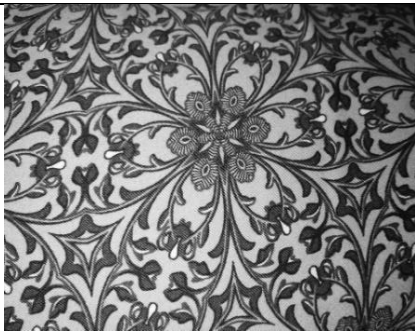
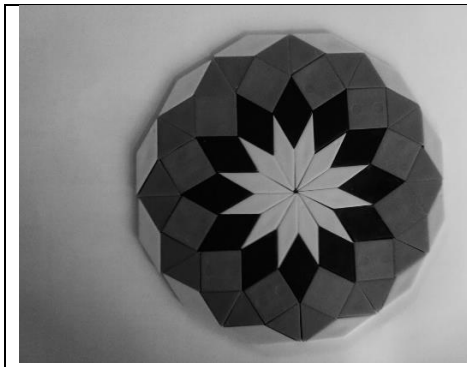
Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
	Hier wurde zu ungenau gearbeitet: weder wurde ein Lineal genutzt, noch wurde eine Zählstrategie angewandt. Unter Umständen liegen hier auch Probleme bezüglich Figur-Grund-Wahrnehmung oder Feinmotorik vor.
Zeichne die 5. Figur. 	Hier wurde versucht alles zu zeichnen. Daher steht nicht mehr genügend Platz für die 5. Figur zur Verfügung. Zudem gelingt bereits das Abzeichnen der 2. und 3. Figur nicht fehlerfrei, was ein Indiz für ungenaues Arbeiten sein könnte.
	Hier wurden die beiden Querachsen zu lang dargestellt. Dies kann daran liegen, dass die „Verbindungsquadrate“ oben und unten doppelt gezählt werden.

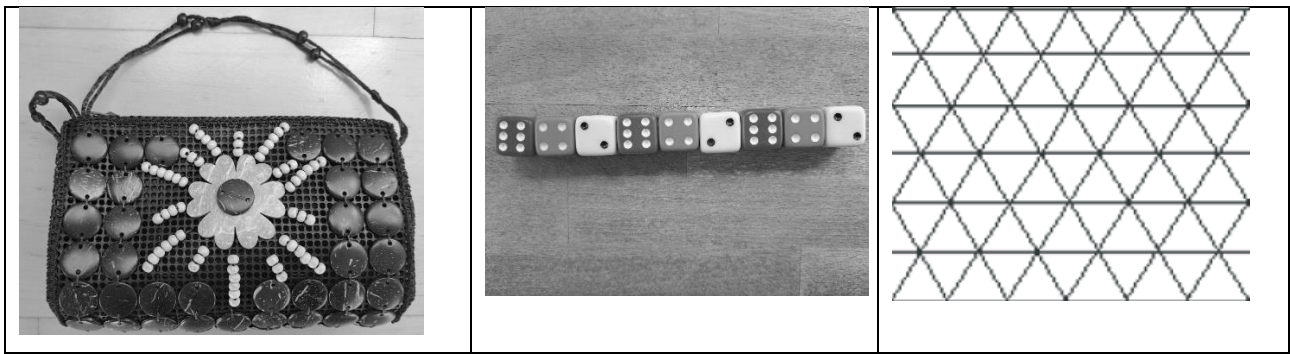
	Es wird nicht genau gelesen und daher (versucht) die 4. Figur anstatt der 5. Figur ermittelt. In diesen beiden Fällen wird außerdem der obere „Querbalken“ um ein Quadrat zu lang gezeichnet.
	Dieses Kind hat richtig begonnen, jedoch die Vertikalachse und die untere Querachse zu lang gezeichnet.

Aufgabe 27 in Testheft B

Die grundsätzliche Schwierigkeit liegt zunächst darin, die gegebenen Muster und deren Aufbau zu erkennen und dann noch die zusammengehörenden Musterzeilen zu identifizieren.

Wenn die Kinder die vier aus Symbolen gebildeten Muster jeweils als Einheit mit identischer Regel betrachten, wenden sie vielleicht die Regel an: Gleiche Symbole bedeuten in allen Fällen gleiche Buchstaben. Mit dieser Strategie kommen sie nicht zu einer Lösung. Sie müssen erkennen, dass jede Musterzeile einzeln betrachtet und mit der jeweiligen Übersetzungsvorschrift abgeglichen werden muss, um die passende Buchstabenzeile zu finden.





Copyright Fotos: IQB

Geometrische Muster erstellen und beschreiben

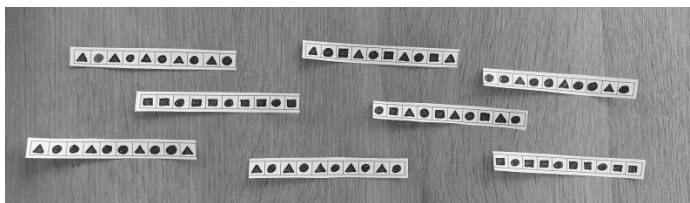
Um geometrische Muster selbst zu erstellen und zu beschreiben, bietet sich folgender Umgang mit Eigenproduktionen der Kinder an:

Die Schüler*innen entwickeln selbst ein einfaches Muster auf der Basis einer einfachen Vorlage.

Erfinde ein eigenes Muster.

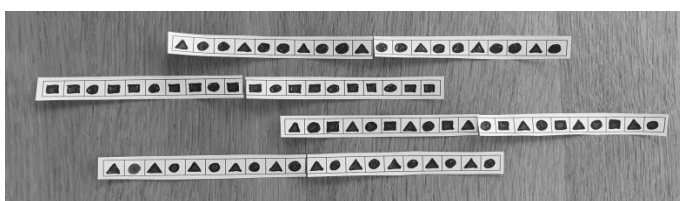
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Das fertige Muster zerschneiden sie in zwei Teile.



Copyright Fotos: IQB

Durch das Zusammensetzen der einzelnen Abschnitte wird der Blick auf die verwendete Regel gelenkt.



Copyright Fotos: IQB

Des Weiteren kann allen Kindern ein Muster-Teilstück ausgeteilt werden. Nun soll das eigene Muster so beschrieben werden, dass sich der entsprechende Muster-Partner findet (→ Kommunizieren, Problemlösen).

Vorgegebene Muster weiterführen

Das Weiterführen von vorgegebenen Mustern eignet sich ebenfalls gut, um das Erkennen von Gesetzmäßigkeiten zu schulen.

Dabei muss thematisiert werden, dass verschiedene Lösungen möglich sind, je nachdem wie die Einheiten festgelegt werden, aus denen sich das Muster zusammensetzt (→ Kommunizieren).

Setze fort:

A	B	B							
---	---	---	--	--	--	--	--	--	--

Mögliche Lösungen:

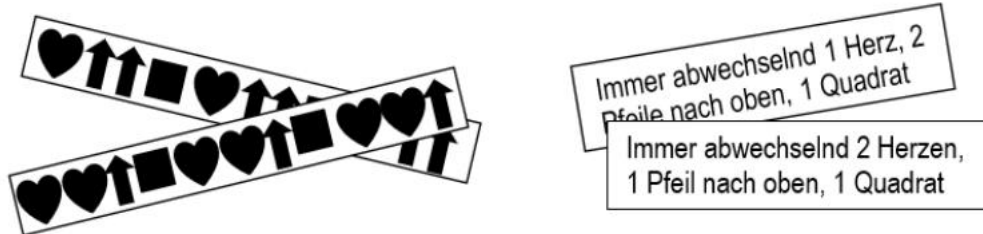
A	B	B	A	B	B	A	B	B	A
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

A	B	B	C	C	C	D	D	D	D
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

A	B	B	A	A	B	B	A	A	B
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Zuordnung von Regeln zu einem Muster

Die Zuordnung einer verbalisierten Regel zu einem Muster kann anhand von Zuordnungsspielen geübt und vertieft werden, so z. B. durch paarweises Zuordnen entsprechender Kärtchen:



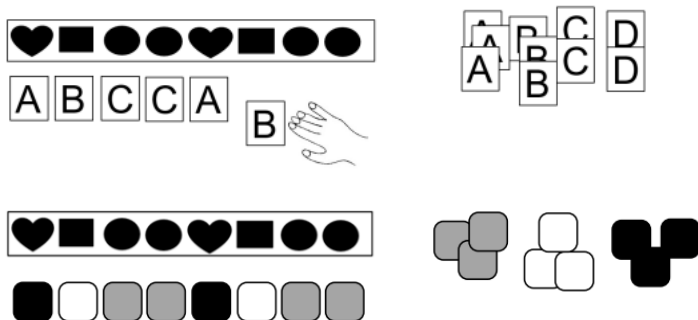
In Form eines „Legediktats“ kann die Regel auch in Partnerarbeit oder durch die Lehrkraft vorgelesen werden. Bereit gestellte Musterkärtchen sind dann der Beschreibung zuzuordnen und die Lösung wird gemeinsam überprüft (→ Kommunizieren). In Gruppenarbeit können auch Regeln vorgelesen werden, die dann mit unterschiedlichen Materialien (Symbolplättchen, Buchstaben, Farbplättchen, Gegenstände...) gelegt werden (→ Darstellen). Auch der umgekehrte Weg, die Erstellung und Besprechung von Muster-Bildungsvorschriften zu gegebenen Mustern, ist denkbar.

Muster nach Vorgaben erstellen

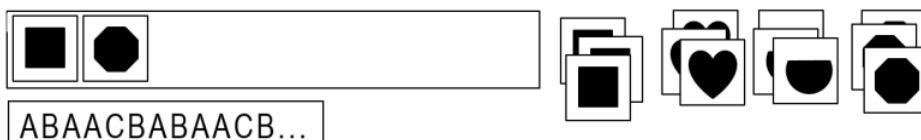
Aufgaben, bei denen Analogien zwischen Mustern erkannt oder analog aufgebaute Muster erstellt werden müssen, lassen sich durch handelnden Umgang und konkrete Eigenproduktion einführen und vertieft bearbeiten. Dabei ist der Einsatz von Legematerialien günstig, die ein Ausprobieren und eine wiederholte Veränderung des Gelegten ermöglichen, bevor dann eine schriftliche Fixierung der endgültigen Version stattfindet.

Einzel und/oder in Partnerarbeit werden vorgegebene Muster mit anderen Symbolen nachgelegt (→ Darstellen). Die Kontrolle kann durch den Partner erfolgen; gefundene Fehler werden besprochen und korrigiert (→ Kommunizieren).

Anhand vielfältiger Materialien kann die Übertragung des gleichen Musters in viele verschiedene Darstellungen erfolgen.



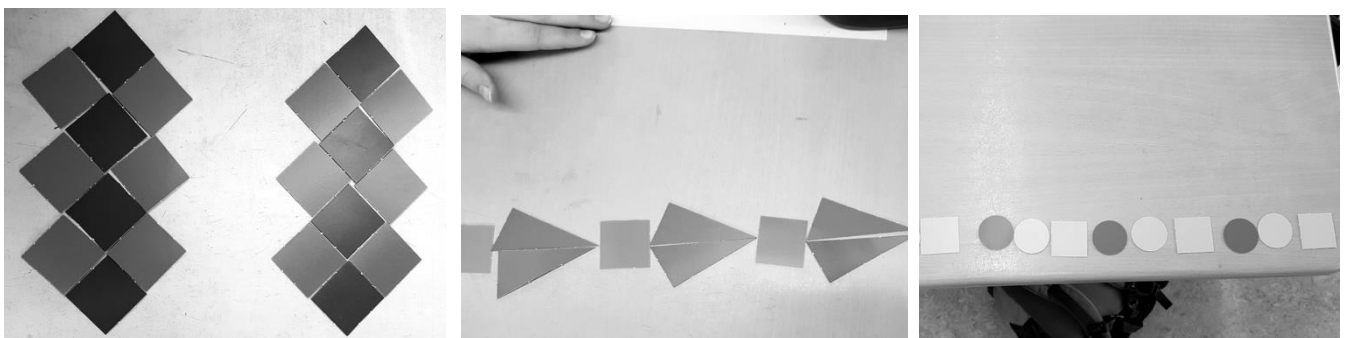
Differenzierend kann die Übertragung eines Musters auch durch die Vorgabe z. B. der ersten beiden Elemente teilweise festgelegt werden.



In Partner- oder Gruppenarbeit bzw. im Klassenverband lassen sich Unregelmäßigkeiten gemeinsam entdecken, beschreiben und begründen (→ Argumentieren).

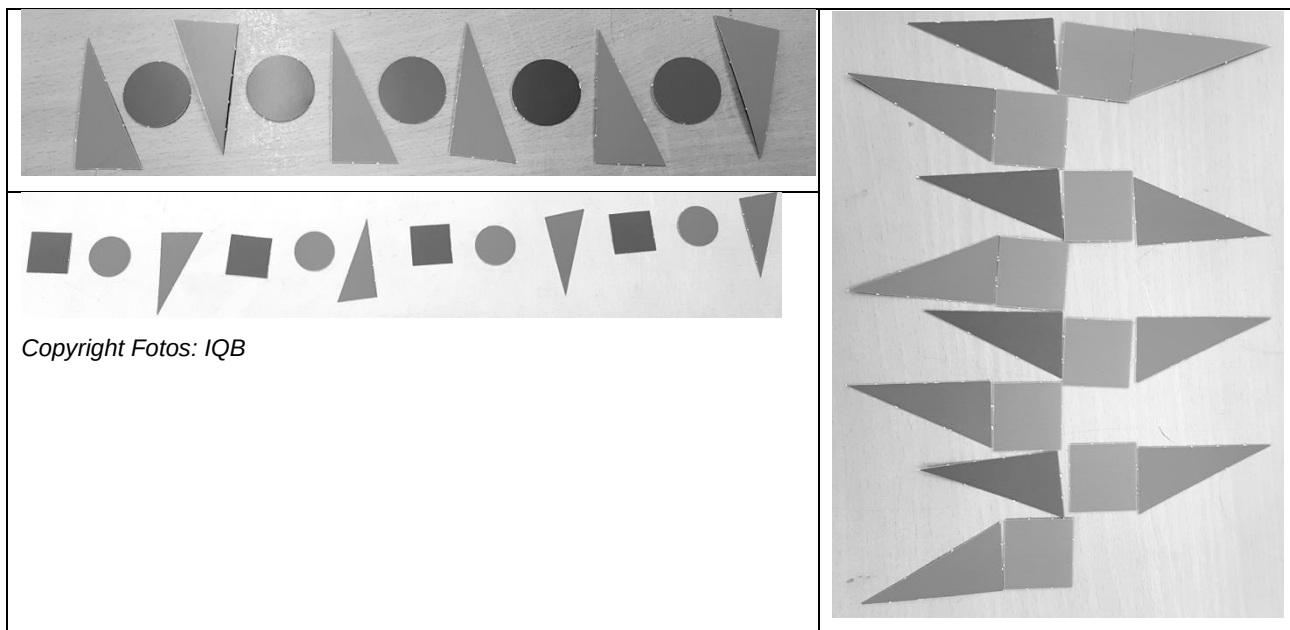
Fehler in Mustern finden

Eine weitere Übung schult das Finden von Fehlern in Mustern. Dazu legen die Kinder zunächst Muster mit Plättchen. Durch die unterschiedliche Komplexität der ausgewählten Muster kann hier sehr gut differenziert werden.



Copyright Fotos: IQB

Danach bauen sie einen Fehler ein. Im „Museumsgang“ (es darf nicht geredet, nichts angefasst oder verändert werden) suchen andere Kinder den Fehler.

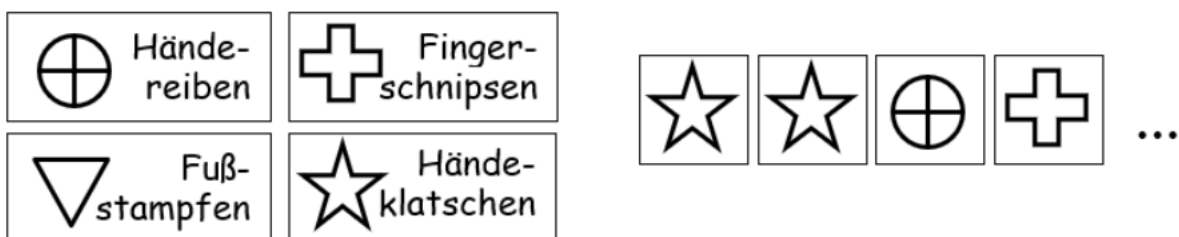


Die Muster können natürlich auch gezeichnet und die Fehler eingekreist werden.

Anschließend beschreiben die Kinder den entdeckten Fehler, korrigieren ggf. und begründen ihn mit der entsprechenden Muster-Regel (→ Kommunizieren, Argumentieren). Dies kann in Partnerarbeit geschehen, oder es werden exemplarisch einzelne Fehler im Klassengespräch betrachtet.

Muster erfahrbar machen

Eine ganzheitliche und fächerverbindende Möglichkeit, Muster erfahrbar zu machen, ist die Darstellung und gemeinsame Umsetzung gegebener Muster durch Körperbewegungen oder Geräuschproduktion. Z. B. wird ein Rhythmus geklopft, eine Tonfolge auf Klangstäben gespielt oder Körperinstrumente (klatschen, stampfen, schnipsen...) genutzt. Die Kinder werden aufgefordert, den gehörten Rhythmus bzw. die Tonfolge in eine ikonische oder symbolische Darstellung zu übertragen. Sie legen ein Muster oder beschreiben es mit Worten (→ Kommunizieren):



Auch Rhythmen, die anhand von Symbolen für unterschiedliche Notenwerte notiert werden, können durch Klatschen eine veränderte, ganzheitliche Darstellung eines Musters darstellen und so zur Verinnerlichung des Musterbegriffs verhelfen:



Natürlich kann auch hier neben der akustischen Umsetzung eine Analogiebildung durch Beschreibung des Rhythmus mit Buchstaben, Ziffern bzw. Symbolen erfolgen.

A – B – B – A – B – B oder 2 – 1 – 1 – 2 – 1 – 1 oder ■ ■ ■ ■ ■ ■

Kommunizieren und Argumentieren im Kontext geometrischer Muster

Um die Kompetenz des Kommunizierens und Argumentierens im Unterricht zu fördern, können zum Beispiel auch falsche Aufgabenlösungen zur Aufgabe 36 in Testheft C gezielt untersucht, versprachlicht und gemeinsam korrigiert werden (→ Kommunizieren, Argumentieren). Diese Fehlersuche schult das genaue Hinschauen und veranschaulicht den Kindern, wie wichtig es sein kann, Arbeitsaufträge ganz genau zu lesen und korrekt zu befolgen.

ABAA BB AAAA BBB AAAA BBBB

„Das Kind hat ein A zu viel geschrieben“

ABCC DD EEE FFE GG GG HH HH

„Das Kind hat die falschen Buchstaben benutzt.“

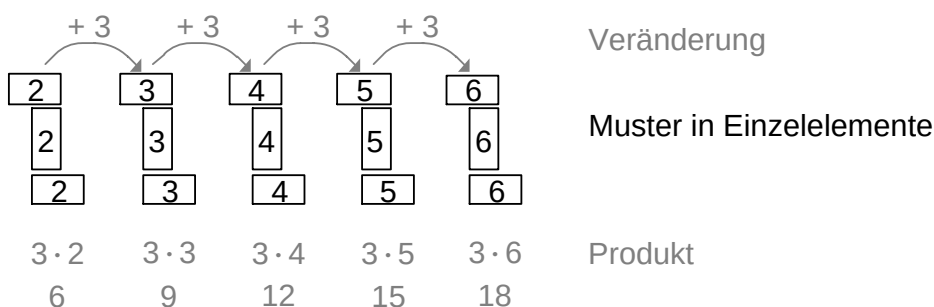
ABAA BBAAA BBBAAAA BBBBAAAAA BBBB

„Das Muster ist zu lang.“

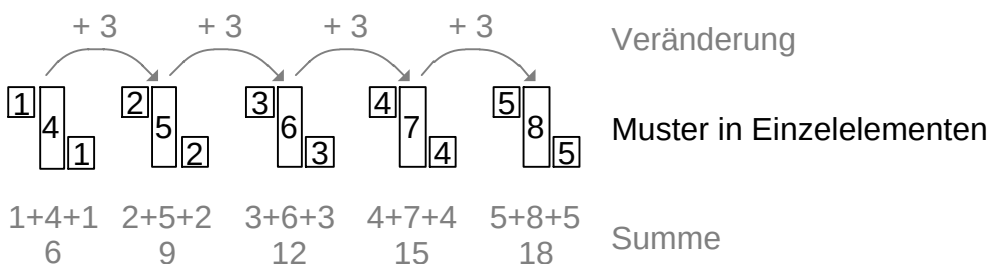
Wachsende bzw. absteigende Musterfolgen

Bei diesen geometrischen Musterfolgen muss kein wiederkehrendes Grundmuster als Baustein erkannt werden, sondern die Einzelelemente müssen zueinander in Beziehung gesetzt und eine Veränderung zwischen diesen Elementen festgestellt werden. Insofern ist es auch oftmals hilfreich, die Einzelelemente in weitere Grundelemente zu zerlegen und an ihnen die Veränderungen zu betrachten, so wie es bei den aufgabenbezogenen Kommentaren zu Aufgabe 36 in Testheft B und Aufgabe 34 in Testheft C dargestellt ist (→ Darstellen):

Möglichkeit 1:



Möglichkeit 2:



Eine arithmetische Analyse kann das Erkennen von Zusammenhängen unterstützen. Hier gibt es unterschiedliche Herangehensweisen, die im Gespräch thematisiert werden müssen

(→ Kommunizieren, Argumentieren) und sich in unterschiedlichen Darstellungen visualisieren lassen. Z. B.:

Welches Teil fehlt in dieser Reihe?

?

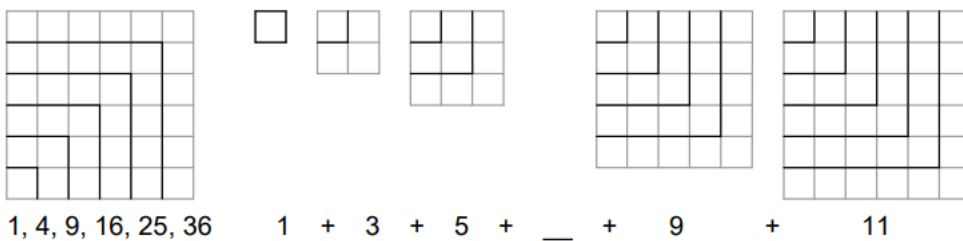
Kreuze an.

☐	☐	☐	☐

Verschiedene Herangehensweisen (→ Darstellen):

Das Erkennen von Zusammenhängen in Musterfolgen kann durch

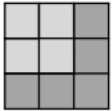
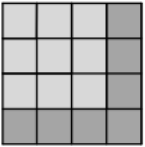
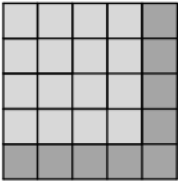
- **anschauliches und handlungsorientiertes Arbeiten** unterstützt werden. Durch das Aufeinanderlegen von Einzelementen (z. B. einzelner Quadrate) kann die Veränderung (z. B. „Überstände“) von Teil zu Teil verdeutlicht werden:



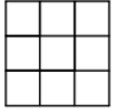
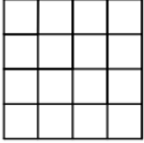
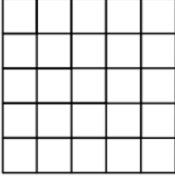
- **Analyse der Einzelemente** (Spalte und Zeile) geschehen:

Anzahl der Kästchen	?					
Zeile	1	2	3		5	6
Spalte	1	2	3		5	6
Bildungsvorschrift	1x1	2x2	3x3		5x5	6x6

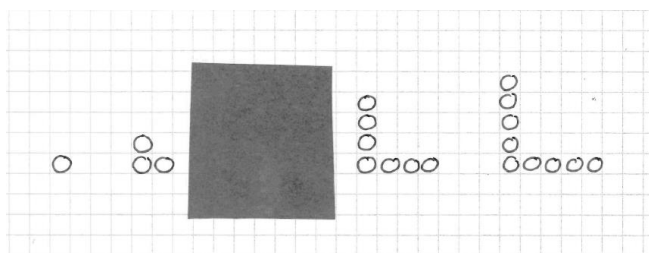
- farbige Kennzeichnungen erfolgen:

						?
Anzahl der Kästchen	1	1 + 3	4 + 5	9 + 7	16 + 9	25 + ____

- eine Rechenregel angegeben werden:

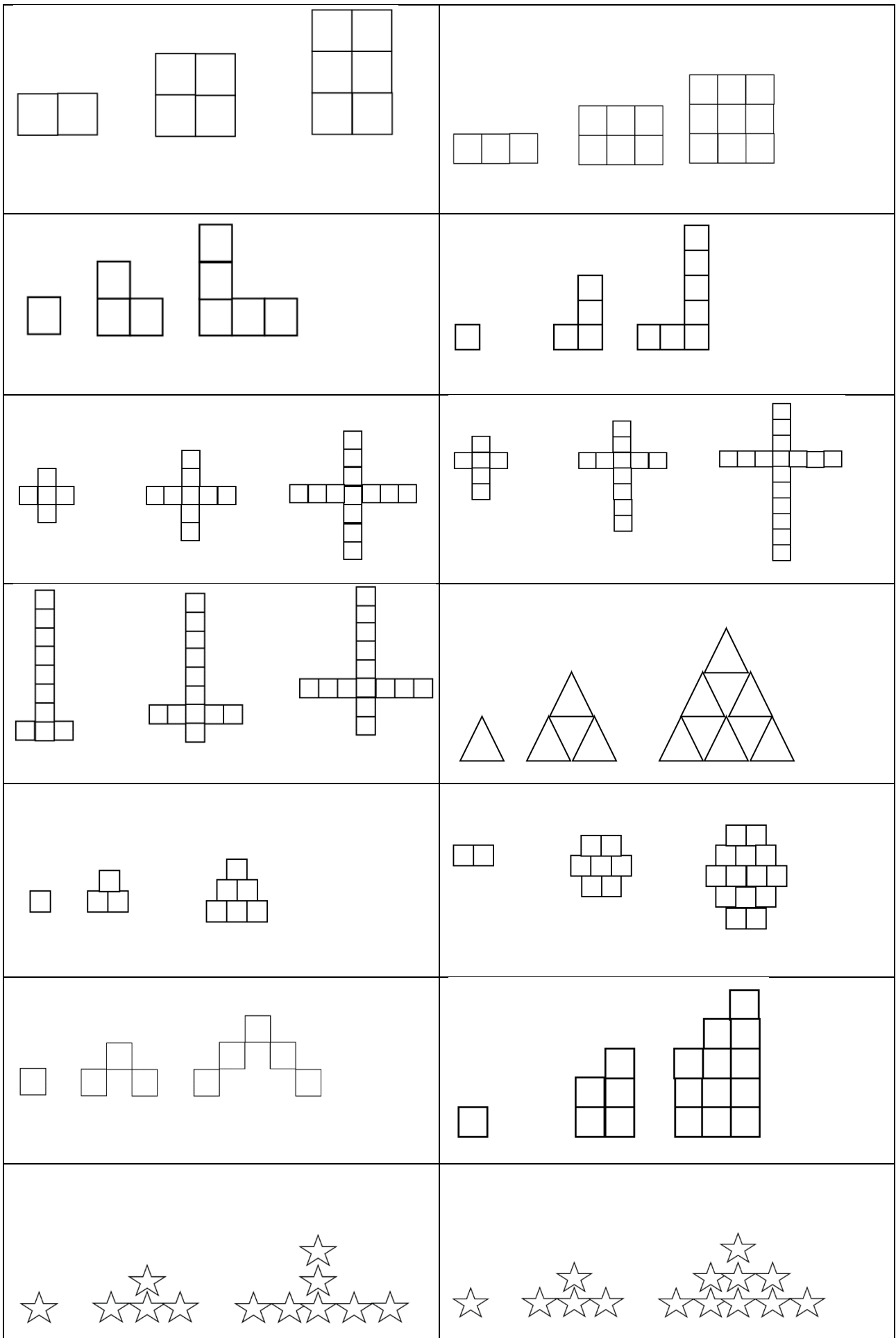
						?
Anzahl der Kästchen	1	1+3	1+3+5	1+3+5+7	1+3+5+7+9	_____

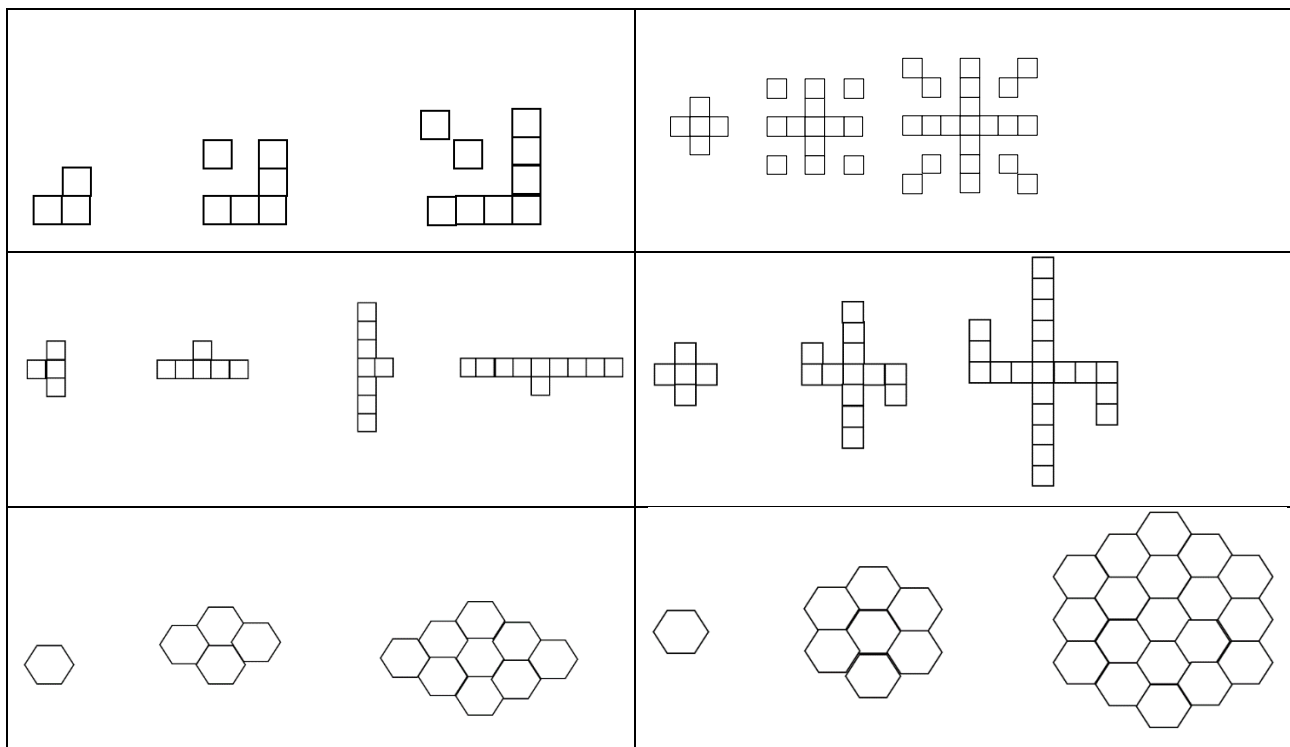
Als Differenzierung können die Anzahl der Elemente sowie die Komplexität der Veränderungen angepasst werden. Fehlende Elemente selbst zu finden, gestaltet sich schwieriger als eine Auswahl von Vorgaben zu nutzen (Multiple-Choice-Aufgabe zum Ankreuzen). Um Lücken in Musterfolgen zu schließen, können mögliche Lösungsvorschläge ausgeschnitten werden und versuchsweise in die Lücke gesetzt werden. Auf diese Weise wird aus dem gedanklichen Operieren ein reales Handeln. Bei vorgegebenen Lösungsvorschlägen sind zwei Zugänge möglich, entweder können die möglichen Lösungen gedanklich eingesetzt und geprüft werden oder die Kinder überlegen, wie das fehlende Stück aussehen müsste und suchen es aus den Vorschlägen heraus. Handelnd kann das Muster über die Lücke hinweg auch selbst weitergezeichnet werden. Bei der Bearbeitung von Aufgabenstellungen zur Fortführung von Mustern bietet es sich an, die Kinder selbst Muster mit Lücken entwerfen zu lassen. Das Muster wird gezeichnet und dann eine Stelle herausgeschnitten oder abgeklebt.



Das Verfahren, sich gegenseitig Aufgaben zu stellen, ist motivierend und der so entstandene Aufgabenpool kann von den Kindern frei genutzt werden. Eine Differenzierung ist gut möglich über die Komplexität der Muster oder die Größe der Lücke.

Durch geringfügige Variationen der Figuren lässt sich leicht eine Vielzahl von weiteren analogen Figurenfolgen - auf jeweils unterschiedlichen Anforderungsniveaus - finden. Dazu lässt sich wiederum eine Kartei oder ein eBook erstellen:





Diese und ähnliche Musterkarten bieten sich als Material für eine gute Lernumgebung an. Die Kinder können sich hier jeweils auf ihrem eigenen Niveau (unterschiedliche Abstraktionsstufen) mit der Thematik beschäftigen. Die prozessbezogenen Kompetenzen werden ganz besonders geschult (→ Problemlösen, Argumentieren, Darstellen). Zum einen können die Schüler*innen selbstständig Entdeckungen machen und zum anderen können untenstehende Arbeitsaufträge zum Forschen anregen. Dabei wird der Schwierigkeitsgrad zunehmend gesteigert:

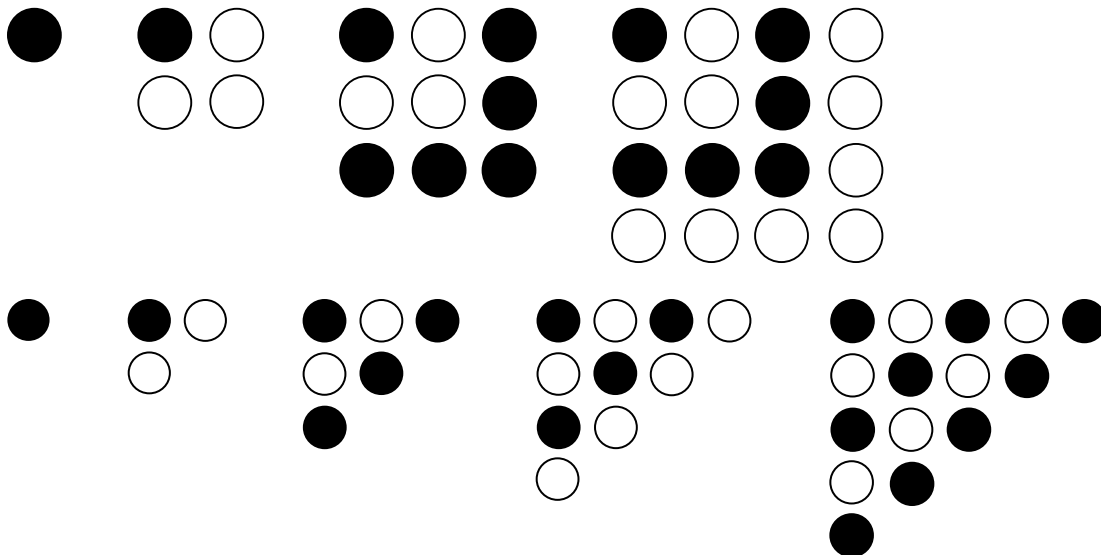
- Lege/Zeichne das Muster weiter.
- Finde einen Namen für diese Figuren.
- Aus wie vielen Karos/Plättchen besteht die 4., 5., 6., 7., 8., ... Figur?
- Welche Regelmäßigkeiten fallen dir auf? Beschreibe.
- Aus wie vielen Plättchen besteht die Figur, die in der untersten Reihe 10 Plättchen hat?
- Gibt es eine Figur in der Folge, die aus 15, 20, 100 Plättchen besteht?
- Wie groß ist die Gesamtzahl an Plättchen für die ersten 5, 6, 7, 8, ... Figuren insgesamt?

Differenzierung/Weiterführung:

- Zweifarbige Muster

Gestalte das Muster mit roten und blauen Wendepfättchen. Überlege: Wie viele rote bzw. blaue Pfättchen brauchst du für jede einzelne Figur? Erkennst du eine Regel? Beschreibe sie.

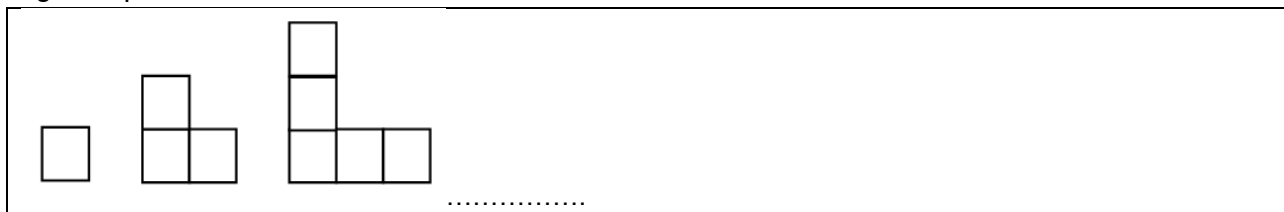
Z. B.:



Figuren aus Streichhölzern

Stelle dir vor, die Seiten der Quadrate/Dreiecke wurden mit Streichhölzern gelegt.

Ergänze passend dazu die Tabelle:



	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 5	Figur 6	Figur 7	Figur 8
Anzahl neue Streichhölzer	4	+ 6	+ 6					
Anzahl neue Quadrate	1	+ 2	+ 2					
Anzahl Quadrate gesamt	1	3	5					
Anzahl Streichhölzer gesamt	4	10	16					

Welche Muster erkennst du? Erkläre.

Stelle dir vor, die Seiten der Dreiecke wurden mit Streichhölzern gelegt.
 Fülle passend dazu die Tabelle aus:



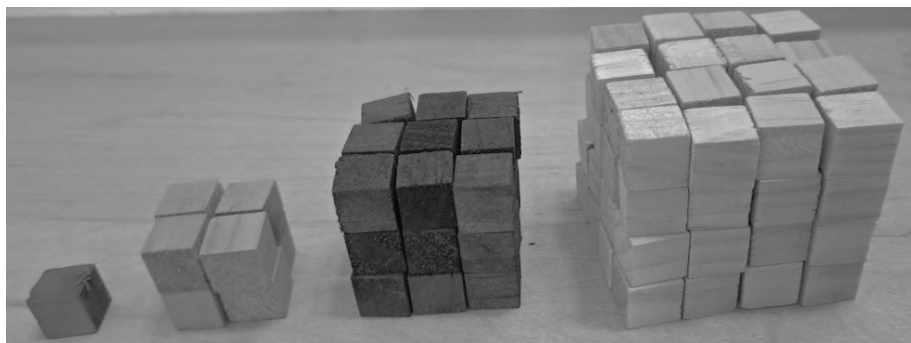
	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 5	Figur 6	Figur 7	Figur 8
Anzahl neue Streichhölzer								
Anzahl neue Dreiecke								
Anzahl Dreiecke gesamt								
Anzahl Streichhölzer gesamt								

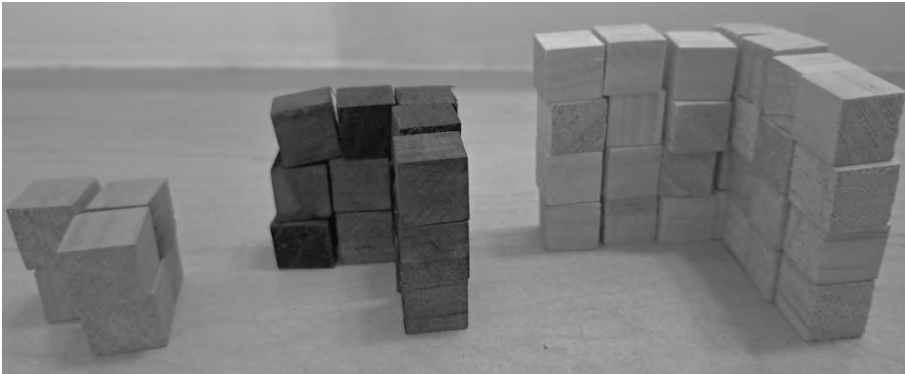
Welche Muster erkennst du? Erkläre.

- Dreidimensionale Muster

Einheitswürfel regen zum Bauen an. Sie können auch zum Erstellen von Musterfolgen genutzt werden, indem Würfel, Quader oder Pyramiden gebaut werden, die sich nach bestimmten Regeln in alle drei Richtungen verändern (Länge, Breite, Höhe).

Z. B.:





Copyright Fotos: IQB

Hier können die Kinder wieder zu Eigenproduktionen aufgefordert werden. Dabei arbeiten sie immer auf ihrem eigenen Niveau unter Berücksichtigung der prozessbezogenen Kompetenzen (→ Problemlösen, Argumentieren, Darstellen). Neben selbstständigen Entdeckungen dienen Arbeitsaufträge (ähnlich wie bei zweidimensionalen Musterfolgen) als Anregung:

- Lege das Muster nach/weiter.
- Finde einen Namen für diese Figuren.
- Aus wie vielen Würfeln besteht die 4., 5., 6., 7., 8., ... Figur?
- Welche Regelmäßigkeiten fallen dir auf? Beschreibe.
- Aus wie vielen Würfeln besteht die Figur, die in der untersten Schicht 15, 16, 24, ... Würfel hat?
- Gibt es eine Figur in der Folge, die aus 100, 999, 1000, ... Würfeln besteht?
- Wie groß ist die Gesamtzahl an Würfeln für die ersten 3, 4, 5, 6, ... Figuren insgesamt?

10.3 Aufgaben zu Mustern in Anwendungssituationen

Aufgabe 28 in Testheft C

Maxi hat ein Armband geknüpft. Es ist 24 cm lang. Jeden Tag knüpft sie genau 4 cm.
Wie viele Tage hat sie gebraucht?

Sie hat _____ Tage gebraucht.

RICHTIG	6 ODER sechs
---------	--------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a); einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen (3.2.c)

Aufgabe 30 in Testheft B

In einer Packung sind immer 4 Schokoriegel.
Ergänze.

Anzahl der Packungen	1	3	7	9
Anzahl der Schokoriegel	4	_____	_____	_____

RICHTIG	Anzahl der Packungen	1	3	7	9
	Anzahl der Schokoriegel	4	12	28	36

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen (3.2.b)

Aufgabe 31 in Testheft C

Ergänze die Preisliste.

Anzahl Eier	1	2	3	4	5
Preis (€)	_____	0,80	_____	_____	2,00

RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik					
	Eier	1	2	3	4	5
	Preis (€)	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen (3.2.b); Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)

Aufgabe 26 in Testheft B

Ein Brötchen kostet 25 Cent.

Wie viel muss Lisa für 3 Brötchen bezahlen? Kreuze an.

- ☐ 25 ct
☐ 28 ct
☐ 55 ct
☐ 75 ct

RICHTIG	Nur das 4. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	---------------------------------------

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen (3.2.c)

Aufgabe 28 in Testheft B

Bei einem Spiel bekommt jedes Kind 3 Steine.

Wie viele Steine braucht man für 11 Kinder? _____

RICHTIG	33
---------	----

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen (3.2.c)

Aufgabe 30 in Testheft C

3 Kisten Limonade kosten 12 €.

Wie viel kosten 5 Kisten Limonade? _____ €.

RICHTIG	20
---------	----

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen (3.2.c)

Aufgabe 33 in Testheft B

Safi bastelt Karten. Das Material für 2 Karten kostet 1 €.

Das Material für 5 Karten kostet _____.

RICHTIG	2,50 € ODER 2 € 50 Cent ODER 250 Cent Die Angabe der Maßeinheit, als Einheitszeichen oder als ausgeschriebenes Wort, ist erforderlich.
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a); funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a)

Aufgabe 33 in Testheft C

Die Klasse 3a besucht das Schwimmbad.

Eintrittspreise für Kinder	
Einzelkarte	2 €
5er-Karte	9 €

In der Klasse sind 23 Kinder.

Carolin sagt: „Für die Kinder unserer Klasse müssen wir 42 € bezahlen.“

Hat Carolin recht? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.

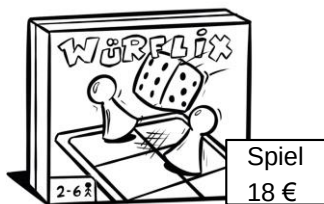


RICHTIG	JA wurde angekreuzt UND eine Begründung gegeben, die folgende Informationen enthält: Sie kaufen 4 5er-Karten und 3 Einzelkarten. Auch die Rechnung $36 + 6$ bzw. $36 + 6 = 42$ wird als richtige Begründung gewertet. <i>Carolin hat recht, weil 4 mal 9 = 36 und 3 mal 2 = 6 und zusammen ist das 42.</i> <i>Weil 23 Kinder brauchen 4 mal 5-Karte und 3 mal Einzelkarte.</i>
FALSCH	NEIN wurde angekreuzt ODER JA wurde angekreuzt UND/ODER es wurde keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben.

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a); funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a)

Aufgabe 29 in Testheft B



Wenn Ira jede Woche 2 € spart, dann kann sie das Spiel in _____ Wochen kaufen.

RICHTIG	9
---------	---

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a); funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a)

Aufgabe 37 in Testheft C

Sabrina spart jede Woche 3 €. Sie will sich ein Spiel für 23 € kaufen.



In 7 Wochen kann ich mir das Spiel kaufen.

Hat Sabrina recht? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.

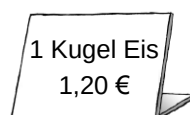


RICHTIG	NEIN wurde angekreuzt UND es wurde eine richtige und vollständige Begründung gegeben, aus der hervorgeht, dass 21 € bzw. 7 Wochen nicht ausreichen, z. B.: <i>Nach 7 Wochen hat sie nur 21 €.</i> <i>Sie muss 8 Wochen sparen.</i> <i>Sie hat zwei Euro zu wenig.</i>
FALSCH	JA wurde angekreuzt ODER NEIN wurde angekreuzt UND/ODER es wurde keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben, z. B. wenn ein Vergleich fehlt: <i>In 7 Wochen hat sie 21 € gespart.</i>

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1); Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a); funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a); einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen (3.2.c)

Aufgabe 24 in Testheft C



Ergänze.

Lale kauft 3 Kugeln und bezahlt _____.

RICHTIG	3,60 € ODER 3 € 60 Cent ODER 360 Cent. Die Angabe der Maßeinheit, als Einheitszeichen oder als ausgeschriebenes Wort, ist erforderlich.
---------	--

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a); funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a)

Aufgabe 26 in Testheft C

Trage in die Tabelle ein.

1 Paket Nudeln	2 Pakete Nudeln	_____ Pakete Nudeln
2 Euro	_____ Euro	10 Euro

RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik		
	1 Paket Nudeln	2 Pakete Nudeln	_____ 5 _____ Pakete Nudeln
	2 Euro	_____ 4 _____ Euro	10 Euro

Teilaufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II

Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen (3.2.b)

10.3.1 Aufgabenbezogener Kommentar

Alle Aufgaben dieses Abschnitts enthalten kontextgebunden eine proportionale Zuordnung. Für den proportionalen Zusammenhang gilt grob formuliert je mehr..., desto mehr..., wobei es einen multiplikativen Faktor für diese Veränderung gibt, z. B. wenn das eine zweimal so viel ist, dann ist auch das andere zweimal so viel. In den Aufgabenstellungen werden die Idee der Zuordnung und die Idee der Veränderung in verschiedenen Schwierigkeitsgraden thematisiert.

Das Lösen der Aufgaben kann **durch Vervielfachen** (Aufgabe 26 in Testheft B, Aufgabe 28 in Testheft B und Aufgabe 24 in Testheft C), **durch Aufteilen** (Aufgabe 29 in Testheft B und Aufgabe 28 in Testheft C) oder **durch die Nutzung des Prinzips des Dreisatzes** (Aufgabe 33 in Testheft B und Aufgabe 30 in Testheft C) erfolgen. Die **Aufgaben in Tabellenform** (Aufgabe 30 in Testheft B, Aufgabe 26 in Testheft C und Aufgabe 31 in Testheft C) können auch über das **Vervielfachen** bzw. **Teilen** gelöst werden. Darüber hinaus sollen Lösungen begründet und mit Rabatten verglichen werden (Aufgabe 33 in Testheft C und 14 in Testheft C).

Lösen der Anwendungssituationen durch Vervielfachen

In der Aufgabenstellung der Aufgaben 3 in Testheft A1 und Aufgabe 28 in Testheft B und der Aufgabe 24 in Testheft C wird jeweils der Menge „eins“ (ein Brötchen, ein Kind, eine Eiskugel) der Preis bzw. die Anzahl an Objekten zugeordnet.

z. B.	ein Brötchen	→	Preis
	ein Kind	→	Anzahl der Steine
	eine Eiskugel	→	Preis

Für die Lösung der Aufgaben muss passend zum Vielfachen von „eins“ auch der zugeordnete Preis bzw. die zugeordnete Anzahl von Objekten vervielfacht werden. Die fehlenden Werte können somit direkt durch Vervielfachen berechnet werden.

drei Brötchen	→	Preis von drei Brötchen
elf Kinder	→	Anzahl der Kugel für 11 Kinder
drei Eiskugeln	→	Preis für drei Kugeln

Für das korrekte Lösen der Aufgaben ist es notwendig, dass die Schüler*innen die Abhängigkeit der einen Größe (z. B. der Warenmenge) von der anderen Größe (z. B. dem Preis) erkannt haben. Außerdem sind sichere Operationsvorstellungen sowie die Beherrschung des kleinen 1x1 für die Lösung der Aufgaben notwendig.

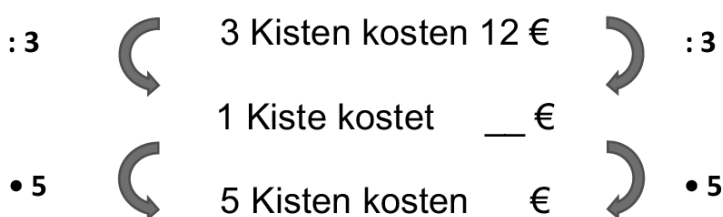
Lösen der Anwendungssituationen durch Aufteilen

Aufgabe 29 in Testheft B und Aufgabe 28 in Testheft C lassen sich durch Aufteilen einer genannten Menge (hier 24 bzw. 18) in kleinere Teilmengen von jeweils gleichvielen Elementen (4 bzw. 2) lösen, wobei die Größe der Teilmengen vorgegeben ist. Dazu braucht man entweder eine sichere Operationsvorstellung der Division durch Aufteilen, sowie die Beherrschung der Division/Multiplikation oder aber eine mentale Vorstellung der Handlung an sich (z. B. Knüpfen eines

Armbands mit 4 cm Länge am Tag), um dann die Anzahl der Teilmengen additiv auf die angegebene Menge hochzurechnen oder entsprechend von der Gesamtmenge zu subtrahieren.

Lösen der Anwendungssituationen durch Nutzen des Prinzips des Dreisatzes

Bei den Aufgaben 7 in Testheft C und Aufgabe 33 in Testheft B handelt es sich um Sachaufgaben, die Situationen mit funktionalen Beziehungen beschreiben. Es soll von dem Preis für 2 bzw. 3 gleichartige Artikel auf die Preise für 5 dieser Artikel geschlossen werden. Daher ist es nicht möglich von einem Einzelpreis bzw. unmittelbar vom gegebenen Preis auf den Preis für 5 Artikel zu schließen. Es ist sinnvoll zunächst den Einzelpreis zu berechnen, um diesen dann vervielfachen zu können. Selbstverständlich sollen die Schüler*innen hier nicht den „klassischen“ Dreisatz nutzen, dieses Prinzip nutzen sie aber, sobald sie einen Preis ermitteln (zum Beispiel den Einzelpreis), mit dem sie dann weiterrechnen können (indem sie ihn zum Beispiel vervielfachen). Das genutzte Prinzip des Dreisatzes kann schematisch wie folgt nachvollzogen werden:



Proportionale Zuordnungen in Tabellenform

In der Aufgabe 30 in Testheft B und in den Aufgaben 3 und 8 in Testheft C werden proportionale Zuordnungen in Tabellen dargestellt (→ Darstellen). Diese dienen dazu, eine Vielzahl an Daten übersichtlich darzustellen. Durch die Benennung der Kopfzeile und der Randspalte werden die Beziehungen zwischen den Zahlen- und Größenangaben deutlich gemacht. Zum Berechnen der einzelnen Werte in der Tabelle sind sichere Operationsvorstellungen sowie die Beherrschung des kleinen 1x1 und dessen Umkehrung notwendig.

Die Aufgaben stellen unterschiedliche Anforderungen an die Schüler*innen.

In Aufgabe 30 in Testheft B wird in einem einleitenden Satz die Sachsituation erklärt. Die Kopfzeile und die Randspalte sind gegeben. Die Schüler*innen müssen den mathematischen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Packungen und der Anzahl der Schokoriegel herstellen, wobei die Anzahl der Packungen nicht kontinuierlich steigt. Der Preis einer Packung ist gegeben.

In Aufgabe 31 in Testheft C wird die Sachsituation nicht schriftlich erläutert. Die Schüler*innen erschließen sich den Sachverhalt aus der ersten Spalte (Anzahl der Eier – Preis in €). Um die fehlenden Werte ermitteln zu können, sind unterschiedliche Strategien möglich:

- Die Schüler*innen ermitteln den Preis eines Eis, indem sie den Preis von zwei Eiern halbieren (oder den von 5 Eiern durch 5 teilen).
- Der Preis von 3 und 4 Eiern kann durch Addition (je + 0,40 €) ermittelt werden.
- Die Schüler*innen ermitteln den Preis eines Eis und berechnen anschließend den Preis von 3 bzw. 4 Eiern durch Abziehen von jeweils 0,40 € vom Wert des Preises für 5 Eier.
- Die Lücken können auch gefüllt werden, ohne den Bezug zu den 2,00 € herzustellen: Es wird zunächst der Preis eines Eis ermittelt. Der Preis für 3 Eier ergibt sich aus der Addition der Preise für 1 und 2 Eier. Der Preis für 4 Eier kann über das Verdoppeln des Preises für 2 Eier ermittelt werden.

Voraussetzung für die Lösung dieser Aufgabe ist das Verstehen und Anwenden der Kommaschreibweise bei Geld.

In Aufgabe 26 in Testheft C gibt es im eigentlichen Sinne keine Kopfzeile und keine Randzeile. Zudem wird die Sachsituation nicht schriftlich erläutert. Während der Preis in der zweiten Spalte durch wiederholende Addition bzw. Multiplikation ermittelt werden kann, muss in der 3. Spalte die Anzahl der Pakete durch Division (Gesamtpreis 10 € aufgeteilt in Einheiten zu je 2 €) bzw. wiederholte Subtraktion ($10\text{ €} - 2\text{ €} - 2\text{ €} - 2\text{ €} - 2\text{ €} - 2\text{ €}$) errechnet werden. Eine weitere Möglichkeit, um auf die Anzahl der Pakete für 10 € zu kommen, ist das Aufsummieren (oder Multiplizieren) der Geldbeträge für 1 oder 2 Pakete ($4\text{ €} + 4\text{ €} + 2\text{ €} = 10\text{ €}$ entspricht 2 Pakete + 2 Pakete + 1 Paket = 5 Pakete).

Lösungen begründen

Die recht anspruchsvolle Aufgabe 33 in Testheft C enthält Informationen, die neben der Beschreibung der Sachsituation auch in einer Preisliste zu finden sind. Es handelt sich um eine mehrschrittige, problemhaltige Aufgabe. Dabei müssen Lösungswege gefunden und miteinander verglichen werden. Das Einbeziehen der preiswerteren 5er-Karte erfordert das Aufteilen der Anzahl der Kinder, um so den günstigsten Preis zu berechnen. Der Preis von 23 Einzelkarten muss berechnet und mit dem Preis verglichen werden, der durch Einbeziehen der 5er-Karten zustande kommt. Dabei müssen die Kinder erkennen, dass vier 5er-Karten plus drei Einzelkarten genau 42 € ergibt und dies als Begründung angeben.

Der Kern der Aufgabe 37 in Testheft C ist der Lebenswelt der Kinder entnommen. Die Kinder müssen zu einer Aussage Stellung beziehen und ihre Meinung begründen. Die relevanten Angaben (pro Woche werden 7 Wochen lang 3 € gespart) müssen miteinander multipliziert werden und das Ergebnis mit dem Preis des Spiels verglichen werden. Als Begründung muss angegeben werden, dass die erhaltenen 21 € nicht ausreichen, weil das Spiel teurer ist bzw. dass noch 2 € fehlen oder, dass sie 8 Wochen sparen müsste, um das Spiel kaufen zu können, da sie dann 24 € gespart hätte und das ausreichend ist.

10.3.2 Mögliche Schwierigkeiten

Aufgabe 30 in Testheft B

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:										
<table><tr><td>Anzahl der Packungen</td><td>1</td><td>3</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>Anzahl der Schokoriegel</td><td>4</td><td><u>8</u></td><td><u>12</u></td><td><u>16</u></td></tr></table>	Anzahl der Packungen	1	3	7	9	Anzahl der Schokoriegel	4	<u>8</u>	<u>12</u>	<u>16</u>	Hier wird nicht berücksichtigt, dass die Anzahl der Packungen in der Tabelle nicht kontinuierlich steigt.
Anzahl der Packungen	1	3	7	9							
Anzahl der Schokoriegel	4	<u>8</u>	<u>12</u>	<u>16</u>							
<table><tr><td>Anzahl der Packungen</td><td>1</td><td>3</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>Anzahl der Schokoriegel</td><td>4</td><td><u>12</u></td><td><u>21</u></td><td><u>27</u></td></tr></table>	Anzahl der Packungen	1	3	7	9	Anzahl der Schokoriegel	4	<u>12</u>	<u>21</u>	<u>27</u>	Der erste Wert wird richtig ermittelt. Bei der Ermittlung der anderen Werte wird fälschlicherweise mit 3 statt mit 4 multipliziert.
Anzahl der Packungen	1	3	7	9							
Anzahl der Schokoriegel	4	<u>12</u>	<u>21</u>	<u>27</u>							
<table><tr><td>Anzahl der Packungen</td><td>1</td><td>3</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>Anzahl der Schokoriegel</td><td>4</td><td><u>6</u></td><td><u>9</u></td><td><u>13</u></td></tr></table>	Anzahl der Packungen	1	3	7	9	Anzahl der Schokoriegel	4	<u>6</u>	<u>9</u>	<u>13</u>	Hier wird vermutlich kein Bezug zur Sachsituation hergestellt. Die erste Zeile wird als arithmetische Musterfolge gesehen, die in der zweiten Reihe nach einer selbst gewählten Regel ergänzt werden muss (+ 2, + 3, + 4).
Anzahl der Packungen	1	3	7	9							
Anzahl der Schokoriegel	4	<u>6</u>	<u>9</u>	<u>13</u>							

Aufgabe 31 in Testheft C

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:												
<table><tr><td>Anzahl Eier</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>Preis (€)</td><td><u>40</u></td><td>0,80</td><td><u>1,20</u></td><td><u>160</u></td><td>2,00</td></tr></table>	Anzahl Eier	1	2	3	4	5	Preis (€)	<u>40</u>	0,80	<u>1,20</u>	<u>160</u>	2,00	Das Kind wendet die Kommaschreibweise nicht richtig an.
Anzahl Eier	1	2	3	4	5								
Preis (€)	<u>40</u>	0,80	<u>1,20</u>	<u>160</u>	2,00								
<table><tr><td>Anzahl Eier</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>Preis (€)</td><td><u>50</u>^{0,50}</td><td>0,80</td><td><u>1,00</u></td><td><u>1,50</u></td><td>2,00</td></tr></table>	Anzahl Eier	1	2	3	4	5	Preis (€)	<u>50</u> ^{0,50}	0,80	<u>1,00</u>	<u>1,50</u>	2,00	Das Kind bestimmt den Preis eines Eis falsch, beachtet bei der Ermittlung der beiden anderen Werte die bereits eingetragenen Werte nicht mehr.
Anzahl Eier	1	2	3	4	5								
Preis (€)	<u>50</u> ^{0,50}	0,80	<u>1,00</u>	<u>1,50</u>	2,00								

Aufgabe 26 in Testheft C

Das Berechnen von Preisen (Multiplikation) entspricht im Gegensatz zum Berechnen der Anzahl der Pakete (Division) eher den Alltagserfahrungen der Kinder. Schwierigkeiten können auftreten, wenn kein gesichertes Operationsverständnis der Division gegeben ist, bzw. dann, wenn der Wechsel der Operation im Aufgabenformat nicht erkannt wird.

1 Paket Nudeln	2 Pakete Nudeln	<u>3</u> Pakete Nudeln
2 Euro	<u>4</u> Euro	10 Euro

Der Preis wird richtig ermittelt (zweite Spalte). Die Anzahl der Pakete wird nicht mit dem Preis in Beziehung gesetzt (dritte Spalte). Die Anzahl wird kontinuierlich weiter gezählt.

1 Paket Nudeln	2 Pakete Nudeln	<u>8</u> Pakete Nudeln
2 Euro	<u>4</u> Euro	10 Euro

$2+2=4+2=6+2=8+2=10$

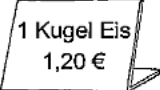
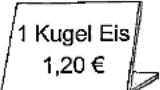
Das Kind errechnet den Preis 10 € - schrittweise richtig (Rechenweg unter der Tabelle), schließt jedoch nicht korrekt auf die Anzahl der Pakete (5 mal 2 €).

Aufgabe 26 in Testheft C

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
Ein Brötchen kostet 25 Cent. Wie viel muss Lisa für 3 Brötchen bezahlen? Kreuze an. ☒ 25 ct ☐ 28 ct ☐ 55 ct ☐ 75 ct	Der Preis aus der Aufgabenstellung wurde angekreuzt. Die Notwendigkeit der Multiplikation wurde möglicherweise nicht erkannt.
Ein Brötchen kostet 25 Cent. Wie viel muss Lisa für 3 Brötchen bezahlen? Kreuze an. ☐ 25 ct ☐ 28 ct ☒ 55 ct ☐ 75 ct	Der Preis von 25 ct wurde nicht korrekt vervielfacht.
Ein Brötchen kostet 25 Cent. Wie viel muss Lisa für 3 Brötchen bezahlen? Kreuze an. ☐ 25 ct ☒ 28 ct ☐ 55 ct ☐ 75 ct	Die Zahlen, die in der Aufgabe vorgegeben waren, wurden addiert. Ggfs. fehlt ein sicheres Operationsverständnis.

Aufgabe 28 in Testheft B

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
Bei einem Spiel bekommt jedes Kind 3 Steine. Wie viele Steine braucht man für 11 Kinder? <u>3</u>	Die Anzahl der Steine wurde aus der Aufgabenstellung übernommen und nicht multipliziert.
Bei einem Spiel bekommt jedes Kind 3 Steine. Wie viele Steine braucht man für 11 Kinder? <u>8</u>	Die falsche Rechenoperation wurde angewendet. Hier wurde subtrahiert.
Bei einem Spiel bekommt jedes Kind 3 Steine. Wie viele Steine braucht man für 11 Kinder? <u>14</u>	Die falsche Rechenoperation wurde angewendet. Hier wurde addiert.
Bei einem Spiel bekommt jedes Kind 3 Steine. Wie viele Steine braucht man für 11 Kinder? <u>32</u>	Bei diesem Fehler wurde vermutlich einen Rechenfehler beim Multiplizieren gemacht.

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
 Ergänze. a) Lale kauft 3 Kugeln und bezahlt <u>3,40 €</u>.	Die Euro wurden korrekt vervielfacht. Bei der Berechnung der Cent wurde ein Rechenfehler gemacht.
 Ergänze. a) Lale kauft 3 Kugeln und bezahlt <u>3,20</u>.	Es wurden nur die Euro vervielfacht. Die Antwort enthält keine Einheit.
 Ergänze. a) Lale kauft 3 Kugeln und bezahlt <u>360</u>.	Der Preis wurde korrekt vervielfacht aber das Ergebnis enthält keine Einheit.

Aufgabe 28 in Testheft C

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
Maxi hat ein Armband geknüpft. Es ist 24 cm lang. Jeden Tag knüpft sie genau 4 cm. Wie viele Tage hat sie gebraucht? Sie hat <u>28</u> Tage gebraucht. Sie hat <u>20</u> Tage gebraucht. Sie hat <u>916</u> Tage gebraucht.	Die genannten Zahlen werden verrechnet – allerdings mit der falschen Rechenoperation. In den Fällen links wurden die Zahlen addiert, subtrahiert oder multipliziert.
Sie hat <u>5</u> Tage gebraucht.	Unsicherheiten bei der Multiplikation/Division. Möglich ist auch der Gedanke: $5 \cdot 4 = 20$ und einmal 4 ist in der Aufgabe schon genannt. Das sind zusammen 24; bzw. 4 cm wurden schon geknüpft, dann müssen nur noch $20 : 4 = 5$ gerechnet werden.

Aufgabe 29 in Testheft B

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
 Wenn Ira jede Woche 2 € spart, dann kann sie das Spiel in <u>16</u> Wochen kaufen.	Die genannten Zahlen werden verrechnet – allerdings mit der falschen Operation. In den Fällen links wurden die Zahlen subtrahiert bzw. multipliziert.
 Wenn Ira jede Woche 2 € spart, dann kann sie das Spiel in <u>36</u> Wochen kaufen.	
 Wenn Ira jede Woche 2 € spart, dann kann sie das Spiel in <u>18</u> Wochen kaufen.	Eine Zahl wird aus der Aufgabenstellung übernommen. Es ist zu vermuten, dass kein sicheres Operationsverständnis vorhanden ist.

Das Erlesen der Sachaufgabe (sinnerfassendes Lesen) kann trotz der geringen Textmenge eine Schwierigkeit darstellen. Wird die Aufgabenstellung nur oberflächlich gelesen, werden Kinder verleitet, nur mit dem gegebenen Zahlenmaterial zu hantieren. Das sichere Anwenden des kleinen 1x1 ist notwendig. Bei Aufgabe 33 in Testheft B wird zudem ein Umrechnen von Eurobeträgen in die Untereinheit Cent mit Kommaschreibweise gefordert.

Aufgabe 30 in Testheft C

Die fehlerhaften Schüler*innenlösungen zeigen auf, dass es einigen Kindern nicht gelingt, die Sachsituationen zu erfassen und in ein korrektes mathematisches Modell zu übertragen (→ Modellieren). Darüber hinaus wird die gefundene Lösung oftmals nicht wieder zurück auf die Sachsituation bezogen, um das Ergebnis kritisch zu reflektieren: Das Ergebnis müsste durch 5 teilbar sein (Validierung).

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
3 Kisten Limonade kosten 12 €. Wie viel kosten 5 Kisten Limonade? <u>14</u> €.	Der Sachzusammenhang wurde nicht passend in ein mathematisches Modell übersetzt: Zu dem Preis für 3 Kisten wurde 2 addiert - ggfs., weil 5 Kisten 2 Kisten mehr als 3 sind.
3 Kisten Limonade kosten 12 €. Wie viel kosten 5 Kisten Limonade? <u>30</u> €.	Hier wurde möglicherweise davon ausgegangen, dass 2 Kisten 12 € kosten und es wurde mit dem Wert 6 € weitergearbeitet.
3 Kisten Limonade kosten 12 €. Wie viel kosten 5 Kisten Limonade? <u>16</u> €.	Dieses Ergebnis könnte eine Teilleistung zeigen. Das Kind hat ggfs. von 3 Kisten ausgehend den Preis 4 € pro Kiste ermittelt und sich dann ggf. verrechnet oder die Fragestellung auf 4 Kisten bezogen. $12 : 3 = 4$ und $4 \cdot 4 = 16$
3 Kisten Limonade kosten 12 €. Wie viel kosten 5 Kisten Limonade? <u>36</u> €. 3 Kisten Limonade kosten 12 €. Wie viel kosten 5 Kisten Limonade? <u>60</u> €.	Es wurde mit dem gegebenen Zahlenmaterial gerechnet ohne die Situation zu berücksichtigen. Hier $3 \cdot 12$ Hier $5 \cdot 12$

Aufgabe 33 in Testheft B

Es wird mit dem vorhandenen Zahlenmaterial gerechnet, ohne die Sachsituationen zu erfassen.	
Safi bastelt Karten. Das Material für 2 Karten kostet 1 €. Das Material für 5 Karten kostet <u>3 €</u>. Safi bastelt Karten. Das Material für 2 Karten kostet 1 €. Das Material für 5 Karten kostet <u>6 €</u>. Safi bastelt Karten. Das Material für 2 Karten kostet 1 €. Das Material für 5 Karten kostet <u>5 €</u>.	2 + 1 5 + 1 5 • 1
Fehler trotz Erfassens der Sachsituation.	
Safi bastelt Karten. Das Material für 2 Karten kostet 1 €. Das Material für 5 Karten kostet <u>2,50</u>.	Hier wurde die Einheit vergessen.
Safi bastelt Karten. Das Material für 2 Karten kostet 1 €. Das Material für 5 Karten kostet <u>2,05 €</u>.	Evtl. mangelt es an der am Verständnis für die Einheiten der Größe Geld, bzw. der Kommaschreibweise.

Aufgabe 33 in Testheft C

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
Die Klasse 3a besucht das Schwimmbad. Eintrittspreise für Kinder Einzelkarte 2 € 5er-Karte 9 € In der Klasse sind 23 Kinder. Carolin sagt: „Für die Kinder unserer Klasse müssen wir 42 € bezahlen.“ Hat Carolin recht? Kreuze an. ☒ ja ☐ nein Begründe. <u>carolin hat richtig gerechnet.</u> Begründe. <u>weil 2 x 20 23 Kinder sind.</u>	Hier liegt die Schwierigkeit in der Begründung: Statt einer Begründung wurde die Behauptung bzw. werden Angaben aus der Aufgabenstellung wiederholt.
Hat Carolin recht? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein Begründe. <u>Das ist zu wenig Geld weil sie 46 € bezahlen muss</u>	Hier wurde der Eintrittspreis für die Klasse aus Einzelkarten errechnet. Die 5er-Karte wurde nicht berücksichtigt.

Begründe. ☒ Weil $23 \cdot 2 = 46$ und nicht 42 deswegen hat er unrecht:	
Hat Carolin recht? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein Begründe. ☒ Wenn man $2 \cdot 9$ rechnet kommt 18 raus und nochmal rechen gelst ja nicht und da zwei auch nichts Hat Carolin recht? Kreuze an. ☒ ja ☐ nein Begründe. ☒ Sie sind $62 - 9 + 2 = 33$.	Hier wurde mit vorhandenem Zahlenmaterial gerechnet, der Inhalt der Aufgabe wurde nicht erfasst.
Hat Carolin recht? Kreuze an. ☒ ja ☒ nein Begründe. ☒ Weil sie 2 mal die 5er-Karte und 3 mal die Einzelkarte bezahlen müssen. Hat Carolin recht? Kreuze an. ☒ ja ☐ nein Begründe. ☒ $9 + 9 + 9 + 9$ und immer so weiter sind es dann 42€ Begründe. ☒ Wenn sie die billigste Version nehmen ja. $4 \cdot 5 = 20$ $3 \cdot 2 = 6$ $3 + 20 = 23$	Hier wurde erkannt, dass der Kauf von 5er- und Einzelkarten zur richtigen Lösung führt. Allerdings wird keine vollständige und mathematisch korrekte Begründung gegeben.

Aufgabe 37 in Testheft C

Fehlerhafte Schüler*innenlösungen:	Mögliche Erklärungen:
Hat Sabrina recht? Kreuze an. ☒ ja ☒ nein Begründe. <u>Ja</u> nein weil sie weil sie genug gespart hat Begründe. nein weil sie recht hat	Hier wurde die funktionale Beziehung nicht genutzt und statt einer Begründung wurde eine Behauptung aufgestellt.
Hat Sabrina recht? Kreuze an. ☒ ja ☐ nein Begründe. nein 83€ 7 Wochen lang sind ² 13€. Begründe. nein weil sie dann schon über 13€ hat	Auf Grund einer fehlerhaften Berechnung wurde die falsche Entscheidung getroffen.
Hat Sabrina recht? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein Begründe. nein Sabrina fehlt noch 4€ das kann sie ihr Spiel kaufen. Begründe. nein Weil 23 ist eine ungerichte Zahl deswegen kommt Sabina nicht genau auf 23€. Begründe. nein weil in 7 Wochen ist Sonntag und alles ist geschlossen.	Hier werden keine vollständigen und mathematisch korrekten Begründungen gegeben.
Hat Sabrina recht? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein Begründe. nein Sie liegt falsch weil 3·7 oder 7·321 ist. Das heisst sie hätte in 7 Wochen 21€. Begründe. nein Sie spart in 7 Wochen 21€.	Der am häufigsten auftretende Fehler ist jedoch eine unvollständige Begründung, bei der der Bezug zu den 23 € fehlte.

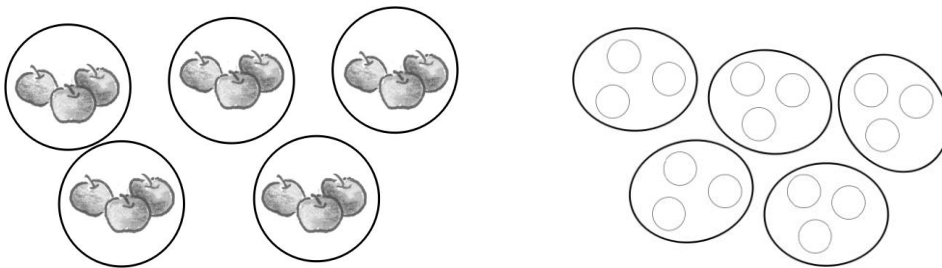
10.3.3 Anregungen für den Unterricht

Grundsituationen des Aufteilens

Das Zerlegen einer Grundmenge in Teilmengen vorgegebener Größen heißt Aufteilen. Um das dahinterliegende Prinzip zu verstehen, lässt sich der Vorgang an sich am besten handelnd erfahren.

Ein Spiel für Sport oder eine Bewegungsstunde ist das sog. Molekülspiel, bei der sich die Klasse auf Zuruf der Lehrerin oder des Lehrers in Gruppen mit angegebener Anzahl Schüler*innen aufteilen muss - für den Anfang ohne Rest. Dazu müssen sich die Schüler*innen untereinander absprechen (→ Kommunizieren). Wichtig beim Molekülspiel ist, dass nach jeder Spielrunde der Zusammenhang zwischen der Spielsituation und der mathematischen Idee bzw. der mathematischen Notation erfolgt (→ Kommunizieren, Darstellen).

Handlungserfahrungen im Unterricht können hergestellt werden, indem z. B. 15 Äpfel auf Teller zu je 3 Äpfeln aufgeteilt werden sollen (→ Modellieren). Dieses kann dann schriftlich festgehalten werden, z. B. durch mit Kreisen dargestellte Äpfel, die mit einem Stift eingekreist werden (→ Darstellen).



Weitere Möglichkeiten sind Aufteilen von Muggelsteinen, Bällen, Büroklammern, Legosteinen u. Ä. in Teilmengen vorgegebener Größen in Netze, Dosen, Schachteln usw. Wird die Aufgabe protokolliert, wie „15 Äpfel werden aufgeteilt auf Teller mit immer 3 Äpfeln. Wie viele Teller werden benötigt?“, lässt sich daraus einfacher die dazu passende Rechenaufgabe notieren: $15 : 3 = 5$. Im nächsten Schritt werden Äpfel, Birnen, Steine usw. nur noch bildlich dargestellt und die angegebenen Teilmengen umkreist.

Ein weiterer Weg zur Lösung einer Sachaufgabe mit proportionalen Zusammenhängen, die über ein Aufteilen oder auch Vervielfachen gelöst werden können, ist das Aufmalen von Skizzen (→ Darstellen). Soll ein Armband von 24 cm Länge geknüpft werden und pro Tag schafft ein Kind es, 4 cm zu knüpfen, kann man Striche aneinanderreihen, bei dem ein Strich für 4 cm pro Tag steht, bis insgesamt 24 cm erreicht sind. Die tatsächliche Länge der Striche spielt dabei keine Rolle.

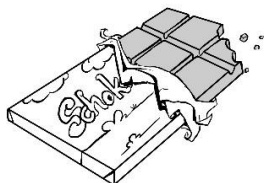


Als Differenzierung bietet sich zur Erschließung einer in Textform gegebenen Sachsituation das Nachspielen der Situation an. Zur Einordnung der gegebenen Informationen kann das Erstellen einer Tabelle helfen.

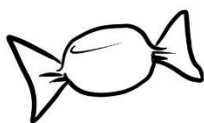
Proportionale Zuordnungen

Im Unterricht bietet es sich an, proportionale Zuordnungen in Einkaufssituationen zu erschließen, da die Schüler*innen dazu in der Regel über Alltagserfahrungen verfügen. Außerdem lassen sich Einkaufssituationen gut nachspielen.

Zunächst geht es darum, die Zuordnung in den kontextgebundenen Aufgabenstellungen zu erfassen. Es wird also dem zu kaufenden Gegenstand der Preis zugeordnet.



2 €

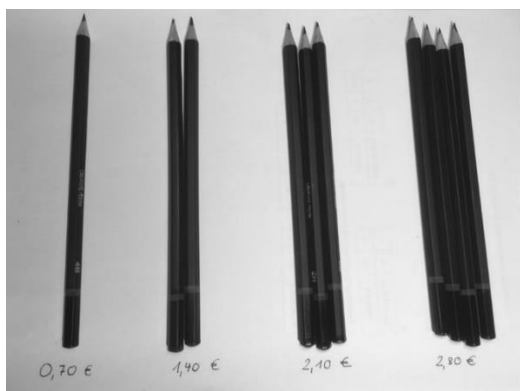
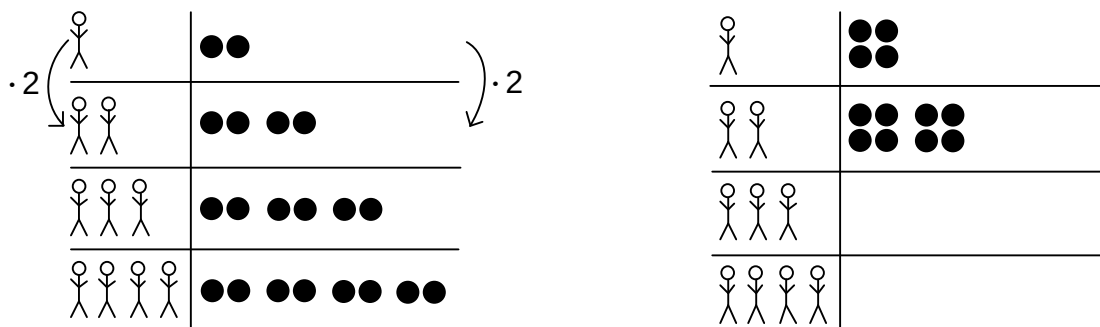


25 ct

Nachfolgend wird die Anzahl der zu kaufenden Gegenstände verändert und der zu zahlende Betrag durch Vervielfachen ermittelt. An dieser Stelle wird mit den Schüler*innen diskutiert, warum die Multiplikation für die Berechnung der Ergebnisse eine geeignete Rechenoperation ist. Gemeinsam kann nun überlegt werden, welchen Betrag man für 10 Tafeln Schokolade bezahlen muss und wie man diesen Wert ermittelt kann (→ Kommunizieren).

		$1 \cdot 2 \text{ €}$
		$2 \cdot 2 \text{ €}$
		$3 \cdot 2 \text{ €}$
		$4 \cdot 2 \text{ €}$
		$_\cdot_\text{ €}$

Im weiteren Verlauf können die Überlegungen zur proportionalen Zuordnung und Veränderung auch auf andere Situationen übertragen werden. Sinnvoll ist es, passende Darstellungen und Skizzen zu erstellen, um sowohl die Zuordnung als auch die Veränderung bildlich sichtbar zu machen. Skizzen sollen von den Schüler*innen gedeutet und beschrieben werden. (→ Darstellen, → Kommunizieren)



Copyright Foto: IQB

Anzahl der Stifte	1	2	3	4			
Preis in €	0,70 €	1,40 €					

Komplexer wird die Aufgabenstellung, wenn die Anzahl der gegebenen Objekte nicht konstant steigt.

Anzahl der Flaschen	1	2	3	5	8	10
Preis in €	1,20 €					12 €

Dabei können verschiedene Strategien entwickelt und diskutiert werden, wie der Preis ermittelt werden kann, z. B.

- Ich rechne $2 \cdot 1,20 \text{ €}$; $3 \cdot 1,20 \text{ €}$; $5 \cdot 1,20 \text{ €}$ und $8 \cdot 1,20 \text{ €}$
- Wenn 10 Flaschen 12 € kosten, dann kosten 5 Flaschen die Hälfte. Das sind 6 €.
- Wenn 2 Flaschen 2,40 € kosten und eine Flasche 1,20 € kostet, dann kosten 3 Flaschen 3,60 €.
- Wenn 5 Flaschen 6 € und 3 Flaschen 3,60 € kosten, dann kosten 8 Flaschen 9,60 €.
- (→ Argumentieren, Kommunizieren)

Das Verständnis der proportionalen Zuordnung kann durch die Rückübertragung der Darstellungsform in einen Sachkontext gefördert werden, z. B.

Finde eine Rechengeschichte zu dieser Tabelle. (→ Argumentieren, Kommunizieren)

Anzahl ...	1	4	
Preis in €			

Komplexer wird die Tabelle, wenn mehr als zwei Werte in der Tabelle berücksichtigt werden, z. B. in drei Tüten sind 15 Brötchen. Sieben Tüten kostet 14 €. Finde heraus wie viel vier Brötchen kosten. Nutze die Tabelle. Auch hier können unterschiedliche Strategien genutzt und anschließend verglichen werden (→ Argumentieren, Kommunizieren).

Anzahl der Tüten	Anzahl der Brötchen	Preis in €
		...

Tabellen können auch genutzt werden, um unterschiedliche Angebote zu vergleichen. Im folgenden Beispiel können die Schüler*innen die Tabellen individuell nutzen und ausfüllen und ihre Vorgehensweise anschließend diskutieren (→ Darstellen, Argumentieren, Kommunizieren). Dabei kann auch thematisiert werden, dass Tabellen nicht in jedem Fall die einfachste Möglichkeit des Vergleichs sind (zum Beispiel beim Vergleich des Angebots von Bäckerei Schneider und Bäckerei Maier).

Welches Angebot ist am günstigsten? Nutze die Tabellen.

Bäckerei Schneider
10 Brötchen kosten

Bäckerei Maier
5 Brötchen kosten

Bäckerei Ormaz
8 Brötchen kosten

Bäckerei Schneider

Anzahl der Brötchen	10			
Preis in €	6 €			

Bäckerei Maier

Anzahl der Brötchen	5			
Preis in €	3,50 €			

Bäckerei Ormaz

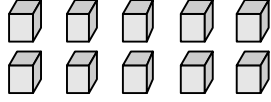
Anzahl der Brötchen	8			
Preis in €	4,40 €			

Komplexer werden Tabellen, wenn nicht nur in einer Zeile, sondern in mehreren Zellen Werte fehlen. So wird das Ergebnis nicht nur über die Multiplikation oder die Addition gelöst, sondern auch über die Division bzw. Subtraktion.

Anzahl der Bücher	1	2	5		10
Preis		14 €		56 €	

Das Zahlenmaterial soll zwar realistisch sein, jedoch können die Beträge so gewählt werden, dass das Ergebnis rechnerisch leicht zu lösen ist. Die Kompetenz, die mit Aufgaben dieser Art erreicht werden soll, ist das Verständnis funktionaler Beziehungen, nicht komplexe Rechenoperationen zu lösen.

Die Ermittlung der Werte kann handelnd oder zeichnerisch erfolgen.

			?	
?	14 €	?	56 €	?

Schwieriger sind Aufgaben, bei denen zu der Proportionalität noch weitere Werte zu berücksichtigen sind. Es könnte ein Grundpreis zu berücksichtigen sein oder, dass es ab einer bestimmten Menge Rabatt gibt.

Im Mathematikunterricht sollten ein kritischer Zahlenblick und ein kritischer Blick auf eigene Lösungen mit den Kindern geübt werden. Die Kinder sollen lernen, mathematische Lösungen zu reflektieren, auf die Ausgangssituation zu beziehen und zu hinterfragen. Die Frage „Kann das stimmen?“ trägt dazu bei, die Lösung als Antwort auf die Aufgabenstellung zu hinterfragen. Ist die Lösung plausibel, vom Zahlenmaterial passend und mit entsprechender Einheit versehen? So können Fehler vermieden werden.

Begründen

Lösungen von Begründungsaufgaben, in denen die Kinder schriftlich argumentieren, können eine wertvolle diagnostische Hilfe sein, weil sie Hinweise auf die Denkprozesse geben, die den Lösungsprozess begleiten. Unvollständige oder unklare Begründungen lassen sich zusätzlich im Gespräch mit den Kindern in der Klasse im Sinne von Teilleistungen würdigen und bieten gleichzeitig die Chance, mit den Kindern zu erarbeiten, wie eine schlüssige und stichhaltige Begründung formuliert sein muss (→ Kommunizieren).

Zunächst kann eine Veranschaulichung des Sachverhalts z. B. in einer Tabelle o. Ä. vorgenommen werden. Daraus lassen sich dann im Unterrichtsgespräch vollständige Begründungen formulieren.

- Was muss in der Antwort stehen, damit andere diesen Gedankengang nachvollziehen können? (→ Kommunizieren)
 - Welche Begründung ist für dich eine gute Begründung? Warum? (→ Argumentieren)
- Die Fehleranalyse hilft Kindern, vollständige Begründungen zu erkennen und auch selbst zu formulieren. Hierbei werden insbesondere prozessbezogene Kompetenzen (→ Argumentieren, Kommunizieren) gefordert bzw. gefördert:
- Diese Begründungen sind falsch. Erkennst du, welcher Fehler gemacht wurde? Versuche, ihn zu erklären.
 - siehe mögliche Schwierigkeiten bei Aufgabe 33 und 14 in Testheft C oder folgender Aufgabe (aus KERMIT 2016):

In der Klasse 3a sind 20 Kinder. Sie basteln Einladungen. Jede Gruppe mit 4 Kindern braucht 7 Bogen Papier. Die Lehrerin kauft dafür insgesamt 33 Bogen Papier.

a) Reicht das Papier? ☐ ja ☐ nein

b) Begründe.



Beispiele für falsche oder unvollständige Begründungen, die überprüft werden sollen:
„ja, weil die Lehrerin Recht hat“, „ja, denn $7 \cdot 4 = 28$ und das ist weniger als 33“
„nein, da 33 nicht durch 7 teilbar ist“, „nein, in jeder Gruppe sind 5 Kinder und $5 \cdot 7 = 35$ “

Literaturverzeichnis

- Franke, M. (2023). „Es gibt immer was Neues zu entdecken“. Kinder entdecken und beschreiben Muster und Strukturen in Zahlenrauten. *Grundschule Mathematik*, 76(1), 20-23. Hannover: Friedrich Verlag.
- Landesinstitut für Schulentwicklung. (2016). *SINUS Box 2: Entdeckungen an der Zahlenraute. Arithmetische und geometrische Muster und Strukturen erforschen. Klasse 1-4*. Stuttgart: Landesbildungsserver Baden-Württemberg.
- Radatz, H., & Schipper, W. (1983). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel Verlag.
- Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht* (1. Auflage). Stuttgart: Klett.

Webseiten

- <https://dlgs.uni-potsdam.de/apps/klipp-klapp/> (Stand: 14.02.2024)
- http://www.igb.hu-berlin.de/bista/dateien/Mathe_primar.pdf (Stand: 14.02.2024)
- <https://www.igb.hu-berlin.de/bista/WeiterentwicklungBiSta/> (Stand: 14.02.2024)
- <https://www.igb.hu-berlin.de/vera/aufgaben/> (Stand: 14.02.2024)
- <https://www.pikas-kompakt.dzlm.de/> (Stand: 14.02.2024)
- <https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/grundschule/sinus-grundschule/sinusboxen/zahlenrauten> (Stand: 14.02.2024)

Anhang

Nummerierung der einzelnen Kompetenzen

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der KMK vom 15.10.2004⁴ sind die einzelnen Kompetenzen nicht durchnummeriert aufgelistet. Aus diesem Grunde findet sich zur Erleichterung der praktischen Arbeit mit dem Material in Teil III hier eine nummerierte Auflistung, die optional verwendet und separat ausgedruckt werden kann.

Ergänzung der allgemeinen mathematischen Kompetenz *Technische Grundfertigkeiten*

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der KMK vom 15.10.2004 ist die allgemeine mathematische Kompetenz *Technische Grundfertigkeiten* noch nicht enthalten. Eine inhaltlich ähnlich beschriebene allgemeine mathematische Kompetenz findet sich allerdings bereits bei den Bildungsstandards für den Sekundarbereich („Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“). Mittlerweile wurden im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik auch für den Primarbereich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der *Technischen Grundfertigkeiten* ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (vgl. Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ vom 29.10.2008 unter

http://www.igb.hu-berlin.de/bista/dateien/Mathe_primar.pdf.

Im Gegensatz zu den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen ist diese Dimension allerdings dort nicht näher aufgeschlüsselt. Mit Bezug auf Winkelmann & Robitzsch (2009) lassen sich (analog zu den Standards für den Sekundarbereich) folgende Aspekte als technische Grundfertigkeiten subsumieren:

- Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen
- symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt
- mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen

Literatur

Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Beltz.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel.

⁴ Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich wurden 2004 verabschiedet und 2022 weiterentwickelt. Die bisher vorliegenden Kompetenzstufenmodelle, auf die sich das vorliegende didaktische Material bezieht, wurden auf Basis der Bildungsstandards von 2004 entwickelt. Mit der Normierung neu entwickelter Testaufgaben nach den Bildungsstandards von 2022 werden ab 2027 neue Kompetenzstufenmodelle vorliegen.

Katalog der allgemeinen mathematischen Kompetenzen	
Kennung	Beschreibung
A-0	Technische Grundfertigkeiten
	• Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen • symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt • mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen
A-1	Problemlösen
A-1.1	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden
A-1.2	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)
A-1.3	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen
A-2	Kommunizieren
A-2.1	eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren
A-2.2	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden
A-2.3	Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten
A-3	Argumentieren
A-3.1	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen
A-3.2	mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln
A-3.3	Begründungen suchen und nachvollziehen
A-4	Modellieren
A-4.1	Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen
A-4.2	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen
A-4.3	zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren
A-5	Darstellen
A-5.1	für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen
A-5.2	eine Darstellung in eine andere übertragen
A-5.3	Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten

Katalog der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen	
Kennung	Beschreibung
I-1	Zahlen und Operationen
I-1.1	Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen
I-1.1.a	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen
I-1.1.b	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen
I-1.1.c	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden)
I-1.2	Rechenoperationen verstehen und beherrschen
I-1.2.a	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen
I-1.2.b	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen
I-1.2.c	mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden
I-1.2.d	verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren
I-1.2.e	Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen
I-1.2.f	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden
I-1.2.g	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren
I-1.3	in Kontexten rechnen
I-1.3.a	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben
I-1.3.b	das Ergebnis auf Plausibilität prüfen
I-1.3.c	bei Sachaufgaben entscheiden, ob eine Überschlagsrechnung ausreicht oder ein genaues Ergebnis nötig ist
I-1.3.d	Sachaufgaben systematisch variieren
I-1.3.e	einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen
I-2	Raum und Form
I-2.1	sich im Raum orientieren
I-2.1.a	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen
I-2.1.b	räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten)
I-2.1.c	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen)
I-2.2	geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen
I-2.2.a	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen
I-2.2.b	Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen

I-2.2.c	Modelle von Körpern und ebenen Figuren herstellen und untersuchen (Bauen, Legen, Zerlegen, Zusammenfügen, Ausschneiden, Falten...)
I-2.2.d	Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen
I-2.3	Einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen
I-2.3.a	ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern)
I-2.3.b	Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen
I-2.3.c	symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln
I-2.4	Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen
I-2.4.a	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen
I-2.4.b	Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen
I-2.4.c	Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen
I-3	Muster und Strukturen
I-3.1	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen
I-3.1.a	strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen
I-3.1.b	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen
I-3.1.c	arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben
I-3.2	funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen
I-3.2.a	funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen
I-3.2.b	funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen
I-3.2.c	einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen
I-4	Größen und Messen
I-4.1	Größenvorstellungen besitzen
I-4.1.a	Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte kennen
I-4.1.b	Größen vergleichen, messen und schätzen
I-4.1.c	Repräsentanten für Standardeinheiten kennen, die im Alltag wichtig sind
I-4.1.d	Größenangaben in unterschiedlichen Schreibweisen darstellen (umwandeln)
I-4.1.e	im Alltag gebräuchliche einfache Bruchzahlen im Zusammenhang mit Größen kennen und verstehen
I-4.2	mit Größen in Sachsituationen umgehen
I-4.2.a	mit geeigneten Einheiten und unterschiedlichen Messgeräten sachgerecht messen
I-4.2.b	wichtige Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt zum Lösen von Sachproblemen heranziehen
I-4.2.c	in Sachsituationen angemessen mit Näherungswerten rechnen, dabei Größen begründet schätzen
I-4.2.d	Sachaufgaben mit Größen lösen
I-5	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit
I-5.1	Daten erfassen und darstellen

I-5.1.a	in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen
I-5.1.b	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen
I-5.2	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen
I-5.2.a	Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich)
I-5.2.b	Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen

Übersicht der Aufgabenmerkmale im Basismodul

Aufgabe	Leitidee ⁵	Allgemeine mathematische Kompetenzen ⁶	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁷	Kompetenzstufe
Aufgabe 1	Zahlen und Operationen	1.2	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a)	I	I
Aufgabe 2	Zahlen und Operationen	1.1	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a)	II	II
Aufgabe 3	Zahlen und Operationen	5.2	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a); Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b)	II	III
Aufgabe 4	Zahlen und Operationen	1.1	verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren (1.2.d)	II	V
Aufgabe 5	Zahlen und Operationen	1.3	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a); Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen (1.2.e)	II	IV
Aufgabe 6	Größen und Messen	5.2	mit geeigneten Einheiten und unterschiedlichen Messgeräten sachgerecht messen (4.2.a)	I	I
Aufgabe 7	Größen und Messen	1.3	Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte kennen (4.1.a)	II	II

⁵ L1 = Zahlen und Operationen, L2 = Raum und Form, L3 = Muster und Strukturen, L4 = Größen und Messen, L5 = Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

⁶ Siehe Anhang S. 2

⁷ AFB: Anforderungsbereich

I = Reproduzieren, II = Zusammenhänge herstellen, III = Verallgemeinern und Reflektieren

Aufgabe	Leitidee ⁵	Allgemeine mathematische Kompetenzen ⁶	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁷	Kompetenzstufe
Aufgabe 8	Größen und Messen	1.1	in Sachsituationen angemessen mit Näherungswerten rechnen, dabei Größen begründet schätzen (4.2.c)	II	III
Aufgabe 9	Größen und Messen	1.1; 1.3	wichtige Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt zum Lösen von Sachproblemen heranziehen (4.2.b)	II	V
Aufgabe 10	Größen und Messen	4.1	Größenangaben in unterschiedlichen Schreibweisen darstellen (umwandeln) (4.1.d)	II	IV
Aufgabe 11	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	4.1	in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen (5.1.a)	II	I
Aufgabe 12.1	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	4.1; 5.2	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)	II	III
Aufgabe 12.2	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	4.1	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)	I	I
Aufgabe 13	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	2.2	Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) (5.2.a)	II	V
Aufgabe 14	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	1.2	einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen (1.3.e)	II	IV
Aufgabe 15	Muster und Strukturen	1.1	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	I	I
Aufgabe 16	Muster und Strukturen	1.3	funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a)	II	II
Aufgabe 17	Muster und Strukturen	1.1; 1.2	funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen (3.2.b)	II	IV

Aufgabe	Leitidee ⁵	Allgemeine mathematische Kompetenzen ⁶	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB ⁷	Kompetenzstufe
Aufgabe 18	Muster und Strukturen	3.2	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	III	III
Aufgabe 19	Raum und Form	1.1	Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)	II	II
Aufgabe 20	Raum und Form	1.1	Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen (2.4.c)	I	II
Aufgabe 21.1	Raum und Form	1.1	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	III
Aufgabe 21.2	Raum und Form	1.1	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	III
Aufgabe 22	Raum und Form	2.2	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	II	V
Aufgabe 23	Raum und Form	3.2	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	IV

Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul A (*Raum und Form*, L2)

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenzstufe	Seite
Aufgabe 24 in TH A1	1	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren in der Umwelt wiedererkennen (2.2.b)	I	I	30
Aufgabe 25 in TH A1	2	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen (2.2.d); ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern) (2.3.a)	II	I	39
Aufgabe 26 in TH A1	3	Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten (5.3)	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	I	10
Aufgabe 27 in TH A1	4	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a)	II	I	14
Aufgabe 28 in TH A1	5	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen (2.4.b)	II	I	54
Aufgabe 29 in TH A1	6	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a); Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen (2.4.c)	II	II	56
Aufgabe 30 in TH A1	7	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	II	12

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenzstufe	Seite
Aufgabe 31 in TH A1	8	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen (2.2.d); Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)	II	II	37
Aufgabe 32.1 in TH A1	9.1	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	I	II	28
Aufgabe 32.2 in TH A1	9.2	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	I	II	28
Aufgabe 33 in TH A1	10	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	II	III	29
Aufgabe 34 in TH A1	11	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	III	11
Aufgabe 35 in TH A1	12	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3); Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen (2.4.a)	III	V	53
Aufgabe 36 in TH A1	13	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern) (2.3.a)	II	I	41

Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul B (*Raum und Form*, L2)

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenzstufe	Seite
Aufgabe 24 in TH B1	1	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten) (2.1.b)	II	II	14
Aufgabe 25 in TH B1	2	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern) (2.3.a)	II	I	41
Aufgabe 26.1 in TH B1	3.1	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	I	II	29
Aufgabe 26.2 in TH B1	3.2	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	I	III	29
Aufgabe 27 in TH B1	4	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Körper und ebene Figuren in der Umwelt wiedererkennen (2.2.b)	II	III	27
Aufgabe 28 in TH B1	5	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a); Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)	II	I	9
Aufgabe 29 in TH B1	6	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	IV	27

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenzstufe	Seite
Aufgabe 30 in TH B1	7	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)	räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten) (2.1.b); symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln (2.3.c); Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	II	IV	40
Aufgabe 31 in TH B1	8	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)	Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen (2.4.b); Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)	II	V	55
Aufgabe 32 in TH B1	9	für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen (5.1)	symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln (2.3.c); Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	II	V	38
Aufgabe 33 in TH B1	10	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)	Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen (2.4.c)	II	V	55
Aufgabe 34 in TH B1	11	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a)	II	IV	13
Aufgabe 35 in TH B1	12	Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten (5.3)	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	I	10

Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul A (Muster und Strukturen, L3)

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenzstufe	Seite
Aufgabe 24 in TH B	1	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	I	I	78
Aufgabe 25 in TH B	2	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	II	I	81
Aufgabe 26 in TH B	3	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen (3.2.c)	II	I	128
Aufgabe 27 in TH B	4	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b); arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)	II	I	108
Aufgabe 28 in TH B	5	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)	einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen (3.2.c)	II	I	128
Aufgabe 29 in TH B	6	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a); funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a)	II	II	130
Aufgabe 30 in TH B	7	Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit	funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen (3.2.b)	II	II	127

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenzstufe	Seite
		die relevanten Informationen entnehmen (4.1)				
Aufgabe 31 in TH B	8	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)	I	II	79
Aufgabe 32 in TH B	9	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)	III	III	78
Aufgabe 33 in TH B	10	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a); funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a)	II	III	129
Aufgabe 34 in TH B	11	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen (3.2.b)	II	III	76
Aufgabe 35 in TH B	12	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	II	IV	75
Aufgabe 36 in TH B	13	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	II	V	106

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenzstufe	Seite
		Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)				
Aufgabe 37.1 in TH B	14.1	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	II	II	81
Aufgabe 37.2 in TH B	14.2	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	II	III	81
Aufgabe 38 in TH B	15	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	II	II	77

Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul B (Muster und Strukturen, L3)

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenzstufe	Seite
Aufgabe 24 in TH C	1	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a); funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a)	II	I	132
Aufgabe 25 in TH C	2	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	II	I	80
Aufgabe 26 in TH C	3	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen (3.2.b)	II	II	132
Aufgabe 27 in TH C	4	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)	II	II	79
Aufgabe 28 in TH C	5	Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a); einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen (3.2.c)	II	II	127
Aufgabe 29 in TH C	6	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	II	III	76
Aufgabe 30 in TH C	7	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in	II	III	129

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenzstufe	Seite
			größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen (3.2.c)			
Aufgabe 31 in TH C	8	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen (3.2.b); Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)	II	III	127
Aufgabe 32 in TH C	9	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a); strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen (3.1.a)	II	IV	77
Aufgabe 33 in TH C	10	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a); funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a)	III	V	130
Aufgabe 34 in TH C	11	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen (2.2.d); Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	II	V	107
Aufgabe 35 in TH C	12	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)	arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)	III	IV	80
Aufgabe 36 in TH C	13	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b); arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben (3.1.c)	II	III	108

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenzstufe	Seite
Aufgabe 37 in TH C	14	3.1.; Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a); funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a); einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen (3.2.c)	III	III	131