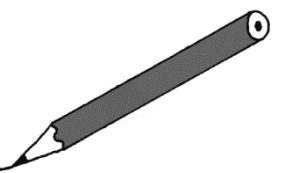


Kompetenzen **ermitteln**

Mathematik
Didaktisches Material

2024

8



Version **B / C**

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

die vorliegende Veröffentlichung enthält die Aufgabenstellungen, Lösungen und didaktischen Kommentierungen der *KERMIT 8 Mathematik 2024*¹, die vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen der Humboldt-Universität zu Berlin (IQB) erstellt wurden. Die didaktischen Materialien sollen nicht nur ganz konkret über die Bildungsstandards Mathematik und einen entsprechenden kompetenzorientierten Unterricht informieren, sondern sie sollen vor allem Sie als Lehrkraft in Ihrem täglichen Bemühen um einen solchen Unterricht unterstützen. Aus diesem Grund werden in dieser Handreichung allgemeine Informationen zu getesteten Kompetenzbereichen gegeben. Anschließend werden eine Reihe von Aufgaben, die bei KERMIT 8 (2024) in den Testheften B und C eingesetzt wurden mitsamt ihren jeweiligen Lösungen und didaktischen Kommentierungen wiedergegeben.

Wir möchten Sie darauf hinweisen, dass die vorliegende Veröffentlichung keine Testergebnisse Hamburger Schülerinnen und Schüler enthält; die Rückmeldung der Testergebnisse Ihrer Schülerinnen und Schüler erhalten Sie über Ihre Schulleitung direkt vom Institut für Bildungsmonitoring und Qualitätsentwicklung. Sie können das didaktische Material für Ihre persönlichen (Unterrichts-)Zwecke in gewohnter Weise vervielfältigen und weitergeben.

Wir freuen uns über Ihre Kommentare und Anregungen zu der vorliegenden Veröffentlichung. Sie helfen uns damit, Ihre Erwartungen zukünftig noch besser erfüllen zu können.

Ihr KERMIT-Team am Institut für Bildungsmonitoring und Qualitätsentwicklung

Beltgens Garten 25

20537 Hamburg

Mail: kermit@ifbg.hamburg.de

¹ Die Bezeichnung für diese länderübergreifende Erhebung ist nicht überall gleich. In einigen Bundesländern werden sie als Vergleichsarbeiten (VERA) bezeichnet, in anderen werden sie Lernstandserhebungen genannt.

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung.....	5
2.	Bildungsstandards und Kompetenzmodell im Fach Mathematik	5
3.	Die Leitidee <i>Daten und Zufall</i>	8
3.1.	<i>Schwerpunktthema: Umgang mit Daten</i>	9
3.2.	<i>Daten im KERMIT-8 Kontext</i>	12
3.3.	<i>Daten und ihre Interdisziplinarität</i>	16
4.	Abschließende Bemerkungen	17
5.	Leitidee <i>Daten und Zufall</i> : Schwerpunktthema <i>Umgang mit Daten</i>	18
5.1.	<i>Dateninterpretation und Berechnung statistischer Kennwerte</i>	18
	<i>Testheft B - Aufgabe 21: Bootsverleih</i>	18
	<i>Testheft C - Aufgabe 19: Singen</i>	20
	<i>Testheft C - Aufgabe 20: Training für Langstreckenlauf</i>	21
	<i>Testheft B - Aufgabe 23: Darmstadt</i>	23
	<i>Testheft B - Aufgabe 24: Einnahmen darstellen</i>	25
	<i>Testheft C - Aufgabe 24: Fernsehtürme</i>	26
5.2.	<i>Daten grafisch darstellen</i>	30
	<i>Testheft B - Aufgabe 20: Taschengeld</i>	30
	<i>Testheft B - Aufgabe 22: Fairer Handel</i>	32
5.3.	<i>Grafische Darstellungen und Tabellen auswerten</i>	36
	<i>Testheft C - Aufgabe 21: Freizeitbeschäftigungen</i>	36
	<i>Testheft C - Aufgabe 18: Fitnessverein</i>	37
	<i>Testheft B - Aufgabe 25: Zuckeranteil</i>	38
	<i>Testheft C - Aufgabe 22: Klassensprecherwahl</i>	42
	<i>Testheft C - Aufgabe 23: Lieblingsschokolade</i>	43
6.	Anregungen für den Unterricht	46
7.	Literatur	50
8.	Abbildungsverzeichnis	51
9.	Verzeichnis der Beispielaufgaben	51

1. Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004, 2005, 2005b, 2015) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die Vergleichsarbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (KERMIT-8) im Fach Mathematik. Daher wird in dieser didaktischen Handreichung zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt. Anschließend der Schwerpunkt der diesjährigen Ergänzungsmodule näher erläutert: die Leitidee *Daten und Zufall* mit einem Fokus auf das Thema *Umgang mit Daten*. Es werden insbesondere zu Aspekten des Schwerpunktes fachdidaktische Herausforderungen geschildert und Anregungen vorgestellt, wie mit diesen in der Unterrichtspraxis umgegangen werden kann. In dem dazugehörigen Kapitel werden außerdem Aufgaben aus KERMIT-8 präsentiert, die sich der diesjährigen Schwerpunktsetzung zuordnen lassen. Dabei handelt es sich um Beispiele für Aufgabenformulierungen, welche die verschiedenen allgemeinen Kompetenzen adressieren und zudem im Unterricht zur Förderung der Kompetenzen herangezogen werden können.

2. Bildungsstandards und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/ Französisch) ein². Eine grundlegende Wende stand bevor: Während zuvor der *Input* im Vordergrund stand, also Inhalte und Themen, sollte nun auch der *Output* stärkere Beachtung finden, also der Aufbau von Kompetenzen, Wissensstrukturen, Werten, etc. Inhalte sollten mit der Entwicklung von Persönlichkeitsmerkmalen verknüpft werden, die die Basis für ein lebenslanges Lernen legen und so persönliche Weiterentwicklung und gesellschaftliche Teilhabe ermöglichen (Klieme et al., 2003). Die OECD betont dabei den Anwendungscharakter von Mathematik:

„Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit des Einzelnen, Mathematik in einer Vielzahl von Kontexten zu formulieren, anzuwenden und zu interpretieren. Sie umfasst mathematisches Argumentieren und die Verwendung mathematischer Konzepte, Verfahren, Fakten und Werkzeuge zur Beschreibung, Erklärung und Vorhersage von Phänomenen. Sie hilft dem Einzelnen, die Rolle zu erkennen, die die Mathematik in der Welt spielt, um begründete Urteile und Entscheidungen zu treffen, die von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern benötigt werden.“ (OECD, 2013, S. 25, eigene Übersetzung)

Zu diesem Zweck benennen die Bildungsstandards Kompetenzen, die Schüler:innen bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe anhand zentraler Fachinhalte erworben haben sollen (KMK, 2004, 2005). Dabei wird davon ausgegangen, dass ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schüler:innen die folgenden drei *Grunderfahrungen* ermöglicht (Winter, 1995, S. 37):

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

² <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>

2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Bildungsstandards umfassen in ihrem Wesen die benannten Grunderfahrungen sowie Inhalte, Kompetenzen und Niveaustufen, wie das folgende Kompetenzmodell für das Fach Mathematik darlegt. Das Kompetenzmodell liefert einen *Handlungsrahmen* für Lehrpersonen und Schulen, zur Einhaltung verbindlicher Ziele sowie zur Weiterentwicklung von Schule und Unterricht (Klieme et al., 2003). Handlungsrahmen bedeutet insbesondere, dass im Vordergrund nicht die Umsetzung eines – aus der fachlichen Systematik entstehenden – ‚starrten Gerüsts‘ steht, sondern den Schulen ein großer „Freiraum für die innerschulische Lernplanung“ (ebd., S. 9) gelassen wird. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Leitideen*
3. *Anforderungsbereiche*

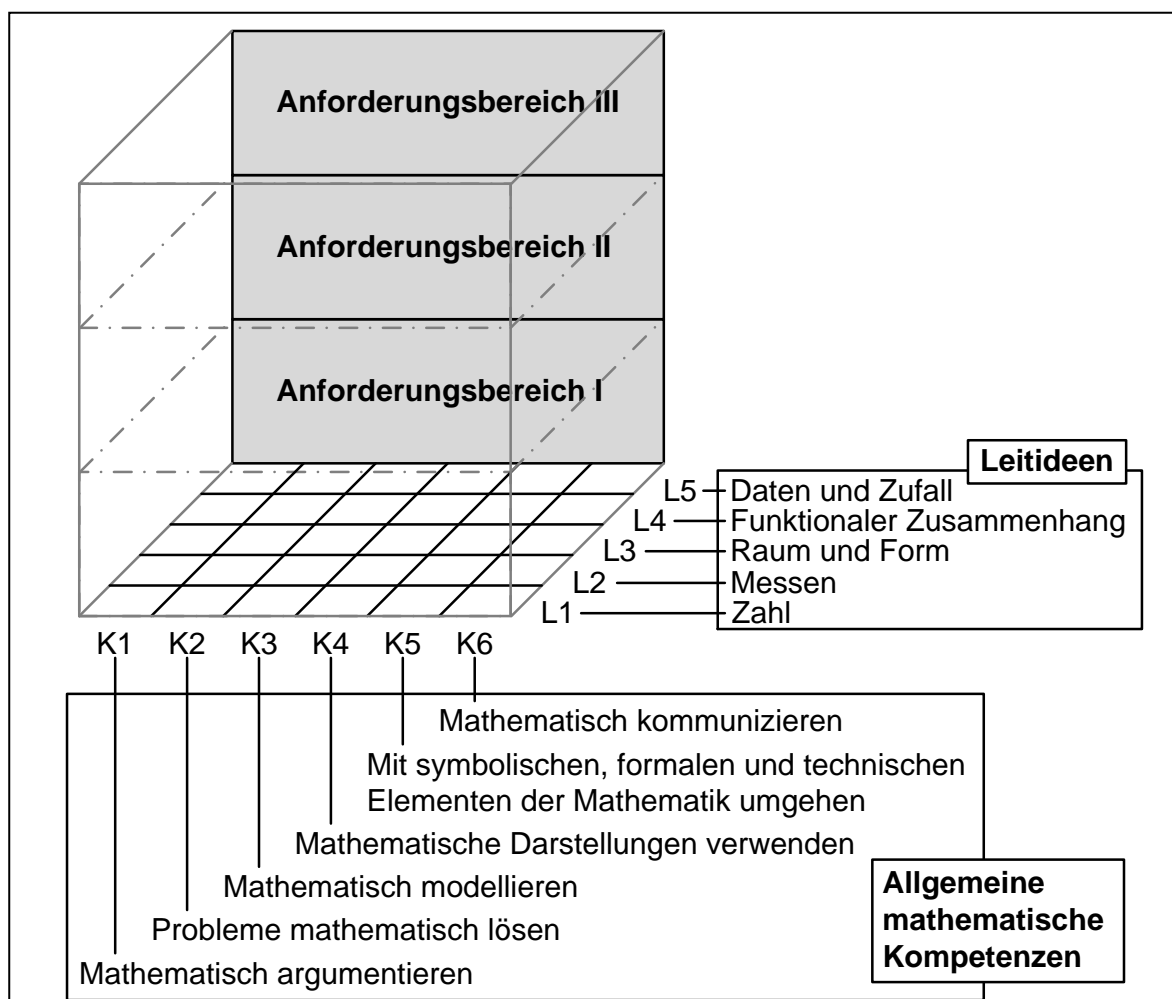


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells. Dabei wird vom Grundgedanken ausgegangen, „das Können der Schüler an den *Kompetenzen* festzumachen, die sie beim Bearbeiten von Aufgaben zu aktivieren haben“ (Leiss & Blum, 2010, S. 33). Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *Mathematisch modellieren* (K3), *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *Mathematisch kommunizieren* (K6). Diese *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* sollen differenziert betrachtet werden, auch wenn sie üblicherweise im Verbund erworben werden und häufig auch gemeinsam angewendet werden müssen. Insbesondere werden bei der Bearbeitung von komplexeren mathematischen Aufgaben oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt. Mit der getrennten Betrachtung ist die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen, was eine differenziertere Planung des Mathematikunterrichts ermöglicht. So kann ein mathematischer Inhalt den Schüler:innen entlang verschiedener durchzuführender mathematischer Tätigkeiten zugänglich gemacht werden. Inhalte können durch die multiperspektivische und wiederholte Betrachtung eher in ihrer Gänze verstanden werden und mathematische Kompetenzen anhand unterschiedlichster Erscheinungen über den Inhalt hinaus erworben werden.

Jedoch reicht der Blick auf die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* für eine produktive Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht aus (Leiss & Blum, 2010). Daher bilden die *Leitideen* eine zweite Dimension des Modells. Die fünf Leitideen sind *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). In den Bildungsstandards wird zu den Leitideen erläutert:

„Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2004, S. 9).

Leitideen folgen keinem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“), sondern sie erlauben es, bestimmte mathematische Inhalte unter einer Kategorie zusammenzufassen. Vielmehr soll durch die Betonung von Leitideen deutlich werden, dass sich aus mathematischen Phänomenen wie dem Zählen, dem Messen oder dem Umgang mit Zufällen mathematische Sachgebiete herausgebildet haben (Greefrath 2018, Blum 2010).

Die dritte Dimension enthält die drei *Anforderungsbereiche*. Sie beschreiben die Komplexität von Aufgaben, denn das Bearbeiten und Lösen von Aufgaben fordert mathematische Kompetenzen in unterschiedlichen Ausmaßen (KMK, 2004). Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem *Anforderungsbereich I* werden Anforderungen an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum *Reproduzieren* unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum *Anforderungsbereich II*

zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schüler:innen ermöglichen *Zusammenhänge herzustellen* und Gelerntes anzuwenden. In den *Anforderungsbereich III* gehören diejenigen Anforderungen, die es Schüler:innen abverlangen zu *verallgemeinern und zu reflektieren* (ebd.).

Die drei Bestandteile des Kompetenzmodells stellen gleichwertige Dimensionen der Bildungsstandards dar. Im Folgenden wird exemplarisch ein Aspekt der Leitidee *Daten und Zufall* herausgegriffen und erläutert. Eine Orientierung des Mathematikunterrichts an den *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* – also der Prozessdimension des Kompetenzmodells – ist eine maßgebliche Errungenschaft der Bildungsstandards, die auch bei exemplarischer Betrachtung einzelner Leitideen nicht in den Hintergrund geraten sollte.

3. Die Leitidee *Daten und Zufall*

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den *mittleren Schulabschluss* werden unter der Leitidee *Daten und Zufall* die folgenden inhaltsbezogenen Kompetenzen zusammengefasst (KMK, 2004):

Die Schüler:innen

- *werten grafische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,*
- *planen statistische Erhebungen,*
- *sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie grafisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software),*
- *interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen,*
- *reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren,*
- *beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,*
- *bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.*

Diese Auflistung deckt sich mehrheitlich mit derjenigen für den *Hauptschulabschluss* (KMK, 2005), wobei vereinzelt Unterschiede identifiziert werden können. So hat in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss die Datenanalyse einen geringeren Stellenwert. Dies wird dadurch ersichtlich, dass die Interpretation unter Verwendung von Kenngrößen sowie die bei einer Datenanalyse einhergehende Reflexion und Bewertung von Argumenten nicht explizit gefordert werden. Dass Schüler:innen eine eigenständige Erhebung planen, wird ebenfalls nicht aufgegriffen. Stattdessen wird durch die inhaltsbezogenen Kompetenzen ein Alltagsbezug stärker betont. Schüler:innen sollen sowohl (berechnete) Häufigkeiten und Mittelwerte als auch lebensnahe Wahrscheinlichkeitsaussagen im Kontext interpretieren können.

Durch die aufgelisteten inhaltlichen Kompetenzen wird bereits ersichtlich, dass die Leitidee *Daten und Zufall* wesentliche Elemente der Stochastik enthält. Dabei ist sie aber nicht auf die Stochastik beschränkt, sondern kann u. a. funktionale Zusammenhänge, das Messen oder die Geometrie aufgreifen, beispielsweise im Umgang mit Daten oder bei systematischen Experimenten (Biehler & Hartung, 2010).

Diese didaktische Handreichung setzt im Folgenden einen Schwerpunkt auf den (stochastischen) Aspekt der *Daten*. Eine Schwerpunktsetzung auf diese Teilthematik bietet sich aus einem lebensnahen und einem didaktisch-bildungspolitischen Grund besonders an. Einerseits werden Schüler:innen und Lehrkräfte tagtäglich mit unterschiedlichsten Daten konfrontiert, z. B. durch Statistiken in sozialen und digitalen Medien. Andererseits ist ein Wandel der Lehrpläne beobachtbar dadurch, dass der Datenaspekt in diesen stärker integriert wird.

3.1. Schwerpunktthema: *Umgang mit Daten*

In Kapitel 2 dieser Handreichung werden die Grunderfahrungen genannt, die Schüler:innen in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht erfahren sollen. Eine dieser Grunderfahrungen beschreibt, dass die Welt auf eine mathematische Weise wahrgenommen werden soll (Winter, 1995, S. 37). Ausgehend von der Prämisse, dass sich gerade Stochastikunterricht durch einen Anwendungsbezug auszeichnet und als „anwendungsorientierter Unterricht“ bezeichnet werden kann, scheint dieser dazu prädestiniert zu sein, die eigene Umwelt in der Bedeutung von Winter auf mathematische Weise erfahrbar zu machen (Krüger et al., 2015, S. 7). Anhand des hier gewählten Schwerpunktes *Umgang mit Daten* ist diese Perspektive besonders nachvollziehbar, da Daten als „Zahlen mit einem Kontext“ aufgegriffen werden können (Biehler & Engel, 2015, S. 229). Die Auseinandersetzung mit Daten im Mathematikunterricht kann Erfahrungen in der eigenen Umwelt widerspiegeln, da Schüler:innen in einer durch (empirische) Daten beeinflussten Welt leben.

Die gesonderte gesellschaftliche Relevanz dieses Schwerpunktthemas *Umgang mit Daten* erfordert, dass Schüler:innen sich differenziert mit Daten und ihren unterschiedlichen Repräsentationen beschäftigen und diese interpretieren können, was zum Beispiel bei der Konfrontation mit (datenlastigen) Beiträgen sozialer oder anderer Medien gefordert ist. Im Verständnis der Bildungsstandards werden darüber hinaus breitere Kompetenzen gefordert (Biehler & Hartung, 2010), etwa dass „nicht nur problematische Zeitungsberichte, sondern beispielsweise seriös für die Öffentlichkeit produzierte Veröffentlichungen von statistischen Ämtern zu verstehen ... die Zielperspektive [ist]“ (Biehler & Hartung, 2010, S. 53). Es stellt sich somit die Frage, wie ein solcher breiter Kompetenzerwerb erreicht werden kann. Ein wesentlicher Aspekt zum Erreichen dieses Ziels ist, dass Lernende die Methode der statistischen Erhebung kennen(lernen) und dabei die einzelnen Phasen einer vollständigen statistischen Erhebung durchlaufen. Hierbei sind in den jeweiligen Phasen unterschiedliche mathematische Kompetenzen gefordert (vgl. Folgekapitel), wobei die Schüler:innen zugleich wichtige Erfahrungen sammeln (Biehler & Hartung, 2010).

Phasen einer statistischen Erhebung

Die mathematischen Kompetenzen, welche in den einzelnen Phasen einer vollständigen statistischen Erhebung eine zentrale Bedeutung haben, werden in der folgenden **Fehler!** **Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** dargestellt:

Tabelle 1: Phasen einer statistischen Erhebung, vgl. Biehler & Hartung, 2010; Biehler & Engel, 2015.

Phase	Zentrale Kompetenzen	Beispiele / Erläuterung
Problemstellung	Mathematisch modellieren (K3)	Reale Problemstellung in eine statistische Erhebung übersetzen, relevante Variablen identifizieren, ...
Planung der Erhebung		
Datenerhebung		
Auswertung	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, technischen und formalen Elementen der Mathematik umgehen (K5)	Zwischen verschiedenen statistischen Darstellungen und Visualisierungen Beziehungen erkennen, zwischen Darstellungen wechseln, Software zur Berechnung von Kenngrößen nutzen, ...
Interpretation		
Schlussfolgerung und Ergebnisbericht	Mathematisch argumentieren (K1) Mathematisch kommunizieren (K6)	Den Lösungsweg begründen, den Sachverhalt schriftlich kommunizieren und adressatengerecht darlegen, ...

Dabei ist zu beachten, dass alle weiteren mathematischen Kompetenzen abhängig von der einzelnen Problemstellung ebenfalls in den einzelnen Phasen bedeutsam sein können. Beispielsweise kann bei der *Auswertung* der Daten die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* benötigt werden, um die relevanten Informationen für die folgende Interpretation zu identifizieren. Es ist außerdem möglich, dass bei einer statistischen Untersuchung die Phasen mehrfach durchlaufen werden. Zum Beispiel kann bei der *Interpretation* festgestellt werden, dass noch weitere Daten benötigt werden, oder es können während des Prozesses neue Frage- bzw. Problemstellungen entstehen (Biehler & Engel, 2015; Krüger et al., 2015, S. 103).

Mithilfe dieser Tabelle wird ebenfalls deutlich, dass eine statistische Erhebung nicht nur Kompetenzen im Umgang mit der Datenauswertung und den damit einhergehenden Berechnungen oder mathematischen Darstellungen erfordert. Unter anderem wird in den letzten Phasen der statistischen Erhebung sichtbar, dass insbesondere Verbalisierungen im Stochastikunterricht bedeutsam sind. Diese Rolle der mathematischen Sprache wird dadurch deutlich, dass die Kompetenzen mathematisch zu *argumentieren* und zu *kommunizieren* explizit gefordert und somit gezielt gefördert werden können (Krüger et al., 2015, S. 8).

Aspekte statistischen Denkens

Eine zielgerechte Auseinandersetzung mit Problemstellungen beim *Umgang mit Daten* erfordert bei Schüler:innen sogenanntes *statistisches Denken*. Dieses gilt es aufzubauen und ist in fünf Aspekte unterteilbar (Eichler & Vogel, 2013, S. XII; Vogel & Eichler, 2010; vgl. auch Biehler & Engel, 2015, S. 225; Wild & Pfannkuch, 1999).

1. Erkennen der Notwendigkeit von Daten

Die Schüler:innen sollen erkennen, dass erst auf Basis „guter“ Daten und entsprechender statistischer Auswertungen Entscheidungen und Aussagen getroffen werden können, die allgemein anerkannt sind und nicht nur einer subjektiven Ansicht und Überzeugung entsprechen.

2. Flexible Repräsentation der relevanten Daten

Daten können nicht als „richtig“ oder „falsch“ kategorisiert werden, sondern müssen statistisch analysiert werden. Abhängig von der jeweiligen Problemstellung wird jeweils eine andere Analyse- und Darstellungsmethode benötigt und die Daten können auf unterschiedliche Weise dargestellt werden. Die Auswahl der passenden Analyse- und Darstellungsmethode erfordert Wissen über die Potenziale und Grenzen dieser, sodass die Daten aus unterschiedlichen Perspektiven wahrgenommen werden können. Beispielsweise können Boxplots und Säulendiagramme zum gleichen Datensatz erstellt werden, würden aber unterschiedliche Informationen bereitstellen oder entsprechend vernachlässigen.

3. Einsicht in die Variabilität statistischer Daten

Der Ausgang einer statistischen Erhebung kann nicht genau vorausgesagt werden. Dies wird insbesondere durch Experimente deutlich, z.B. dem 50-maligen Werfen eines sechsseitigen Würfels. Wenn dieses Experiment wiederholt wird, wird das Ergebnis der Erhebung (voraussichtlich) unterschiedlich ausfallen. Damit mit solchen stets unterschiedlichen Ergebnissen umgegangen werden kann, ist es bedeutsam, die Gründe für die Variabilität zu thematisieren. So können es erklär- und erwartete oder zufällige Variationen des Ergebnisses sein, es kann sich um einen Sonderfall handeln oder auf eine häufige vorkommende Ursache zurückführen lassen.

4. Erkennen von Mustern in den Daten und Beschreibung der Muster mit statistischen Modellen

Obwohl bei statistischen Erhebungen eine Variabilität vorhanden ist, sind trotzdem Muster in den Daten erkennbar. Würde man das Werfen eines Würfels mehrfach wiederholen, würden sich die Ergebnisse der Erhebungen voraussichtlich stets unterscheiden. Trotzdem wäre die Binomialverteilung als Muster identifizierbar und beschreibbar. Solche stochastischen Modelle können insbesondere in den höheren Jahrgangsstufen thematisiert werden und eignen sich dafür, den Umgang mit solchen Experimenten und Daten immer wieder aufzugreifen.

5. Verbinden von Kontext und Statistik

Die Auswertung und Analyse von Daten sind für (reale) Kontexte relevant. Diese Erkenntnis muss von Schüler:innen erst einmal erlangt werden. Beispielsweise sollte bei der Interpretation der Datenauswertung stets auch der Kontext beachtet werden, damit Interpretationsspielräume berücksichtigt werden. Den Schüler:innen sollte also bewusst sein, dass sich die Daten und der Kontext gegenseitig bedingen.

3.2. Daten im KERMIT-8 Kontext

Im KERMIT-8 Kontext sind Aufgaben zu finden, in denen der *Umgang mit Daten* geprüft wird. Mithilfe zweier Beispielaufgaben wird dies im Folgenden exemplarisch aufgezeigt. Dabei wird insbesondere dargelegt, welche Kompetenzen die Aufgaben erfordern und nach Möglichkeit Bezug zu den Phasen einer statistischen Erhebung und den Aspekten statistischen Denkens genommen.

Dass eine statistische Untersuchung festgelegten und stringenten Phasen folgt und somit in einem allgemeinen Ablauf beschrieben werden kann, wird in der Aufgabe „Bistroumfrage“ (siehe **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**) aufgegriffen.

Beispielaufgabe 1: „Bistroumfrage“ - Teilaufgabe 1

Die Klasse 8a plant eine statistische Untersuchung zum Kaufverhalten im Schulbistro.
Bevor die statistische Untersuchung durchgeführt wird, soll mithilfe von Planungskarten ein allgemeiner Ablaufplan erstellt werden.

Ablaufplan

Planungskarten

Wir interpretieren die Untersuchungsergebnisse. <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">○</div>	Wir führen eine Befragung durch. <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">○</div>	Wir überlegen uns geeignete Fragen. <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">○</div>
---	--	---

Bei dieser Aufgabe sollen Schüler:innen Planungskarten an die richtigen Stellen eines Ablaufplans einer statistischen Untersuchung sortieren. Die Planungskarten spiegeln dabei die Phasen einer vollständigen statistischen Untersuchung wider: die Problemstellung – die Planung der Erhebung –

die Datenerhebung – die Auswertung – die Interpretation – die Schlussfolgerung und den Ergebnisbericht (vgl. Kapitel 3.1.1).

Da hier aus einfachen mathemathikhaltigen Texten bzw. der Abbildung Informationen zu den einzelnen Phasen entnommen werden müssen, ist hier die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) gefordert. Die Abbildung stellt dabei eine Möglichkeit dar, wie die Phasen im Unterricht dargestellt werden könnten. Die einzelnen Phasen werden in diesem Ablaufplan mit Handlungen verknüpft und somit operationalisiert.

Bei der Auseinandersetzung mit der Problemstellung einer Untersuchung und dem Entwickeln eines Untersuchungsplans ist oftmals *Mathematisches Modellieren* (K3) die zentrale Kompetenz, auf die Schüler:innen zurückgreifen müssen (siehe **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**). Anhand der folgenden Teilaufgabe wird dies deutlich, da Teilkompetenzen des Modellierens gebraucht werden (siehe **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**).

Beispielaufgabe 2: „Bistroumfrage“ - Teilaufgabe 2

Ein Ziel der Untersuchung soll es sein, die Wochentage mit dem höchsten Getränkeumsatz herauszufinden. Dazu wird eine Umfrage vor der Eröffnung des Bistros durchgeführt.

Welche Frage passt zum Ziel der Umfrage?

Kreuze eine der folgenden Fragen an.

- Würdest du im Bistro Getränke kaufen?
- An welchen Wochentagen würdest du im Bistro einkaufen?
- Wie viele Getränke würdest du in einer Woche im Bistro kaufen?
- An welchen Wochentagen würdest du im Bistro Getränke kaufen?

Bei dieser Teilaufgabe ist es die Teilkompetenz *Vereinfachen* des *Mathematischen Modellierens* (K3), die Schüler:innen vordergründig benötigen. Für diese reale Situation – eine statistische Untersuchung zum Kaufverhalten im Schulbistro – müssen Annahmen getroffen werden. Dabei soll die Situation bzw. das Problem *vereinfacht* werden, damit das Ziel der Untersuchung, den Wochentag mit dem höchsten Getränkeumsatz zu finden, erreicht werden kann.

Damit die Situation sinnentnehmend gelesen und verstanden werden kann sowie letztendlich die zugehörige richtige Fragestellung ausgewählt wird, ist die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) notwendig. Die in der Aufgabe formulierten Fragen können als Beispielfragen aufgefasst werden, die Schüler:innen im Rahmen einer eigenen Untersuchung im Unterricht stellen könnten. Würden die Schüler:innen im Unterricht tatsächlich eine eigene Erhebung durchführen oder es würde eine solche Aufgabe thematisiert werden, könnten noch weitere differenzierte Fragestellungen von den Schüler:innen oder durch die Lehrkraft gestellt werden, z. B. „Wie viele Personen müssen befragt werden, sodass die Stichprobe repräsentativ ist?“ oder „Welche Antwortmöglichkeiten sollten angeboten werden?“. Darüber hinaus kann anhand dieser Aufgabe die

Notwendigkeit von Daten für diese und vergleichbare Problemstellungen thematisiert werden. Dass gerade die Erhebung von Daten zu einem möglichst objektiven Erkenntnisgewinn beiträgt und so die Fragestellung gewinnbringend für die Klasse beantwortet werden kann, kann entsprechend diskutiert werden.

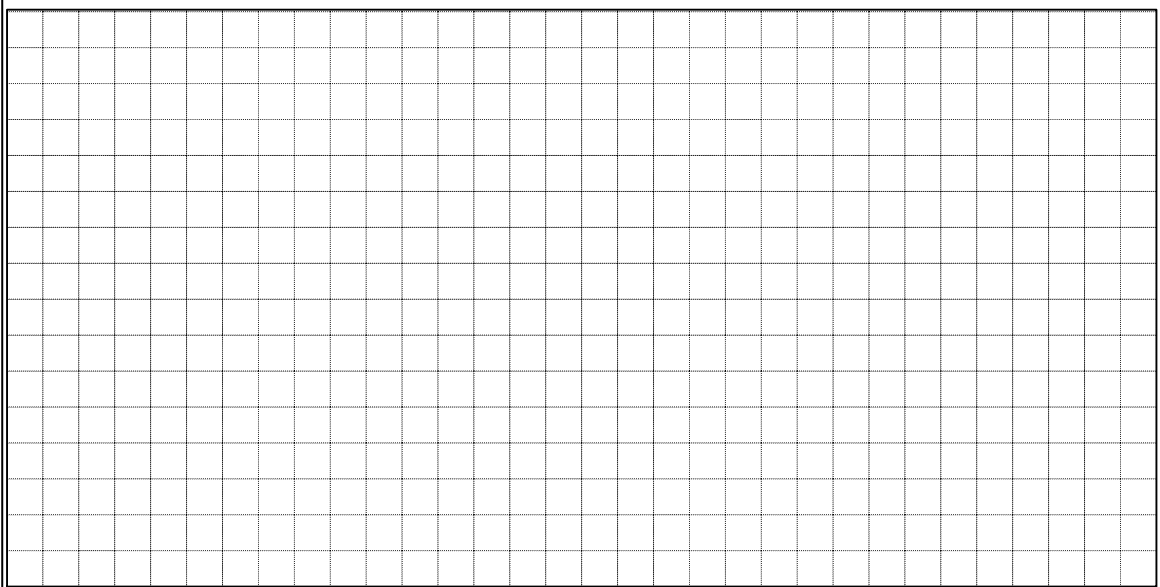
Aufgabenstellungen können auch spätere Phasen einer vollständigen Untersuchung thematisieren und bereits erhobene Daten darstellen. Bei der Aufgabe „Schulkleidung“ in der **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** ist dies der Fall.

Beispielaufgabe 3: „Schulkleidung“ - Teilaufgabe 1

An einer Schule wird über die Einführung einheitlicher Schulkleidung diskutiert. Lisa und Paul haben im Internet eine Studie der Fachhochschule Münster zu diesem Thema gefunden. Dort wurden insgesamt 17 812 Schülerinnen und Schüler befragt.

Auf die Frage „Wärst du bereit, Schulkleidung zu tragen?“ haben 9018 (50,6%) der Befragten mit „ja“ geantwortet, 8136 (45,7%) mit „nein“, der Rest hat keine Angaben gemacht.

Stelle die Ergebnisse der Befragung („ja“ / „nein“ / „keine Angaben“) in einem Säulendiagramm dar.



In dieser Aufgabe soll eine Darstellung, das Säulendiagramm, erstellt werden. Diese eigenständige Leistung greift auf die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) zurück, da zwischen der symbolisch-numerischen Darstellung im Text zu einer eigenen grafischen Darstellung gewechselt werden muss. Dies erfordert die zielgerichtete Entnahme relevanter Informationen zur Umfrage aus dem Text. Daher ist auch die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) erforderlich. Anhand des erstellten Säulendiagramms kann diagnostiziert werden, ob die Schüler:innen die bedeutsamen Informationen aus dem Text entnehmen und auf die Analysetechnik eines Säulendiagramms zurückgreifen können.

Dass die Daten nicht nur anhand eines Säulendiagramms, sondern auf flexible Weise dargestellt werden können, wird anhand der sich anschließenden Teilaufgabe in **Fehler! Verweisquelle**

Möglichkeit wäre, dass die Schüler:innen selbst dazu aufgefordert werden, bestimmte meinungsvertretende Darstellungen zu erstellen. Dann kann darüber reflektiert werden, welche Bedeutung der Kontext für die Dateninterpretation hat und ob die flexiblen Darstellungsmöglichkeiten von Daten subjektive Überzeugungen beeinflussen.

3.3. Daten und ihre Interdisziplinarität

Das Schwerpunktthema *Umgang mit Daten* bietet aufgrund seiner Charakteristik viele Möglichkeiten zur Vernetzung mit anderen Fächern an. Der *Umgang mit Daten* stellt nicht nur eine mathematikspezifische Aufgabe dar, sondern betrifft alle weiteren natur- und gesellschaftswissenschaftlichen Fächer. Die Aufgaben einer Mathematiklehrkraft unterscheiden sich aber von denen der Fachkolleg:innen und sind folgendermaßen beschreibbar:

- „Sie [die Mathematiklehrkraft] muss in ihrem Unterricht grundlegende Begriffe, Verfahren sowie Denk- und Arbeitsweisen der Stochastik so vermitteln, dass diese in anderen Fächern verwendet und vertieft werden können.
- Sie muss Koordinator und Berater im Gesamtprozess der Vermittlung stochastischen Wissens und Könnens an ihrer Schule sein.“ (Krüger et al., 2015, S. 5)

Darüber hinaus ermöglicht insbesondere dieses Thema die Verwendung von Auswertungssoftware oder Tabellenkalkulationsprogrammen. Erst durch die Wahl geeigneter Hilfsmittel können auch größere Datenmengen analysiert oder Zufallsversuche vielfach simuliert werden. Damit können die Schüler:innen beispielsweise eigene Vermutungen überprüfen oder das Verstehen von stochastischen Modellen wird durch ein „Erlebarmachen“ erleichtert. Außerdem können grafische Darstellungen auf einfache Weise erstellt werden (Biehler & Engel, 2015; Biehler & Hartung, 2010; Eichler & Vogel, 2013, S. 246ff.; Krüger et al., 2015, S. 230). Wird eine eigenständige Untersuchung im Unterricht durchgeführt, stehen oftmals nicht genügend Daten für eine aussagekräftige Auswertung und Interpretation zur Verfügung. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn sich die Fragestellung nicht nur auf die eigene Klasse, sondern auf eine größere Population beziehen soll. Eine solche Untersuchung könnte dann durch andere öffentliche Daten, z. B. aus dem Schulbuch, dem statistischen Bundesamt oder anderen Medien ergänzt werden (Biehler & Hartung, 2010). Dabei ist zu beachten, dass sich reale Daten von fiktiven Daten unterscheiden können: „Reale Daten in Statistik kommen aus einem Kontext und enthalten Ungewissheit und Fehler, während Daten im traditionellen Mathematikunterricht typischerweise fingiert sind und so gewählt wurden, dass sie exakt zu einem mathematischen Modell passen.“ (Biehler & Engel, 2015, S. 229). Hierbei wird die Variabilität von Daten als ein Aspekt stochastischen Denkens wieder ersichtlich.

Letztendlich ist es das Ziel, dass Schüler:innen mit Daten verantwortungsvoll umgehen können und ein Bewusstsein für die Variabilität und Analysemöglichkeiten, welche unterschiedliche Perspektiven darstellen können, entwickeln. Die ständige Konfrontation durch unterschiedliche Kommunikationsmedien mit Daten im täglichen Leben und einer von Daten geprägten Umwelt kann zu einer Ungewissheit und Unsicherheit bei Entscheidungsprozessen führen (Biehler & Engel,

2015). Ein entsprechender Kompetenzerwerb kann dazu beitragen, dass Schüler:innen solche Prozesse sachgemäß analysieren und interpretieren können.

4. Abschließende Bemerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalten den Themenschwerpunkt *Umgang mit Daten* im Bereich der Leitidee *Daten und Zufall*. Aus diesem Thema wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Dabei wurde auf besondere Hürden und Möglichkeiten beim Thema *Umgang mit Daten* hingewiesen. Für weitere Anregungen für die Unterrichtspraxis sei auf die Kommentare zu den einzelnen Aufgaben in Teil 5 der didaktischen Handreichungen verwiesen. Zudem wurde aufgezeigt, welche Aufgabenmerkmale mit welchen allgemeinen mathematischen Kompetenzen einhergehen. Für weitere Beispiele und Anregungen stellt die in den vorangegangenen Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar.

5. Leitidee Daten und Zufall: Schwerpunktthema Umgang mit Daten
5.1. Dateninterpretation und Berechnung statistischer Kennwerte

Testheft B - Aufgabe 21: Bootsverleih

21. Herr Schumann verleiht am See Ruderboote.

Immer, wenn er ein Boot verleiht, macht er einen Strich in seinem Notizbuch. Für den Monat Juli sieht die Strichliste so aus:



Woche	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
1.		////				//// ////	//// ////
2.						//// 	////
3.					//// 	//// ////	//// ////
4.		////				//// ////	//// ////
5.	////		//// 				

Copyright Grafik: Allman, R. (2019, 17. August). Ruderboote Holzboote Boot [Fotografie]. pixabay.
<https://pixabay.com/de/photos/ruderboote-holzboote-boot-wasser-4411463/>
 © IQB

Teilaufgabe a)

a) Herr Schumann hatte im Juli einen Tag mit den meisten verliehenen Booten und einen Tag mit den wenigsten verliehenen Booten.

Gib die Differenz (Spannweite) der Anzahl der verliehenen Boote zwischen diesen beiden Tagen an.

 _____ Boote

Auswertung

RICHTIG	20
	Grenzfall
	0-20 Boote

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Teilaufgabe b)

- b) Wie viele Boote wurden an den Dienstagen im Juli durchschnittlich verliehen?



_____ Boote

Auswertung

RICHTIG	4
---------	---

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Bootsverleih“ wird eine Strichliste in Form einer Tabelle betrachtet, in der dargestellt wird, wie viele Boote je nach Wochentag im Monat Juli verliehen wurden. Diese Aufgabe gehört zur Leitidee *Daten und Zufall* (L5), da es um die Auseinandersetzung mit den Ergebnissen einer statistischen Erhebung geht.

In der ersten Teilaufgabe müssen die Schüler:innen der tabellarisch dargestellten Strichliste die höchste und niedrigste Anzahl an einem Tag verliehener Boote entnehmen, um die Spannweite zu berechnen. Diese Informationsentnahme ist der Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) zuzuordnen. In Teilaufgabe b) muss zunächst der Begriff „durchschnittlich“ im Text als wichtig erkannt werden (K6). Die anschließende Deutung dieses Begriffs liefert einen zentralen Hinweis auf das Modell „Bildung des arithmetischen Mittels“ (K3). Die erforderlichen Daten (Anzahlen der an den Dienstagen verliehenen Boote) sind der Strichliste zu entnehmen (K6). Die anschließende Berechnung des arithmetischen Mittels mit diesen Werten erfordert die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5).

Da es sich um keine komplexe Abbildung handelt, sondern um eine einfache Strichliste, der die Informationen zu entnehmen sind, kann sowohl die erste als auch die zweite Teilaufgabe dem *Anforderungsbereich I* zugeordnet werden. Die Berechnung des arithmetischen Mittels stellt ein Routineverfahren dar, weshalb die zweite Teilaufgabe dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen ist.

Testheft C - Aufgabe 19: Singen

19. In einer Gesangsgruppe singen fünf Personen. Ihr Durchschnittsalter beträgt 20 Jahre. Wie alt könnte jede Person sein? Ergänze sinnvolle Altersangaben in der Tabelle.

Person	Alter
Person 1	
Person 2	
Person 3	
Person 4	
Person 5	

© IQB

Auswertung

RICHTIG	Die Summe aller Altersangaben muss 100 betragen und sinnvoll sein.												
FALSCH	<p>Alle anderen Antworten</p> <p>Beispiel(e)</p> <ul style="list-style-type: none"> • <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="padding: 2px 5px;">Person</th> <th style="padding: 2px 5px;">Alter</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">Person 1</td> <td style="padding: 2px 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">Person 2</td> <td style="padding: 2px 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">Person 3</td> <td style="padding: 2px 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">Person 4</td> <td style="padding: 2px 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">Person 5</td> <td style="padding: 2px 5px;">100</td> </tr> </tbody> </table> 	Person	Alter	Person 1	0	Person 2	0	Person 3	0	Person 4	0	Person 5	100
Person	Alter												
Person 1	0												
Person 2	0												
Person 3	0												
Person 4	0												
Person 5	100												

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen (K2)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Singen“ müssen auf Grundlage der Angabe des durchschnittlichen Alters (arithmetischen Mittels) fehlende Daten ergänzt werden. Daher ist die Aufgabe der Leitidee *Daten und Zufall* (L5) zuzuordnen.

Anders als bei den klassischen Aufgaben zum arithmetischen Mittel soll nicht ausgehend von den einzelnen Werten das arithmetische Mittel bestimmt werden, sondern umgekehrt, ausgehend vom arithmetischen Mittel mögliche einzelne Werte ergänzt werden. Daher erfordert die Aufgabe die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2).

Da es sich um ein einfaches Problem handelt, welches mit einem bekannten oder experimentellen Verfahren gelöst werden kann, ist die Aufgabe dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen.

Testheft C - Aufgabe 20: Training für Langstreckenlauf

20. Yusuf trainiert für einen Langstreckenlauf. Er trägt jede Woche in einer Tabelle ein, wie viele Kilometer er pro Tag gelaufen ist.

Wochentag	gelaufene Kilometer
Montag	7
Dienstag	8
Mittwoch	14
Donnerstag	8
Freitag	11
Samstag	6

© IQB

Teilaufgabe a)

- a) Wie viele Kilometer ist Yusuf von Montag bis Samstag im Durchschnitt pro Tag gelaufen?



_____ km

Auswertung

RICHTIG	9
---------	---

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Aufgabenbezogener Kommentar

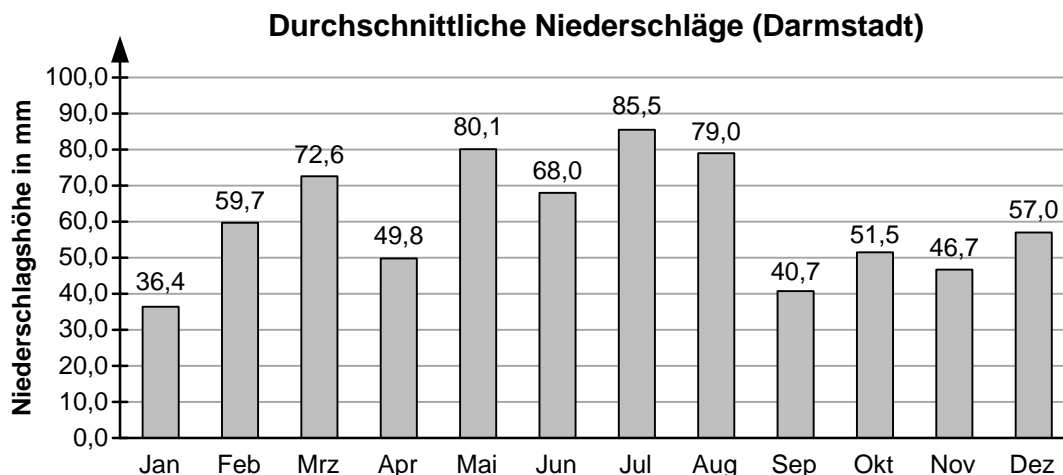
In der Aufgabe „Training für Langstreckenlauf“ wird eine Tabelle zur Anzahl der gelaufenen Kilometer je Wochentag betrachtet. In beiden Teilaufgaben wird das arithmetische Mittel thematisiert. Aus diesem Grund ist die Aufgabe der Leitidee *Daten und Zufall* (L5) zuzuordnen.

In der ersten Teilaufgabe muss die durchschnittliche Anzahl der gelaufenen Kilometer pro Tag von Montag bis Samstag berechnet werden. Hierzu müssen die Schüler:innen die einzelnen Werte der Tabelle entnehmen, wofür die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) vorausgesetzt wird. Die anschließende Berechnung des arithmetischen Mittels mit diesen Werten erfordert die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5). In der zweiten Teilaufgabe muss ausgehend vom arithmetischen Mittel eine fehlende Anzahl gelaufener Kilometer an einem bestimmten Tag berechnet werden. Wie in der ersten Teilaufgabe sind aus denselben Gründen sowohl *Mathematisch kommunizieren* (K6) als auch die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) erforderlich. Da dem Kontext hier eine größere Rolle zukommt als in Teilaufgabe 1, wird ebenfalls die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) gefordert.

In Teilaufgabe 1 muss ein Routineverfahren zur Berechnung des arithmetischen Mittels angewandt werden. Daher ist die Teilaufgabe dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen. Da es sich bei Teilaufgabe 2 nicht mehr um ein Routineverfahren handelt und hier ein fehlender Wert ausgehend vom angegebenen arithmetischen Mittel bestimmt werden muss, ist diese Teilaufgabe dem *Anforderungsbereich II* zuzuordnen.

Testheft B - Aufgabe 23: Darmstadt

23. Die Abbildung zeigt monatliche Durchschnittswerte für die Niederschlagshöhen (in Millimetern), die in Darmstadt gemessen wurden.



© IQB

Teilaufgabe a)

- a) Gib an, in welchem Monat durchschnittlich 79 mm Niederschlag gefallen sind.



Auswertung

RICHTIG	August ODER Aug ODER 8
---------	------------------------

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1a

Teilaufgabe b)

- b) Gib den Unterschied zwischen der größten und der kleinsten durchschnittlichen Niederschlagshöhe an.



_____ mm

Auswertung

RICHTIG	49,1
---------	------

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b

Aufgabenbezogener Kommentar

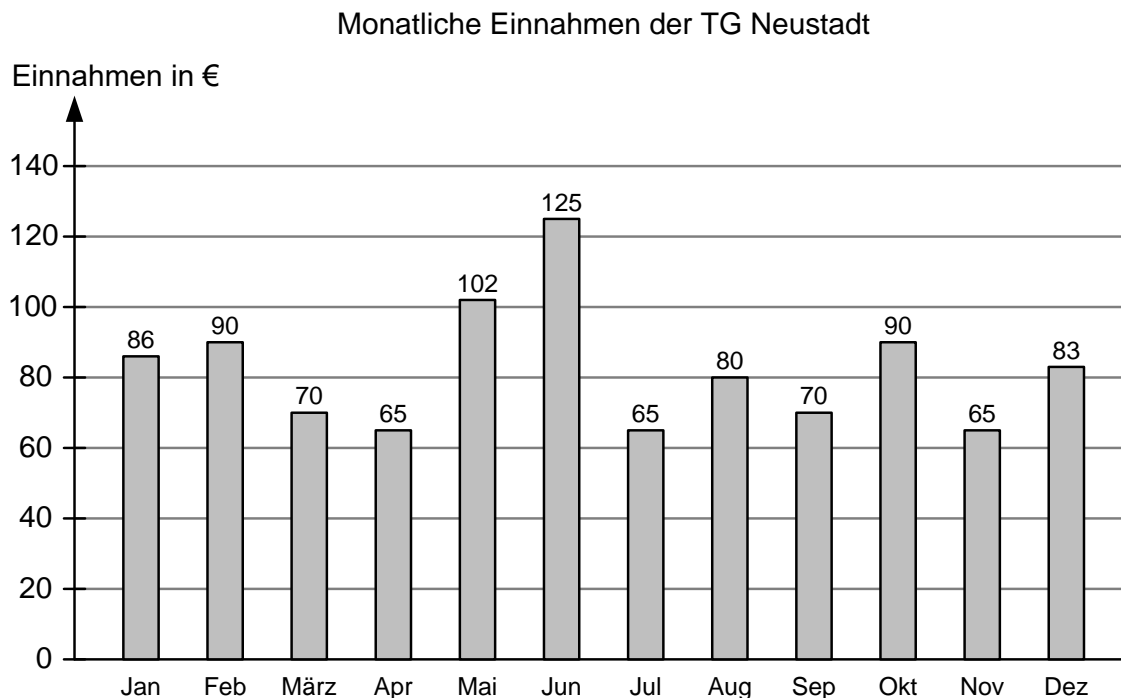
In der Aufgabe „Darmstadt“ wird ein Säulendiagramm betrachtet, in dem die durchschnittlichen Niederschläge je Monat in Darmstadt dargestellt werden. Sowohl in der ersten als auch in der zweiten Teilaufgabe muss mit den Daten dieses Diagramms gearbeitet werden. Daher ist die Aufgabe in der Leitidee *Daten und Zufall* (L5) zu verorten.

Da in beiden Teilaufgaben dem abgebildeten Säulendiagramm Daten entnommen werden müssen, wird die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) gefordert.

Es handelt sich um eine vertraute Darstellung, die genutzt werden muss, weshalb beide Aufgaben dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen sind.

Testheft B - Aufgabe 24: Einnahmen darstellen

24. Die Abbildung zeigt die monatlichen Einnahmen der Turngemeinde (TG) Neustadt aus dem Getränkeverkauf für das Jahr 2019.



Gib die durchschnittlichen Einnahmen der Monate Januar, Februar und März an.



€

© IQB

Auswertung

RICHTIG	82
---------	----

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Einnahmen darstellen“ wird ein Säulendiagramm zu den monatlichen Einnahmen eines Turnvereins aus dem Getränkeverkauf dargestellt. In diesem Zusammenhang wird das

arithmetische Mittel thematisiert. Daher ist die Aufgabe der Leitidee *Daten und Zufall* (L5) zuzuordnen.

Um die durchschnittlichen Einnahmen der ersten drei Monate zu bestimmen, müssen die Schüler:innen zuerst die Einnahmen dieser drei Monate dem Diagramm entnehmen. Daher wird die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) gefordert. Für die Berechnung des arithmetischen Mittels wird die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) vorausgesetzt.

Da es sich um eine vertraute Darstellung handelt und auch die Berechnung des arithmetischen Mittels ein Routineverfahren darstellt, ist die Aufgabe im *Anforderungsbereich I* zu verorten.

Testheft C - Aufgabe 24: Fernsehtürme

24. Die folgende Tabelle zeigt die Höhen der Fernsehtürme von fünf Orten.

1. Ort	2. Schwerin	3. Köln	4. Tokio	5. Moskau	6. Hannover
7. Höhe des Fernsehturms	8. 136 m	9. 266 m	10. 634 m	11. 540 m	12. 282 m

Gib die Spannweite der Höhen der Fernsehtürme an.

Die Spannweite beträgt _____ m.

© IQB

Auswertung

RICHTIG	498
---------	-----

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	5

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Fernsehtürme“ werden die Höhen von fünf verschiedenen Orten tabellarisch angegeben. Da die Schüler:innen diese Daten nutzen müssen, ist die Aufgabe der Leitidee *Daten und Zufall* (L5) zuzuordnen.

Für die Berechnung der Spannweite müssen die Schüler:innen die minimale und maximale Höhe der Fernsehtürme der Tabelle entnehmen. Diese Informationsentnahme erfordert *Mathematisch kommunizieren* (K6).

Da es sich um keine komplexe Abbildung handelt, sondern um eine einfache tabellarische Darstellung, aus der die Informationen zu entnehmen sind, kann die Aufgabe dem *Anforderungsbereich I* zugeordnet werden.

Anregungen für den Unterricht

Die Aufgaben „Bootsverleih“, „Singen“, „Training für Langstreckenlauf“, „Darmstadt“, „Einnahmen darstellen“ und „Fernsehtürme“ erfordern alle den **Umgang mit statistische Kenngrößen**. Bei den statistischen Kenngrößen handelt es sich entweder um das arithmetische Mittel oder die Spannweite.

Der Begriff „Durchschnitt“ wird umgangssprachlich üblicherweise für den fachsprachlichen Begriff „arithmetisches Mittel“ verwendet. Die Deutung und die Berechnung dieses Mittels können in den Aufgaben die zentralen Schwierigkeiten bilden.

Im Unterricht kann das **arithmetische Mittel** neben seiner rechnerischen Behandlung unterstützend visualisiert und gedeutet werden. Dabei liegt je nach Aufgabenstellung ein Bezug zum Aspekt der gleichmäßigen Verteilung oder zum arithmetischen Mittel als Ausgleichswert nahe. Oft wird in den Medien mit einem Durchschnitt oder mit einem Mittel argumentiert. Dies legt nahe, im Unterricht einen Beitrag zu einem kritischen Umgang mit dem arithmetischen Mittel und dem Median zu leisten und begleitend so auch das statistische Denken zu fördern. Insbesondere eine kritische Betrachtung des arithmetischen Mittels bietet sich an, um der häufigen Fehlvorstellung, dass das Mittel „in der Mitte“ einer Datenmenge liegt, entgegenzuwirken. Weiterhin kann die Aussagekraft eines Mittelwertes thematisiert werden, in dem vor allem auch Grenzen, wie zum Beispiel der Einfluss von Ausreißern, aufgezeigt werden.

Beispielsweise kann anhand der zweiten Teilaufgabe der Aufgabe „Training für Langstreckenlauf“ der Aspekt der gleichmäßigen Verteilung vom arithmetischen Mittel vertieft werden. Bei diesem Aspekt werden alle sechs Teilstreckenlängen gedanklich aneinandergelagt, um dann zu überlegen, wie diese Gesamtstreckenlänge neu aufzuteilen wäre, damit alle Teilstreckenlängen gleich lang sind (siehe Abbildung 1).

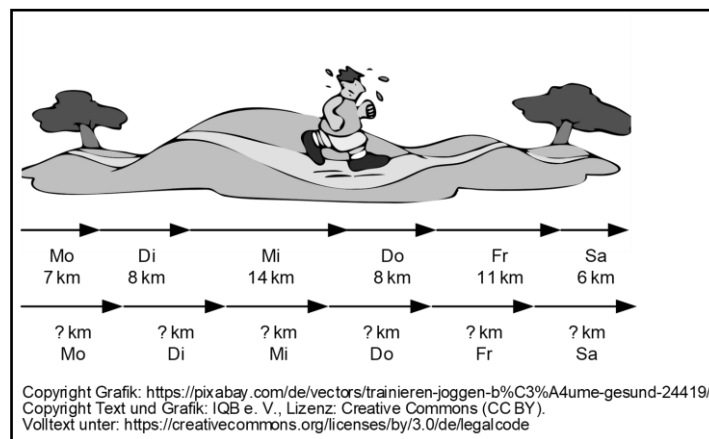


Abbildung 2: Visualisierung des Aspekts der gleichmäßigen Verteilung in Anlehnung an Krüger et al. (2015) am Beispiel der Aufgabe „Training für Langstreckenlauf“

Soll hingegen der Aspekt des arithmetischen Mittels als Ausgleich reaktiviert werden, muss man bei den längeren Strecken gedanklich so viel wegnehmen und dies gleichzeitig bei den kürzeren Strecken hinzufügen, dass schließlich jeden Tag alle Strecken gleich lang sind. Bei diesem Aspekt geht es dementsprechend darum, Unterschiede in den einzelnen Werten durch das Verkleinern und Vergrößern von Daten, auszugleichen. In einem Säulendiagramm könnte der Aspekt des arithmetischen Mittels als Ausgleich als eine die einzelnen Daten durchschneidende Linie veranschaulicht werden (siehe Abbildung 2) (Krüger et al., 2015).

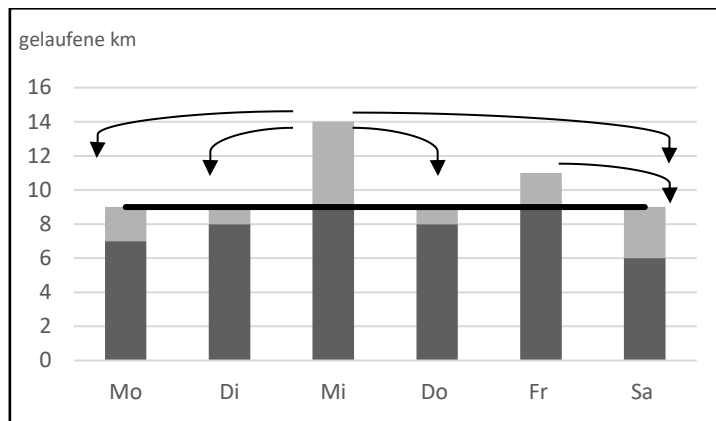


Abbildung 3: Ausgleichsaspekt des arithmetischen Mittels verdeutlicht am Säulendiagramm in Anlehnung an Krüger et al. (2015) am Beispiel der Aufgabe „Training für Langstreckenlauf“

In einer Erweiterung dieser Aufgabe kann die Ausreißeranfälligkeit des arithmetischen Mittels thematisiert werden. In einem ersten Schritt kann dazu geprüft werden, wie viele Werte kleiner und wie viele Werte größer als das errechnete arithmetische Mittel sind. So lässt sich anschaulich problematisieren, ob die Daten symmetrisch um dieses Mittel streuen. Dies liefert auch die Einsicht, dass das arithmetische Mittel nicht notwendig auch ein Datenwert der gegebenen Datenmenge ist. Diese Einsicht kann durch eine Gegenüberstellung mit dem Median vertieft werden. Dazu muss man die Datenmenge zunächst der Größe nach ordnen. Interpretiert man den Median als Mitte der geordneten Datenmenge (hier z. B. der nach aufsteigender Länge geordneten Distanzen pro Tag), so teilt er diese – wieder anschaulich gesprochen – in zwei gleich große Hälften.

Hat man sowohl den Median als auch das arithmetische Mittel zur Verfügung, kann man die Ausgangsdaten schrittweise verändern und jeweils beobachten, wie sich die beiden Kenngrößen verhalten. Bei diesem Verändern der Daten kann man z. B. die längste (oder die kürzeste) Strecke weglassen und prüfen, ob sich das arithmetische Mittel bzw. ob sich der Median verändert. Entsprechend kann man die längste Strecke durch einen großen Extremwert ersetzen, was dazu führt, dass der Median zwar gleichbleibt, aber das arithmetische Mittel nach oben wandert. Auf Grundlage

dieser Erkenntnisse kann thematisiert werden, in welchen Kontexten welche Kenngröße sinnvoll ist.

Ein weiterer wichtiger Aspekt, der im Unterricht im Zusammenhang mit dem arithmetischen Mittel und dem Median thematisiert werden sollte, ist, dass die Reduktion von Daten auf einen mittleren Wert immer auch mit einem Informationsverlust einhergeht. Dies wird besonders in der Aufgabe „Singen“ deutlich. Ein anderer Kontext aus dem Alltag, der in diesem Zusammenhang betrachtet werden könnte, ist die Aufzeichnung von Wetterdaten eines Monats. Diese sind regelmäßig in Tageszeitungen zu finden. Heißt es beispielsweise, dass es im August eines Jahres durchschnittlich 20°C warm war, so sagt dies noch nichts über die Temperaturen an den einzelnen Tagen aus. Folglich kann man von diesem Mittelwert ausgehend nicht notwendig auf die Ausgangsdaten zurück schließen (Grundidee: Mittelwert als Schätzer für einen Datensatz). So kann es an einem Tag 35°C warm gewesen sein, während es an einem anderen Tag in diesem Monat nur 15°C warm war. Schließlich können Schüler:innen anhand solcher Kontexte erfahren, dass nur die Ausgangsdaten deren Variabilität erkennen lassen und man zumindest qualitativ die Spannweite (oder die Streuung) kennen müsste, um die Aussagekraft eines Mittelwertes besser einschätzen zu können. Da die Variabilität sehr komplex und für Schüler:innen der Sekundarstufe I schwer zu quantifizieren ist, kann die Streuung von Daten mit einfachen Mitteln durch Boxplots veranschaulicht werden. Durch die Darstellung von Daten als Boxplot können auf einen Blick sowohl der Median sowie ein auf den Median bezogenes Streuungsmaß der Daten erfasst werden (Krüger et al., 2015).

Weitere Kontexte, die sich für solche Betrachtungen anbieten, sind (überschaubare) Einkommensstatistiken oder auch Daten über den Benzinverbrauch eines PKW.

Beide Aspekte (Ausreißeranfälligkeit und Aussagekraft) zeigen exemplarisch, dass die Wahl eines mathematischen Modells immer nur unter Beachtung des Kontextes eingeschätzt und bewertet werden kann. Dies wird durch einen flexiblen Umgang mit Daten begünstigt.

Weiterführende Materialien für den Unterricht in Form einer Lernaufgabe zum arithmetischen Mittel sind unter dem folgenden Link abrufbar:

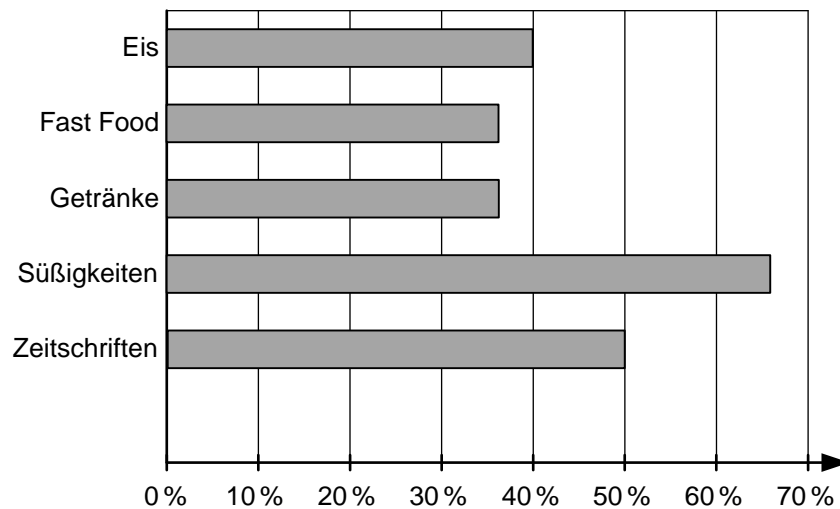
https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissenschaften/mint/iMINT-Akademie/Fachsets/Fachset_Mathematik/T-Shirts_im_Test/TShirts.pdf

Die beiden statistischen Kenngrößen arithmetisches Mittel und Median erfassen jedoch nicht die Streuung der Daten, sodass im Unterricht auch weitere Kenngrößen behandelt werden sollten (Krüger et al., 2015). In den Aufgaben „Darmstadt“, „Bootsverleih“ und „Fernsehtürme“ stand die Berechnung des Streumaßes der **Spannweite** im Vordergrund. Sowohl bei den Aufgaben im Ergänzungsmodul A („Darmstadt“, „Bootsverleih“) als auch in der Aufgabe im Ergänzungsmodul B („Fernsehtürme“) sind Fehler beim Ordnen der Daten zu erwarten, sodass der höchste und niedrigste Wert nicht korrekt identifiziert werden und daher auch die Spannweite nicht korrekt berechnet werden kann. Bei der Aufgabe „Fernsehtürme“ kommt ebenfalls die Schwierigkeit hinzu, dass die Schüler:innen den Begriff der Spannweite kennen müssen, da nicht noch einmal beschrieben wird, wie dieser zu bestimmen ist.

5.2. Daten grafisch darstellen

Testheft B - Aufgabe 20: Taschengeld

20. In einer Umfrage wurden Kinder zwischen 6 und 11 Jahren gefragt, wofür sie in der Regel ihr Taschengeld ausgeben. Sie konnten dabei auch mehrere Produkte nennen. In der Abbildung ist für die beliebtesten Produkte dargestellt, wie viel Prozent der Kinder sie genannt haben.



© IQB

Teilaufgabe a)

- a) Gib an, welches Produkt von den Kindern am häufigsten genannt wurde.



Auswertung

RICHTIG	Süßigkeiten
---------	-------------

Merkmale

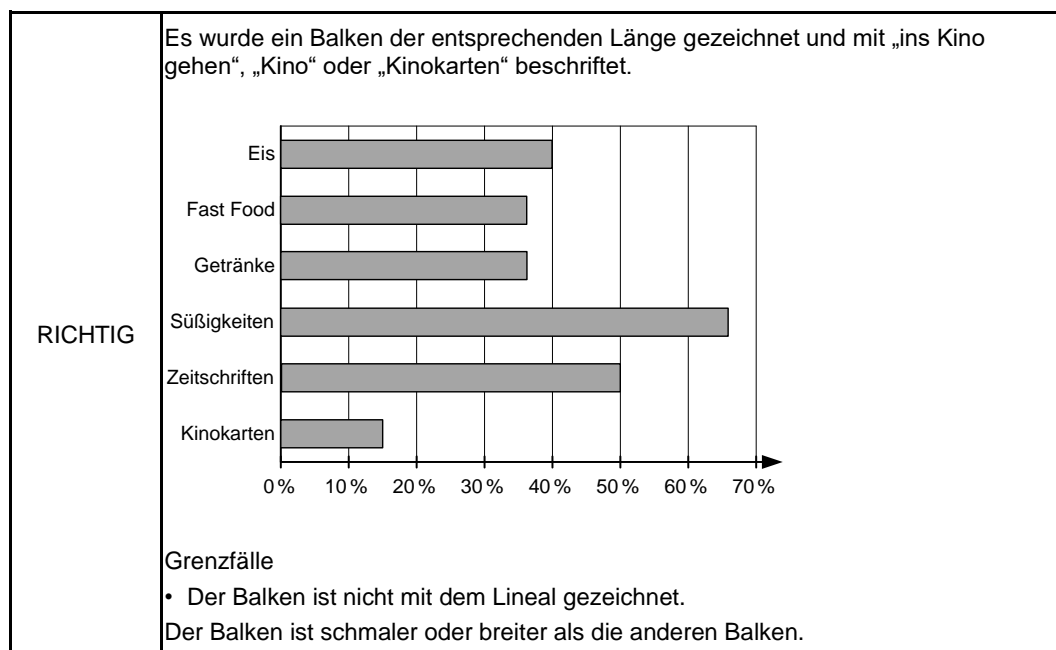
Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1a

Teilaufgabe b)

- b) 15 % der befragten Kinder haben gesagt, dass sie von ihrem Taschengeld Kinokarten kaufen.

Ergänze in der Abbildung einen Balken für „Kinokarten“ und beschrifte ihn.

Auswertung



Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe Taschengeld müssen die Schüler:innen mit Daten eines Balkendiagramms arbeiten, in dem dargestellt wird, für welche Produkte Kinder zwischen 6 und 11 Jahren ihr Taschengeld ausgeben. Daher kann die Aufgabe der Leitidee *Daten und Zufall (L5)* zugeordnet werden.

In der ersten Teilaufgabe muss das Balkendiagramm genutzt werden, um das Maximum abzulesen. Dafür ist die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden (K4)* notwendig. In der zweiten Teilaufgabe müssen die Schüler:innen einen Balken für das Produkt Kinokarten im Diagramm ergänzen. Daher wird auch hier die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden (K4)* gefordert.

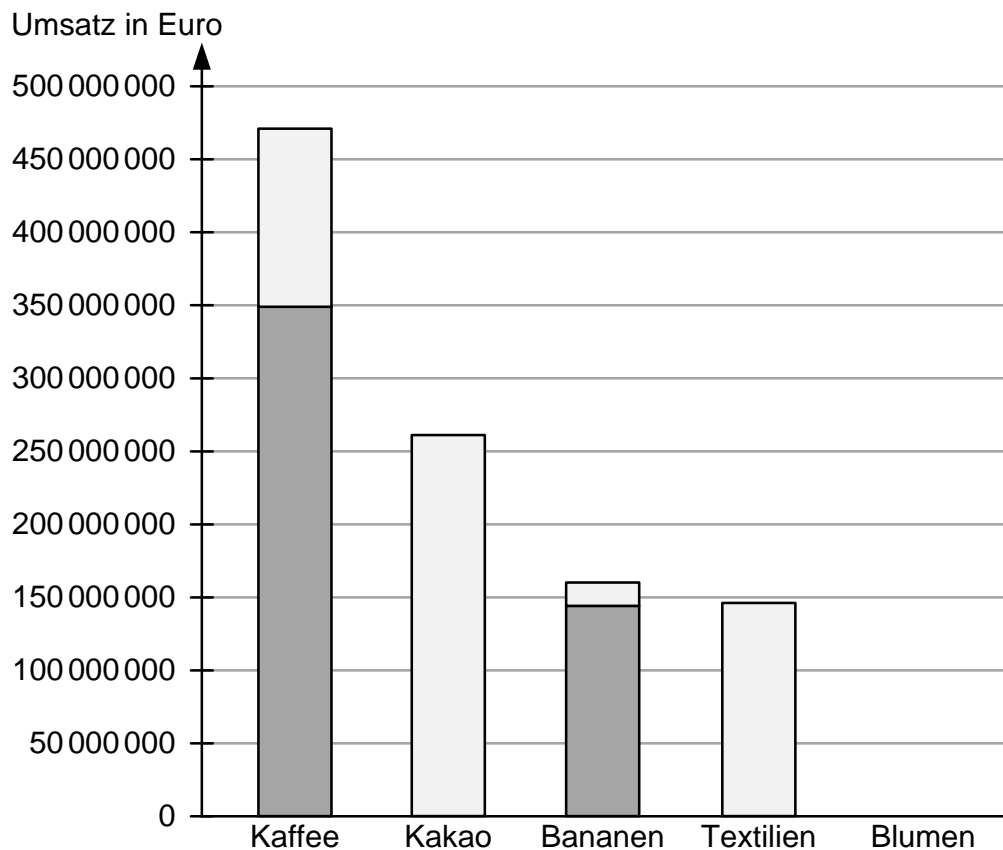
Da es sich in beiden Teilaufgaben um den Umgang mit vertrauten Darstellungen handelt, sind sie dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen.

Testheft B - Aufgabe 22: Fairer Handel

22. Die Tabelle zeigt die fünf „fair gehandelten“ Produkte, die im Jahr 2018 den größten Umsatz erzielten.

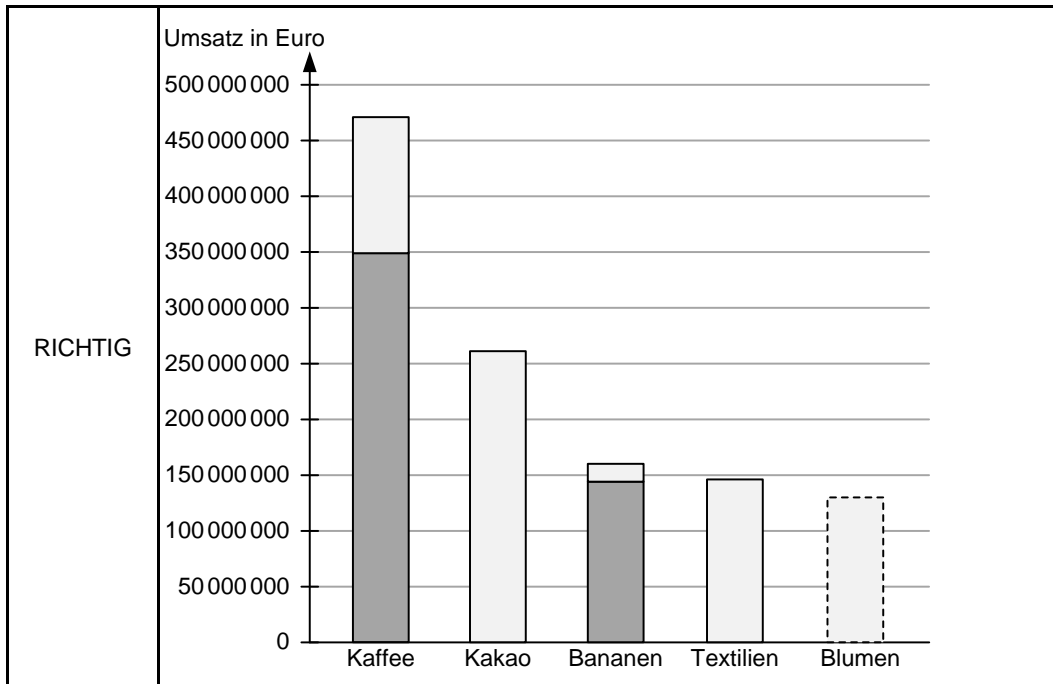
Produkt	Umsatz (in Euro)	Bioanteil
Kaffee	472 525 287	74 %
Kakao	261 614 898	0 %
Bananen	160 154 884	90 %
Textilien	146 073 356	39 %
Blumen	128 075 178	0 %

In dem folgenden Diagramm wurde begonnen, diese Daten grafisch darzustellen. In den Säulen für Kaffee und Bananen wurde zudem der Bioanteil eingefärbt.



Ergänze in dem Diagramm die Säule für den Umsatz mit Blumen.

Auswertung



RICHTIG

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Fairer Handel“ erfordert einerseits den Umgang mit tabellarisch dargestellten Daten von fünf „fair gehandelten“ Produkten, die im Jahr 2018 den größten Umsatz erzielten und andererseits die grafische Darstellung dieser Daten in einem Säulendiagramm. Daher ist die Aufgabe der Leitidee *Daten und Zufall (L5)* zuzuordnen.

Um die fehlende Säule für den Umsatz der Blumen eintragen zu können, müssen die Schüler:innen zuerst den Wert des Umsatzes der zweiten Tabellenspalte entnehmen. Hierbei wird die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren (K6)* gefordert.

Da es sich um vertraute Darstellungen handelt, ist die Aufgabe im *Anforderungsbereich I* zu verorten.

Anregungen für den Unterricht

Die Aufgaben „Taschengeld“ und „Fairer Handel“ haben gemeinsam, dass sie den **Umgang mit mathematischen Darstellungen** erfordern. In beiden Aufgaben müssen Diagramme (Balken- bzw. Säulendiagramm) anhand (tabellarisch) gegebener Daten vervollständigt werden. Prinzipiell kann diese Übertragung für Schüler:innen als wohlvertraut angenommen werden.

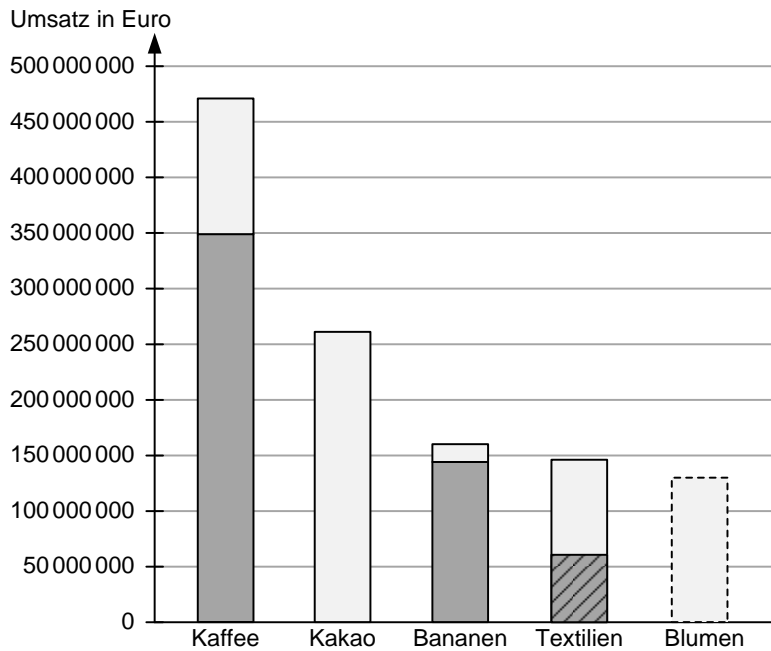
Auffällig in der Aufgabe „Fairer Handel“ ist die überflüssige Informationsangabe über den Bioanteil der fair gehandelten Produkte. Für die vorliegende Teilaufgabe ist diese Information nicht relevant. Sie bietet jedoch Potenzial für **weiterführende Aufgaben**. Diese könnten wie folgt aussehen:

Teilaufgabe 2:

Färbe wie bei den Säulen für Kaffee und Bananen auch für die Säule der Textilien den Bioanteil.

Copyright Text und Teilaufgaben: IQB e. V., Lizenz: Creative Commons (CC BY).
 Volltext unter: <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/de/legalcode>

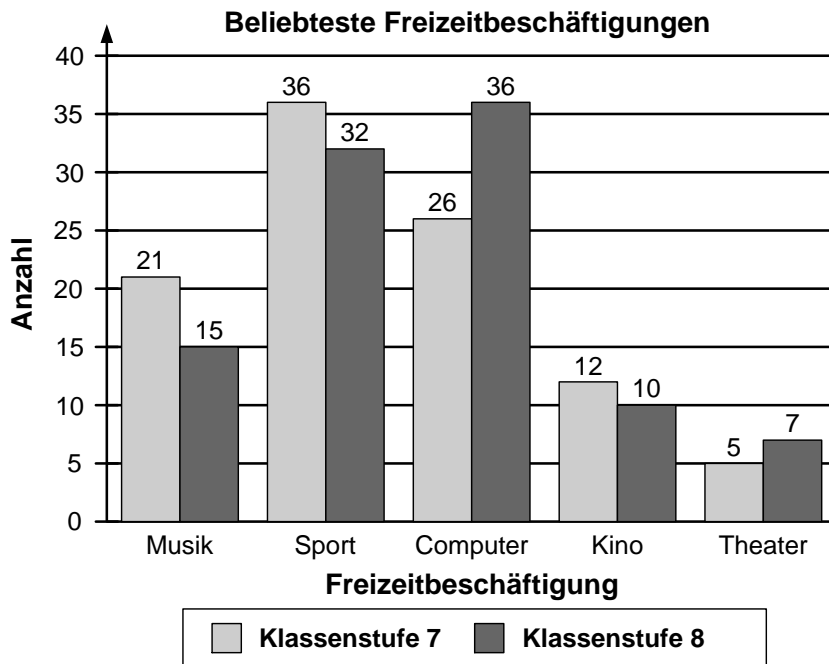
Auswertung

<p>RICHTIG</p>	<p>Umsatz in Euro</p>  <p>Grenzfall</p> <ul style="list-style-type: none"> • Die Säule endet genau auf der 50 000 000-er-Linie.
<p>FALSCH</p>	<p>Alle anderen Antworten</p> <p>Beispiel(e)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Die Säule endet unterhalb der 50 000 000-er-Linie.

5.3. Grafische Darstellungen und Tabellen auswerten

Testheft C – Aufgabe 21: Freizeitbeschäftigungen

21. Bei einer Befragung in den Klassenstufen 7 und 8 gaben alle Schülerinnen und Schüler ihre beliebteste Freizeitbeschäftigung an. Die Abbildung zeigt das Ergebnis dieser Befragung.



© IQB

Gib an, wie viele Schülerinnen und Schüler aus beiden Klassenstufen insgesamt befragt wurden.



_____ Schülerinnen und Schüler

Auswertung

RICHTIG	200
---------	-----

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b

Aufgabenbezogener Kommentar

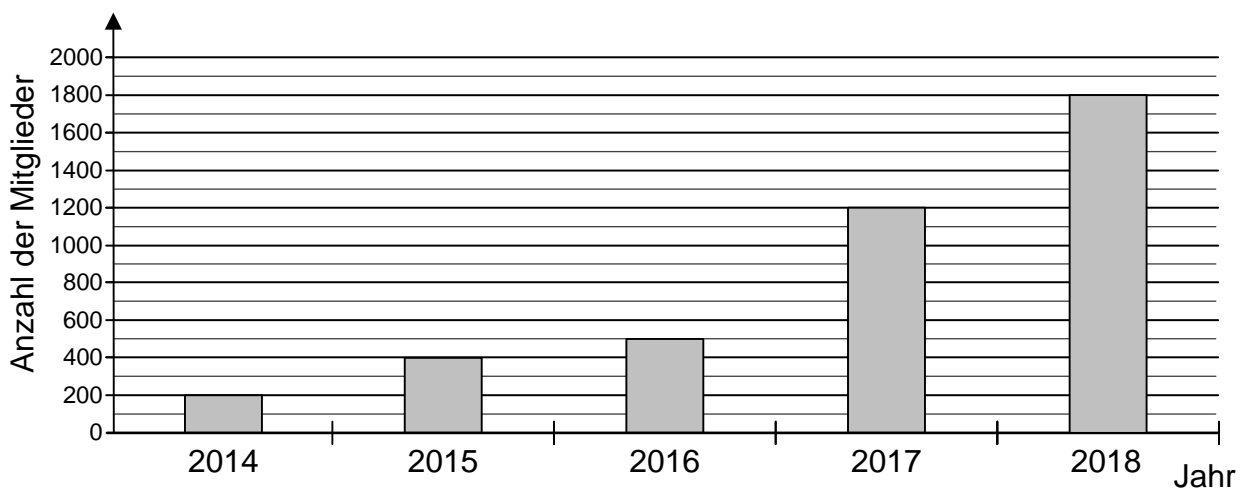
Die Aufgabe „Freizeitbeschäftigungen“ wird der Leitidee *Daten und Zufall* (L5) zugeordnet, da Schüler:innen eine grafische Darstellung zu einer statistischen Erhebung auswerten und Daten ablesen.

Die Aufgabe erfordert das Ablesen von Daten aus einem Säulendiagramm, da zur Bestimmung der Gesamtanzahl an Befragten zunächst angegeben werden muss, wie viele Schüler:innen die jeweilige Freizeitbeschäftigung in der Umfrage als ihre beliebteste Freizeitbeschäftigung angegeben haben. Somit ist die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) erforderlich.

Die Aufgabe liegt im *Anforderungsbereich I*, da es sich bei dem Säulendiagramm um eine vertraute Darstellung einer mathematischen Situation handelt, welche zur Bestimmung der Anzahl der befragten Schüler:innen genutzt wird.

Testheft C - Aufgabe 18: Fitnessverein

18. Die Grafik zeigt die Mitgliederzahlen eines Fitnessvereins in den Jahren 2014 bis 2018.



Um wie viele Mitglieder hat sich die Mitgliederzahl von 2015 bis 2016 geändert?



_____ Mitglieder

© IQB

Auswertung

RICHTIG	100
---------	-----

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b

Aufgabenbezogener Kommentar

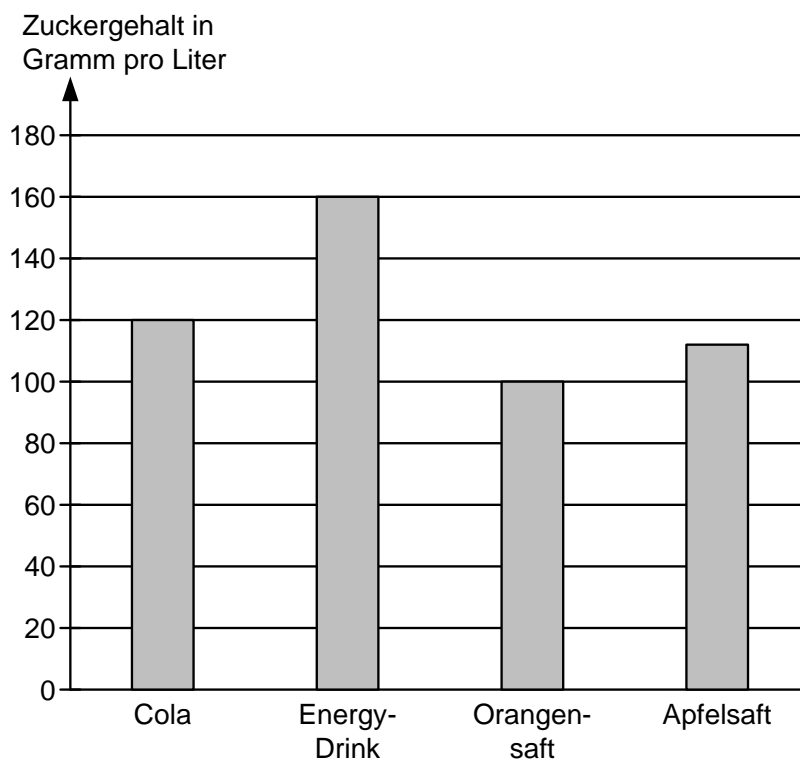
Die Aufgabe „Fitnessverein“ ist der Leitidee *Daten und Zufall* (L5) zuzuordnen, da Schüler:innen Daten aus einem Säulendiagramm ablesen und dieses somit auswerten.

Durch das Ablesen der Mitgliederzahlen eines Fitnessvereins aus dem Säulendiagramm, um die Veränderung der Mitgliederzahlen von einem Jahr zum nächsten Jahr zu bestimmen, wird die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) adressiert.

In dieser Aufgabe wird eine vertraute Darstellung, ein Säulendiagramm, einer mathematischen Situation genutzt, sodass sich diese Aufgabe im *Anforderungsbereich I* verorten lässt.

Testheft B - Aufgabe 25: Zuckeranteil

25. In dem folgenden Diagramm ist der Zuckergehalt beliebiger Getränkesorten dargestellt.



© IQB

Teilaufgabe a)

- a) Bestimme, wie viel Zucker in 1,5 Liter Orangensaft enthalten ist.



_____ g

Auswertung

RICHTIG	150
---------	-----

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2

Teilaufgabe b)

b) Welches Getränk enthält den meisten Zucker?

- A 0,75 Liter Cola
- B 0,25 Liter Energy-Drink
- C 1 Liter Orangensaft
- D 1 Liter Apfelsaft

Auswertung

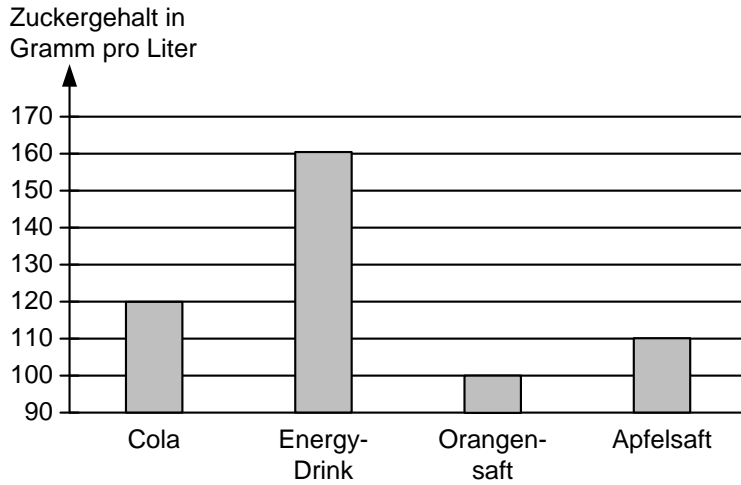
RICHTIG	D
---------	---

Merkmale

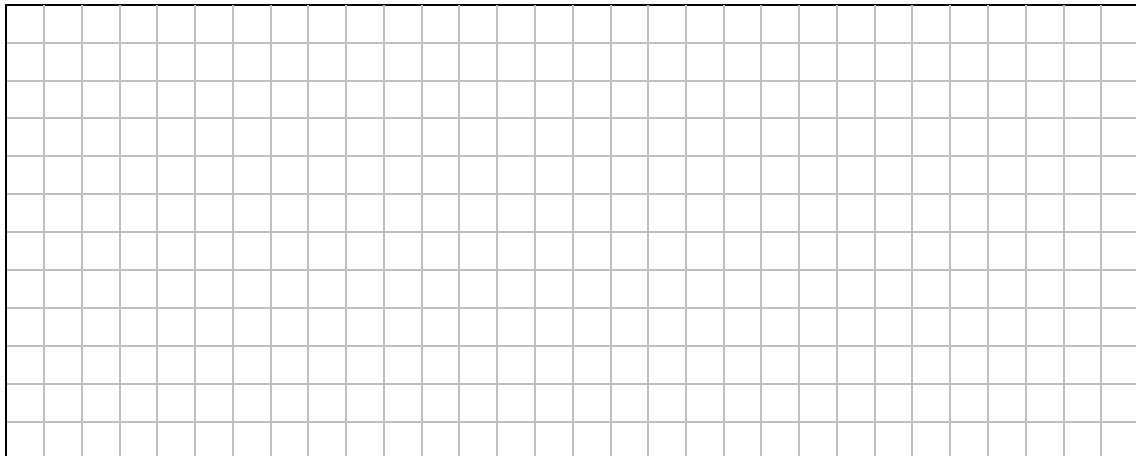
Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2

Teilaufgabe c)

c) Auch im folgenden Diagramm ist der Zuckergehalt dieser Getränkesorten dargestellt.



Erkläre, wie dieses Diagramm den hohen Zuckergehalt von Orangensaft verharmlosend darstellt.



Auswertung

RICHTIG	<p>Begründung, dass das Diagramm nicht mehr die Proportionalität zwischen Zuckeranteil und Säulenlänge abbildet.</p> <p>Beispiel(e)</p> <ul style="list-style-type: none">Die Säule für den Zuckeranteil von Cola ist dreimal so lang wie die von Orangensaft, obwohl Cola nur 1,2-mal so viel Zucker wie Orangensaft enthält. <p>Die Achse für den Zuckeranteil geht erst bei 90 Gramm Zucker pro Liter los und nicht bei 0 Gramm Zucker pro Liter.</p>
----------------	--

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch argumentieren (K1) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	4

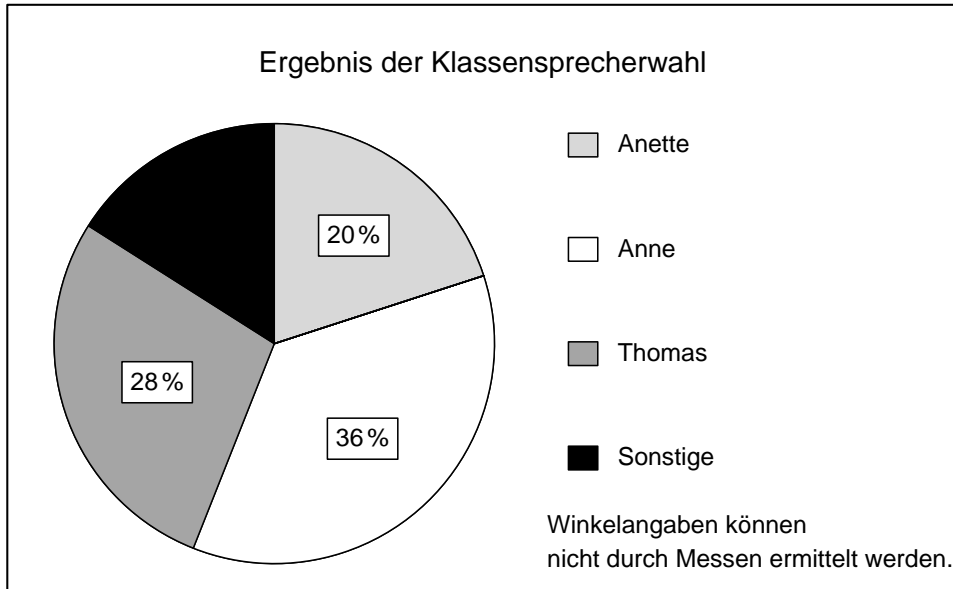
Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Zuckeranteil“ soll eine grafische Darstellung zum Zuckergehalt von Getränkesorten ausgewertet werden, sodass diese Aufgabe zur Leitidee *Daten und Zufall* (L5) gehört.

In Teilaufgabe 1 müssen Schüler:innen zunächst den Zuckergehalt von einem Liter Orangensaft aus dem Diagramm entnehmen und daraus im Anschluss den Zuckergehalt von 1,5 Liter Orangensaft bestimmen. Somit erfordert die erste Teilaufgabe sowohl die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) als auch die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5). In Teilaufgabe 2 werden diese beiden Kompetenzen ebenfalls angesprochen, da das Getränk mit dem meisten Zuckergehalt aus verschiedenen Getränken und Mengen ausgewählt werden muss. Zudem ist im Diagramm der Zuckergehalt für jeweils einen Liter der Getränke dargestellt, in den Antwortoptionen in Teilaufgabe 2 sind jedoch verschiedene Trinkmengen, auch unter einem Liter, für die verschiedenen Getränke angegeben. Somit kann das Getränk mit dem meisten Zuckergehalt nicht durch bloßes Ablesen bestimmt werden. Es muss ebenfalls die jeweilige Menge berücksichtigt werden. Dies entspricht der Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2). Teilaufgabe 3 erfordert die Kompetenz *Mathematisch argumentieren* (K1), da erklärt werden soll, dass im Diagramm keine Proportionalität zwischen dem Zuckeranteil und der Länge der Säulen besteht, wodurch der hohe Zuckergehalt im Orangensaft verharmlosend dargestellt wird. Aufgrund der Arbeit mit dem Säulendiagramm und dem Erkennen der veränderten Darstellung wird ebenso wie in den ersten beiden Teilaufgaben die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) angesprochen. Teilaufgabe 1 lässt sich dem *Anforderungsbereich I* zuordnen, da eine vertraute Darstellung genutzt und ein Routineverfahren zur Bestimmung des Zuckers in 1,5 Liter Orangensaft verwendet wird. Da in Teilaufgabe 2 verschiedene Trinkmengen der verschiedenen Getränke als Antwortmöglichkeiten angegeben sind, kann der Zuckergehalt nur von zwei Getränken in den Antwortmöglichkeiten direkt abgelesen werden. Für die anderen beiden Antwortmöglichkeiten muss zunächst ein Zusammenhang zwischen dem Zuckergehalt pro Liter aus dem Diagramm und der Trinkmenge in den Antwortmöglichkeiten hergestellt werden. Daher lässt sich diese Aufgabe dem *Anforderungsbereich II* zuordnen. Teilaufgabe 3 lässt sich in *Anforderungsbereich II* einordnen, da Zusammenhänge zwischen dem Zuckeranteil und der Säulenlänge im Diagramm erläutert werden und eine überschaubare Argumentation entwickelt wird, um die verharmlosende Darstellung des Zuckergehalts von Orangensaft zu erklären.

Testheft C - Aufgabe 22: Klassensprecherwahl

22. Die Abbildung zeigt das Ergebnis einer Klassensprecherwahl. Jede Schülerin und jeder Schüler aus der Klasse hat genau eine Stimme abgegeben.



© IQB

Johanna, Eric und Tilo bilden die Gruppe „Sonstige“. Johanna erhielt ebenso viele Stimmen wie Eric und Tilo zusammen.

Gib an, wie viel Prozent der Stimmen auf Johanna entfielen.

_____ %

Auswertung

RICHTIG	8
---------	---

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Klassensprecherwahl“ wird der Leitidee *Daten und Zufall* (K5) zugeordnet, da ein Kreisdiagramm, welches die Ergebnisse einer Klassensprecherwahl zeigt, ausgewertet werden soll.

Vorrangig erfordert diese Aufgabe die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2), da der zu bestimmende Anteil der Stimmen für Johanna nicht direkt aus dem Diagramm oder dem Text entnommen oder mit einfachen Routineverfahren bestimmt werden kann. Mithilfe der Anteile im Kreisdiagramm muss zunächst der Anteil der Gruppe „Sonstige“, in welchem Johannas Stimmen enthalten sind, bestimmt werden. Dann kann mit diesem und mithilfe der Informationen aus dem Text ermittelt werden, wie sich der Anteil der Gruppe „Sonstige“ auf Johannas, Erics und Tilos Stimmen aufteilt. Zunächst wird der Anteil der Gruppe „Sonstige“ bestimmt, indem die Anteile der anderen Gruppen erst abgelesen und dann von 100 % subtrahiert werden. Hierbei sind die Kompetenzen *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) und *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) erforderlich. Anschließend wird aus dem Text die Information entnommen, wie sich die Stimmen in der Gruppe „Sonstige“ zusammensetzen, und mit dieser der Anteil von Johannas Stimmen bestimmt. Somit wird mit einer vertrauten Darstellung gearbeitet, zwischen der sprachlichen, symbolischen und grafischen Darstellung gewechselt und es werden mehrere Lösungsverfahren verwendet.

Diese Aufgabe lässt sich im *Anforderungsbereich II* einordnen, da ein Problem bearbeitet wird, dessen Lösung die Anwendung von Heuristiken sowie den Wechsel zwischen Darstellungsformen erfordert.

Testheft C - Aufgabe 23: Lieblingsschokolade

23. In Deutschland wurde eine Studie zum Thema „Lieblingsschokolade“ durchgeführt. Einige Ergebnisse dieser Befragung sind in Abbildung 1 dargestellt.

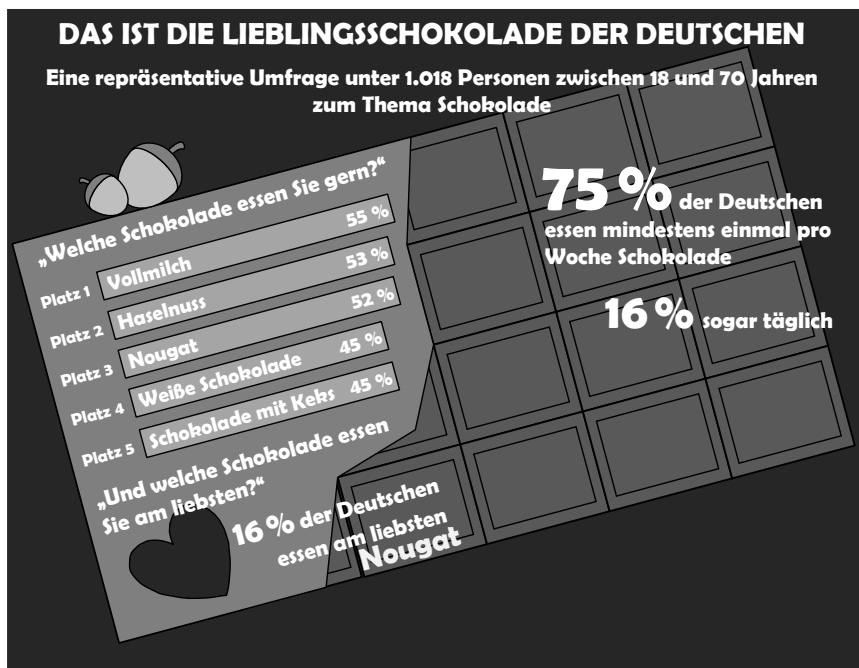


Abbildung 1

© IQB

Teilaufgabe a)

- a) Wie viele befragte Personen essen gerne Vollmilchschokolade?
Runde sinnvoll.

 _____ Personen

Auswertung

RICHTIG	559 ODER 560
---------	--------------

Merkmale

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenzen	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	4

Teilaufgabe b)

- b) Das folgende Streifendiagramm (siehe Abbildung 2) zeigt die Antworten der Befragten auf die Frage nach der Häufigkeit ihres Schokoladenkonsums.

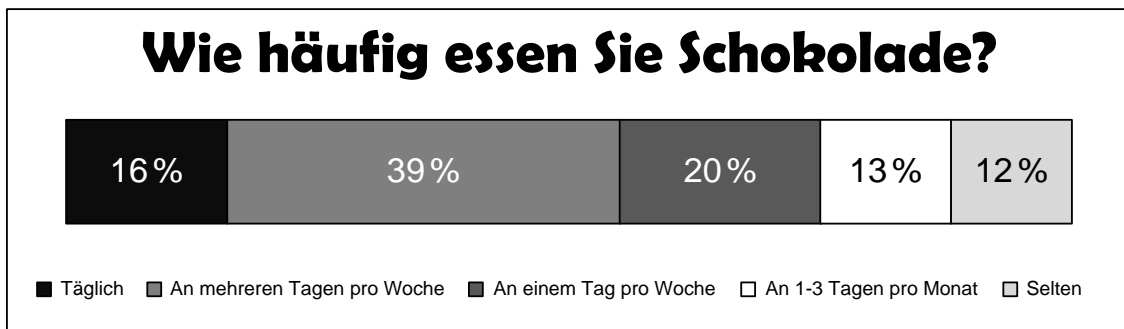


Abbildung 2

Welcher der beiden Abbildungen kann man die folgenden Informationen entnehmen?

		nur Abbildung 1	Abbildung 1 und 2
1	75 % der Deutschen essen mindestens einmal pro Woche Schokolade.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	16 % der Deutschen essen sogar täglich Schokolade.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	16 % der Deutschen essen am liebsten Nougat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Lieblingsschokolade“ gehört zur Leitidee *Daten und Zufall* (L5), da verschiedene Darstellungen zu Ergebnissen einer Befragung zum Schokoladenkonsum ausgewertet werden sollen.

In Teilaufgabe 1 ist es erforderlich, aus einer mathemathikhaltigen Grafik die Informationen, wie viel Prozent der Befragten gerne Vollmilchschokolade konsumieren und wie viele Personen befragt wurden, zu entnehmen. Dies entspricht der Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6). Zudem wird aus diesen entnommenen Werten die Anzahl an Personen, die gerne Vollmilchschokolade essen, bestimmt, was der Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) entspricht. In Teilaufgabe 2 ist die Auswertung eines Streifendiagramms gefordert, was der Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) entspricht. Zudem ist es wie in der ersten Teilaufgabe erforderlich, Informationen aus einer mathemathikhaltigen Grafik zu entnehmen und beide Darstellungsformen zweckentsprechend zu beurteilen beziehungsweise Aussagen zu den beiden Darstellungen zu erfassen und zu beurteilen. Somit erfordert diese Aufgabe ebenfalls die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6). Teilaufgabe 3 verlangt eine Begründung dafür, dass die befragten Personen mehrere Antworten auf die Frage nach Schokolade, die sie gerne essen, geben durften. Dafür ist es notwendig, dass die Schüler:innen erkennen, dass die Summe der Prozentangaben mehr als 100 % ergibt. Somit fordert diese Teilaufgabe die Kompetenz *Mathematisch argumentieren* (K1). Da ein Bezug zur Anfangsgrafik erforderlich ist, aus welcher zudem Informationen erfasst werden müssen, spricht diese Teilaufgabe ebenfalls die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) an.

Teilaufgabe 1 ist im *Anforderungsbereich II* angesiedelt, da eine komplexe mathemathikhaltige Grafik sinnentnehmend erfasst werden muss. Diese Grafik enthält viele verschiedene Informationen (Anzahl und Alter der befragten Personen, Umfrageergebnisse zu verschiedenen Fragen). Für Teilaufgabe 1 sind nicht alle dieser Informationen relevant, sodass es erforderlich ist, die für diese Teilaufgabe relevanten Informationen in der Grafik zu erfassen. Teilaufgabe 2 ist im *Anforderungsbereich III* zu verorten, da für verschiedene Informationen beurteilt werden soll, aus welcher der Darstellungen diese Informationen entnommen werden können. Teilaufgabe 3 wird dem *Anforderungsbereich II* zugeordnet, da eine mathemathikhaltige Grafik sinnentnehmend erfasst wird und Zusammenhänge in der Darstellung der Umfrageergebnisse erläutert werden.

6. Anregungen für den Unterricht

Die Gemeinsamkeit der Aufgaben „Freizeitbeschäftigungen“, „Fitnessverein“, „Zuckeranteil“, „Klassensprecherwahl“ und „Lieblingsschokolade“ besteht darin, dass alle Aufgaben **mathematische Darstellungen zu statistischen Erhebungen** enthalten, welche (sinnentnehmend) erfasst, ausgewertet und interpretiert werden müssen. So werden in allen Aufgaben Informationen aus den Darstellungen entnommen und mit diesen gearbeitet. Ein Unterschied ist jedoch darin zu erkennen, dass in den Aufgaben „Freizeitbeschäftigungen“, „Fitnessverein“, „Zuckeranteil“ und „Klassensprecherwahl“ Säulen- oder Kreisdiagramme abgebildet sind, in der Aufgabe „Lieblingsschokolade“ ist kein Diagramm, sondern eine eher alltagsbezogene mathemathikhaltige Grafik gegeben.

Zudem besteht eine Besonderheit in der Aufgabe „Klassensprecherwahl“. In dieser Aufgabe steht weniger das Auswerten des Diagramms im Vordergrund, sondern vielmehr das Problemlösen. Das einfache Ablesen von Informationen aus dem Diagramm und das Anwenden von Routineverfahren der abgelesenen Informationen sind in dieser Aufgabe nicht ausreichend. Es muss das Problem, dass der Anteil der Stimmen für Johanna in einer Gruppe mit dem Anteil der Stimmen zweier weiterer Personen dargestellt ist, mathematisch gelöst werden.

Eine mögliche **Schwierigkeit bei der Auswertung von Diagrammen** ist im Ablesen von Werten zwischen Hilfslinien zu erkennen. Ein Beispiel ist im Diagramm in der Aufgabe „Zuckeranteil“ zu sehen, in welcher die Säule für den Zuckergehalt von Apfelsaft zwischen zwei Hilfslinien endet. Diesem Problem kann dadurch entgegengewirkt werden, dass der Aufbau und der Nutzen von Skalen besprochen und das Ablesen von Werten, die nicht auf der Skala abgebildet sind, geübt wird (Prediger et al., 2017). Ein weiterer Fehler kann dadurch entstehen, dass Schüler:innen, wenn nach

der Differenz zwischen zwei Werten gefragt ist, den größeren Wert anstatt des Unterschieds nennen. Beispielsweise kann es in der Aufgabe „Fitnessverein“ passieren, dass Lernende für die Änderung der Mitgliederzahl von 2015 bis 2016 nicht 100, sondern 500 angeben, was dem größeren Wert, also der Mitgliederzahl von 2016 entspricht. Dieser Fehler kann thematisiert werden, indem im Unterricht geklärt wird, was Fragen wie „Um wie viele?“ oder „Wie viele mehr“ bedeuten (Prediger et al., 2017). Ein ähnlicher Fehler kann entstehen, wenn wie in der Aufgabe „Freizeitbeschäftigungen“ nach der Gesamtzahl der Befragten gefragt wird. Dabei ist es möglich, dass Schüler:innen den höchsten Wert des Diagramms als Antwort nennen, anstatt alle Werte zu addieren und die Gesamtzahl zu bestimmen. Im Rahmen des Projekts „Mathe sicher können“ wurden Diagnose- und Fördermaterialien zu verschiedenen Themen entwickelt, mit welchen Schwierigkeiten diagnostiziert und mit einem Förderbaustein daran gearbeitet werden kann. Die Diagnose- und Förderbausteine werden von einer Handreichung begleitet und beinhalten Kopiervorlagen für den Unterricht. Das Diagnose- und Fördermaterial gibt es auch zum Thema „Diagramme verstehen und nutzen“. Unter folgendem Link kann die Handreichung dazu abgerufen werden:

https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/docs/msk3-sr-hru_s4_200605b.pdf

Die zugehörigen Förderbausteine für den Unterricht können unter diesem Link abgerufen werden:

https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/docs/msk3-sr-s4_200605.pdf

Weitere Informationen zu den Materialien und dem Projekt „Mathe sicher können“ finden sich unter:

<https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/node/485>

Eine weitere Möglichkeit, um das **Lesen und Interpretieren von Diagrammen** im Unterricht zu üben, ist ein schrittweises Vorgehen und die Beantwortung einzelner Fragen zum Diagramm (QUA-LiS NRW, 2015). So kann sich zunächst ein grundlegender Überblick verschafft werden, indem beispielsweise zuerst die Beschriftungen und Maßeinheiten im Diagramm in den Blick genommen werden. Anschließend können Schüler:innen eigene Fragen dazu formulieren, was sie mithilfe des Diagramms herausfinden möchten. In einem nächsten Schritt kann das Diagramm dann genauer untersucht werden, indem unter anderem der Diagrammtyp bestimmt wird, die Säulen-, Kreissegmente, etc. (je nach Diagrammtyp) genauer betrachtet werden, die Beschriftung und Einheiten der Achsen analysiert oder der größte und kleinste Wert oder besonders auffällige Werte in den Blick genommen werden. Weiterführend können Schüler:innen Aufgaben formulieren, die mit dem Diagramm beantwortet oder bewusst nicht beantwortet werden können. Eine Checkliste mit einzelnen Schritten und Fragen zum Lesen von Diagrammen sowie verschiedene Aufgaben, die Diagramme enthalten, können unter dem folgenden Link abgerufen werden:

https://www.schulentwicklung.nrw.de/e/upload/lernstand8/download/mat_2015/LS8_2015_MA_Diagramme_Lesen_statistischeDiagramme.pdf

Werden verschiedene Diagrammtypen besprochen, so sollte auch darauf eingegangen werden, dass verschiedene Darstellungen unterschiedliche Aspekte fokussieren. Bei der Darstellung von Umfrageergebnissen, bei welchen Mehrfachantworten zulässig waren, beispielsweise in der Darstellung der Aufgabe „Lieblingsschokolade“, beträgt die Summe der relativen Häufigkeiten mehr als 100%. Somit eignet sich ein Kreisdiagramm für die Darstellung dieser Daten nicht (Krüger et al., 2015). Säulen- oder Balkendiagramme bieten sich hingegen auch für die Darstellung von Daten, bei welchen die Summe der relativen Häufigkeiten mehr als 100% beträgt, an. Säulendiagramme können neben der Darstellung von Häufigkeitsverteilungen auch für die Darstellung von Rohdaten genutzt werden. Wird in einer Klasse zum Beispiel eine Umfrage über die Geschwisterzahlen der Schüler:innen gemacht, können zunächst die Geschwisterzahlen der einzelnen Kinder als Säulen dargestellt werden. Anschließend kann ein Häufigkeitsdiagramm der Geschwisterzahlen erstellt werden. Wegen der Möglichkeit, in Säulendiagrammen sowohl Rohdaten als auch Häufigkeitsverteilungen darzustellen, sollte beim Auswerten dieser die Bedeutung der Achsen besonders in den Blick genommen werden. Balkendiagramme stellen eine alternative Darstellung von Häufigkeitsverteilungen zu Säulendiagrammen dar. Sie werden häufig für die Darstellung einer größeren Zahl an Merkmalsausprägungen verwendet. Um selbst erhobene Daten wie zum Beispiel

Wetterdaten darzustellen, bietet sich neben einem Säulendiagramm der Rohdaten auch ein Liniendiagramm an.

Um Schüler:innen auch mit komplexeren Diagrammen vertraut zu machen, können zum Beispiel Klimadiagramme ausgewertet werden. Diese zeichnen sich durch die Besonderheit aus, dass sie sowohl ein Linien- als auch ein Säulendiagramm enthalten und somit sowohl die Temperatur als auch den Niederschlag über einen gewissen Zeitraum darstellen. Eine Beispielaufgabe ist in Abbildung 3 zu sehen.

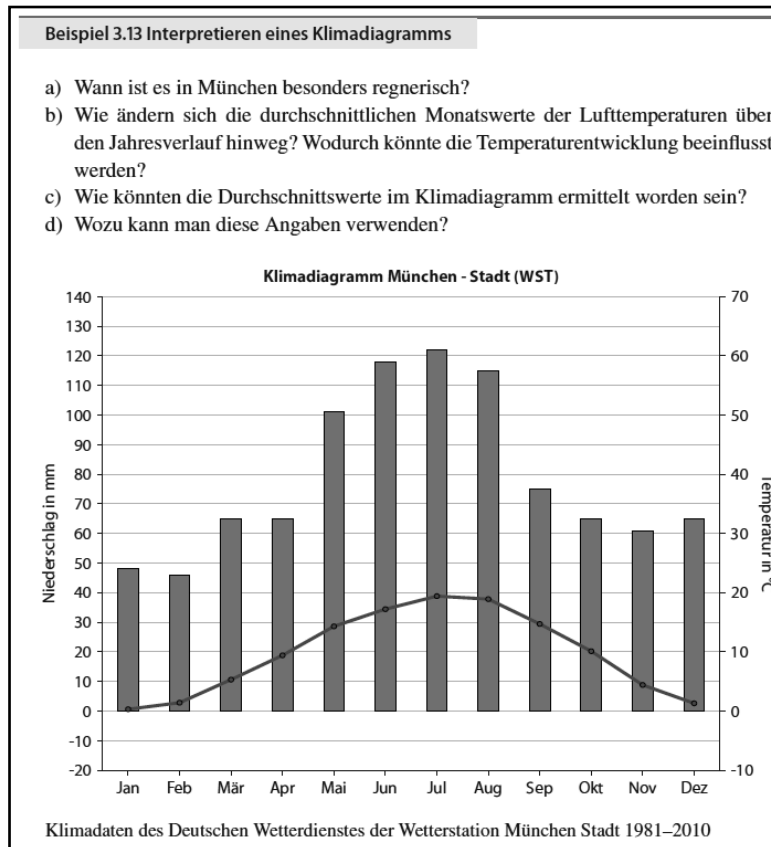


Abbildung 4: Beispielaufgabe zur Auswertung eines Klimadiagramms (Krüger et al., 2015).

Bei Diagrammen können **ungünstige Darstellungen** dazu führen, dass auf den ersten Blick eine Argumentation vermittelt wird, die sich bei einer genaueren Analyse widerlegt (Scherrmann, 2013). So wird in der Aufgabe „Zuckeranteil“ im Diagramm in der dritten Teilaufgabe nicht mehr die Proportionalität zwischen Zuckeranteil und Säulenlänge abgebildet, wodurch der hohe Zuckergehalt von Orangensaft auf den ersten Blick deutlich geringer scheint. Weitere ungünstige Darstellungen können zum Beispiel durch die ungleichmäßige Einteilung der Achsen oder die Auswahl der Achsenausschnitte oder Einheiten entstehen. Um auf solche irreführenden Darstellungen aufmerksam zu werden, können folgende Fragen bei der Auswertung von Diagrammen hilfreich sein: „Was möchte mir die grafische Darstellung sagen? Welche Argumentation legt sie mir nahe? Inwiefern stellt diese grafische Darstellung eine Reduktion dar – was wird also ausgeblendet?“ (Scherrmann 2013, S. 163).

Des Weiteren ist die direkte Thematisierung von irreführenden Darstellungen oder der **Manipulation** von Diagrammen im Unterricht denkbar. So können beispielsweise verschiedene Darstellungen in Diagrammen des gleichen Sachkontextes verglichen werden, sodass Schüler:innen lernen, manipulative Darstellungen zu erkennen. Beispielaufgaben finden sich in folgendem digitalen Lernpfad, in welchem die Manipulation von Linien-, Säulen- und Kreisdiagrammen thematisiert wird. Dieser Lernpfad ist frei zugänglich und kann auch im Unterricht eingesetzt werden:

https://unterrichten.zum.de/wiki/Diagramme_auswerten_und_interpretieren/Mit_Diagrammen_manipulieren

Um bei Schüler:innen den Blick für solche verharmlosenden Darstellungen (wie bei dem Zuckergehalt des Orangensafts) und Ungenauigkeiten oder Unterschiede in der Aussagekraft von Darstellungen zu schulen, sollten neben der Behandlung von irreführenden Darstellungen auch der **kritische Umgang mit Datenmaterial** allgemein geübt werden. In der Aufgabe „Fitnessverein“ scheint es im Diagramm der Mitgliederzahlen so, als seien die Mitgliederzahlen ein Vielfaches von 100. Da dies nicht der Realität entspricht, könnte sich beispielsweise die Fragen ergeben, ob es sich um gerundete Mitgliederzahlen in der Darstellung handelt. So kann anhand dieser Aufgabe überlegt werden, wie realistisch oder genau die dargestellten Daten sind. Mögliche Fragen, die auf den kritischen Umgang mit Daten abzielen, können die kritische Analyse von grafischen Darstellungen im Unterricht unterstützen: Welche Aussagekraft haben die Daten in ihrer Genauigkeit? Handelt es sich in der Darstellung um gerundete Werte (wenn ja, auf welche Stelle wurde gerundet)? Sind es errechnete oder gezählte Werte? Sind die dargestellten Werte realistisch? Unter anderem eignen sich Vorhersagen und Ergebnisse von politischen Wahlen als Kontext, um diese Fragen exemplarisch zu erarbeiten und so den kritischen Umgang mit Daten zu üben.

7. Literatur

- Biehler, R. & Engel, J. (2015). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 221–251). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Biehler, R. & Hartung, R. (2010). Leitidee Daten und Zufall. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (S. 51–80). Berlin: Cornelsen.
- Blum, W. (2010). Einführung. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (S. 14–32). Berlin: Cornelsen.
- Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht. Didaktische Perspektiven des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Berlin: Springer Spektrum.
- <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>
- Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E. & Vollmer, H. J. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. In BMBF (Hrsg.), *Bildungsreform Band 1. Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: Eine Expertise* (S. 7–174). Berlin.
- KMK (2004): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Beschluss vom 4.12.2003. München: Luchterhand.
- KMK (2005): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss*. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand.
- KMK (2005b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand.
- KMK (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Köln: Carl Link.
- Krüger, K., Sill, H.-D. & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Leiss, D. & Blum, W. (2010). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (S. 33–50). Berlin: Cornelsen.
- OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.
- Vogel, M. & Eichler A. (2010). Leitidee Daten und Zufall in der Sekundarstufe I. In A. Lindmeier & S. Ufer. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 879-882). Münster: WTM-Verlag.
- Wild, C.J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review* 67(3), 223–248.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 21(61), 37–46.

8. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards	6
Abbildung 2: Visualisierung des Aspekts der gleichmäßigen Verteilung in Anlehnung an Krüger et al. (2015) am Beispiel der Aufgabe „Training für Langstreckenlauf“	27
Abbildung 3: Ausgleichsaspekt des arithmetischen Mittels verdeutlicht am Säulendiagramm in Anlehnung an Krüger et al. (2015) am Beispiel der Aufgabe „Training für Langstreckenlauf“	28
Abbildung 4: Beispielaufgabe zur Auswertung eines Klimadiagramms (Krüger et al., 2015).	48

9. Verzeichnis der Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1: „Bistroumfrage“ - Teilaufgabe 1	12
Beispielaufgabe 2: „Bistroumfrage“ - Teilaufgabe 2	13
Beispielaufgabe 3: „Schulkleidung“ - Teilaufgabe 1	14
Beispielaufgabe 4: „Schulkleidung“ - Teilaufgabe 2	15