Kompetenzen ermitteln

Mathematik

Didaktisches Material

2023

3

Inhaltsverzeichnis

Autor*innen der fachdidaktischen Orientierungen sind Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Prof. Dr. Kristina Reiss und Dr. Heino Reimers.

Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

Wussten Sie, dass Sie viele KERMIT-Aufgaben und Didaktische Materialien auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1. Einleitung

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Ferner werden die mathematischen Kompetenzbereiche *Muster und Strukturen* sowie *Größen und Messen* erläutert und an konkreten Aufgabenbeispielen illustriert. Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Standards vorgegebenen Ziele bietet. Dabei wird auf die beiden Domänen *Muster und Strukturen* sowie *Größen und Messen* kurz eingegangen. Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Aufgaben sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren (Teil III) zu finden.

2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

2.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schüler*innen bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unter-schieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schüler*innen zu verbessern. Entsprechend sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind damit auch Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,[1]

---

[1] In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich" der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject) ist die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten" nicht enthalten. Im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik für den Primarbereich wurden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten" ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den

- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,
- Darstellen,
- Modellieren.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf fünf mathematische Leitideen:

- Zahlen und Operationen,
- Raum und Form,
- Muster und Strukturen,
- Größen und Messen,
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Diese Leitideen sollen den Schüler*innen helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (Kultusministerkonferenz, 2005).

2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Ausrichtung von Mathematikunterricht. Im Sinne der „Output-Orientierung" ist von Interesse, was Schüler*innen verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge hinsichtlich der allgemeinen und inhaltsbezogenen Kompetenzen „tatsächlich können".

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schüler*innen – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen „Kompetenzstufen" zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilf-reiche Orientierungen geben kann.

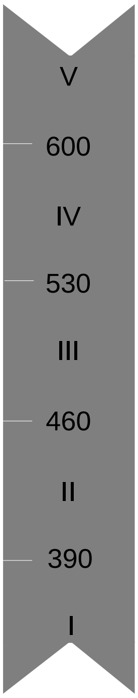
Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell[2] erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller, 2012; Reiss & Winkelmann, 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der

---

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)" in der Fassung vom 11.02.2013 unter https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm.

[2] Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich wurden 2004 verabschiedet und 2022 weiterentwickelt. Die bisher vorliegenden Kompetenzstufenmodelle, auf die sich das vorliegende didaktische Material bezieht, wurden auf Basis der Bildungsstandards von 2004 entwickelt. Mit der Normierung neu entwickelter Testaufgaben nach den Bildungsstandards von 2022 werden ab 2027 neue Kompetenzstufenmodelle vorliegen.

mathematischen Kompetenz von Schüler*innen am Ende der vierten Jahrgangsstufe.



Optimalstandard: Kompetenzstufe V (Punktwerte ab 600):
Modellierung komplexer Probleme unter selbständiger Entwicklung geeigneter Strategien

Regelstandard plus: Kompetenzstufe IV (Punktwerte von 530 bis 599):
sicheres und flexibles Anwenden begrifflichen Wissens und Prozeduren im curricularen Umfang

Regelstandard: Kompetenzstufe III (Punktwerte von 460 bis 529):
Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen in einem vertrauten (mathematischen und sachbezogenen) Kontext

Mindeststandard: Kompetenzstufe II (Punktwerte von 390 bis 459):
einfache Anwendungen des Grundlagenwissens (Routineprozeduren in einem klar strukturierten Kontext)

Kompetenzstufe I (Punktwerte unter 390):
technische Grundlagen (Routineprozeduren auf Grundlage einfachen begrifflichen Wissens)

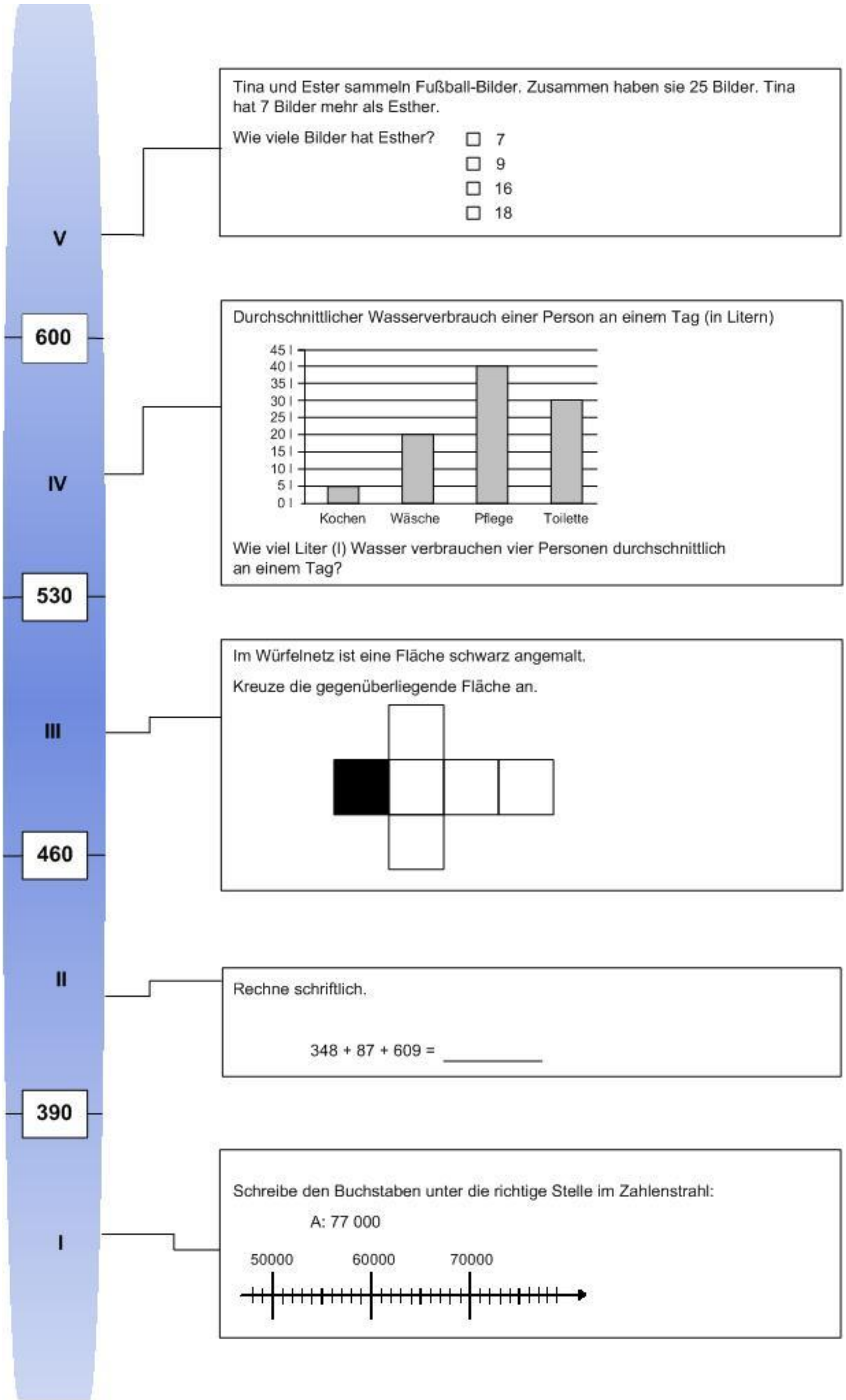
Abbildung 1.: Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.

Mindeststandard. Für den Mindeststandard wurde das obere Ende von Kompetenzstufe I als Schwellenwert gewählt. Alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts stellen nur solche Anforderungen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schüler*innen des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss. Deshalb spricht man hier vom Mindeststandard des Bildungsgangs. Schüler*innen, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

Regelstandard. Der *Regelstandard*, den die Schüler*innen zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schüler*innen, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der Kultusministerkonferenz (KMK) festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch von sehr schwachen Schüler*innen gelöst werden können.

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet:



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abbildung 2.: Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben, siehe S. 14 des Kompetenzstufenmodells in der Fassung vom 11.02.2013 unter https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm.de

3. Die Leitidee Daten, Formen und Wahrscheinlichkeit

3.1 Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein?

Der Kompetenzbereich Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit hat höchste praktische Relevanz und eröffnet somit zahlreiche anwendungsbezogene Übungsfelder. In den Bildungsstandards umfasst die Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit drei wesentliche zusammenhängende Aspekte mit zahlreichen mathematischen Bezügen: Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit. In der kurzen Darstellung der Bildungsstandards werden davon die folgenden Kompetenzen explizit genannt:

- Daten erfassen und darstellen
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen[3]

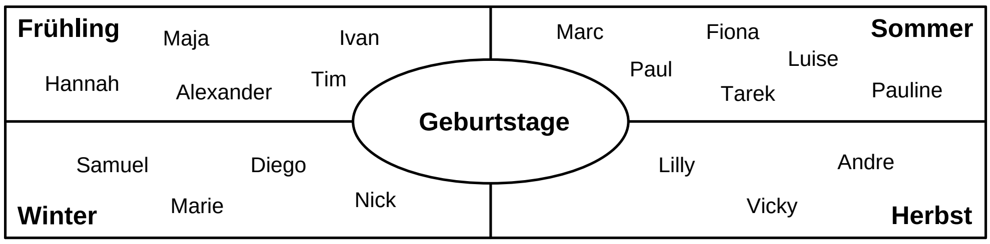
Demgegenüber sind Kompetenzen im Bereich *Häufigkeiten* eher implizit vorhanden. Beim Entwerfen von Aufgaben müssen allerdings alle Aspekte in den Blick genommen werden. Daher werden an dieser Stelle die unterschiedlichen Herausforderungen für alle drei Bereiche anhand entsprechender Beispiele aus KERMIT-3 erläutert.

[3] siehe Kultusministerkonferenz 2005, S. 11 unter https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject.

3.2 Daten erfassen und darstellen

Wie die Aufgabe „Geburtstag“ (Abbildung 3) zeigt, umfasst der Bereich Daten zum einen das Darstellen von Daten in Schaubildern, Diagrammen und Tabellen. Dies kann vor allem im Unterricht besonders auf der Basis von Daten geschehen, die selbst gesammelt und strukturiert wurden. Zum anderen sollen aber auch gezielt Daten aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen entnommen werden. So ist es in der dargestellten Aufgabe erforderlich, der Abbildung die entsprechenden Anzahlen zu entnehmen, um diese im weiteren Verlauf in das Diagramm einzeichnen zu können.

Die Kinder haben eine Umfrage gemacht.



Zeichne die Ergebnisse für Frühling und Sommer in das Diagramm ein.

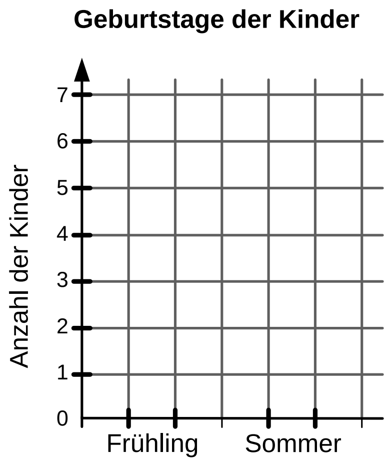
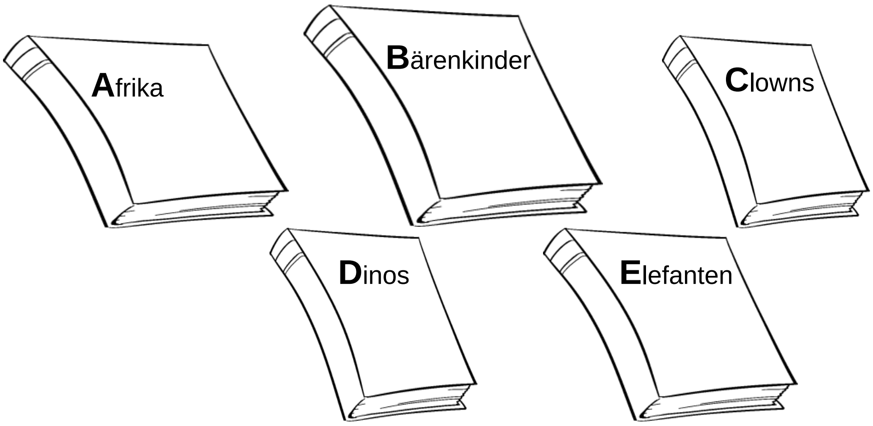


Abbildung 3 Aufgabe "Geburtstag", KERMIT-3 Mathematik 2019

Der Umgang mit Daten stellt einen wichtigen Aspekt für eine Propädeutik der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar. Außerdem ist er geeignet, verschiedene Repräsentationsebenen anzusprechen und damit auch den Ausbau der allgemeinen Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden“ zu stärken.

3.3 Häufigkeiten

Ein weiterer Aspekt im Hinblick auf den Umgang mit Wahrscheinlichkeiten ist das Betrachten von Möglichkeiten (etwa für das Ergebnis eines Zufallsexperiments). In der Überschrift der Leitidee wird dabei der Begriff „Häufigkeit“ gewählt. Nun ist dieser Begriff eng mit kombinatorischen Überlegungen verbunden. Gerade Aufgaben zur Kombinatorik, wie die Aufgabe „Bücher“ (Abbildung 4), ermöglichen ein systematisches Zählen oder strategisches Ermitteln der Anzahl von Kombinationsmöglichkeiten und bereitet sinnvolles Argumentieren im Bereich Wahrscheinlichkeit vor. Um dies auch in der Schulpraxis besser zu verankern, werden Aufgaben zur Kombinatorik unter dieser Leitidee in die Vergleichsarbeiten integriert. Davon ist unbenommen, dass entsprechend der Systematik der Bildungsstandards Aufgaben dieses Typs ggf. auch dem Inhaltsbereich „Zahlen und Operationen“ zugeordnet werden können.



Leo darf sich zwei Bücher ausleihen.

Schreibe alle Möglichkeiten auf. Nutze die Anfangsbuchstaben.

AB, ____

____

Abbildung 4: Aufgabe „Bücher“, KERMIT-3 Mathematik 2019

3.4 Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen

Den inhaltlichen Schwerpunkt *Wahrscheinlichkeit* im engeren Sinne umzusetzen gestaltet sich etwas schwieriger. So gibt es hier wenige Aufgabentypen, die bereits für die Grundschule geeignet sind. Es darf nicht vergessen werden, dass wichtige Grundlagen einer systematischen Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie etwa die Bruchrechnung, in der Grundschule noch nicht behandelt sind. Es darf auch nicht vergessen werden, dass gerade in diesem Inhaltsbereich Intuition und mathematische Theorie nicht immer konform gehen. So wird etwa der Begriff „wahrscheinlich“ umgangssprachlich eher mit „guten Chancen“ verbunden, während der Begriff „unwahrscheinlich“ auf eher „schlechte Chancen“ hindeutet. In der mathematischen Umsetzung ist nur der Begriff der „Wahrscheinlichkeit“ verankert, die durch einen Wert zwischen 0 und 1 ausgedrückt wird. Dabei bezeichnet „0“ ein unmögliches Ereignis und „1“ ein sicheres Ereignis. Bei einer Wahrscheinlichkeit von 1/6 tritt ein Ereignis auf lange Sicht in einem von sechs Fällen ein, so wie es etwa beim Würfeln einer „5“ der Fall ist. Bei einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 ist ungefähr die Hälfte der Fälle „günstig“, was beispielsweise für den Münzwurf oder das Würfeln einer geraden Zahl gilt. Nun aber jeweils klar zu sagen, ob ein bestimmter Wert zwischen 0 und 1 den umgangssprachlichen Begriffen „wahrscheinlich“ bzw. „unwahrscheinlich“ zuzuordnen ist, wäre wenig sinnvoll. Entsprechend sind daher Begriffe wie „wahrscheinlich“ oder „unwahrscheinlich“ für KERMIT nicht geeignet, könnten sie doch eher verwirrend als klärend sein – allenfalls in Vergleichen ist es sinnvoll, davon zu sprechen, dass ein Ereignis wahrscheinlicher ist als ein anderes oder weniger wahrscheinlich. Wie die Aufgabe „Zufallsexperimente“ (Abbildung 5) zeigt, bieten sich als Grundbegriffe „möglich, aber nicht sicher“, „sicher“ und „unmöglich“ an.

Kreuze an.

Eine 5 als Ergebnis ist ...

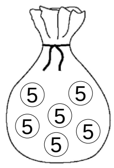
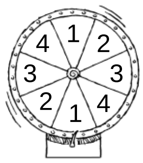
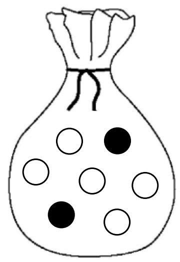
	sicher	möglich, aber nicht sicher	unmöglich
	☐	☐	☐
	☐	☐	☐
	☐	☐	☐

Abbildung 5: Aufgabe „Zufallsexperimente“, KERMIT-3 Mathematik 2019

Neben der *Kenntnis der Grundbegriffe*, sollen die Schüler*innen im Bereich der Wahrscheinlichkeit auch *Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten einschätzen*. Die Aufgabe „Kugeln“ (Abbildung 6) zeigt, wie dies umgesetzt werden kann.



Kira sagt: „Es ist wahrscheinlicher eine weiße Kugel zu ziehen als eine schwarze Kugel.“

Hat Kira recht? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.

Abbildung 6: Aufgabe „Kugeln“, KERMIT-3 Mathematik 2019

Aufgrund der Komplexität der Aufgaben ist es sicher sinnvoll, diese, wenn möglich, in einen kindgerechten Kontext einzubetten, welcher der Lebenswelt der Kinder entstammt. Hierzu zählen besonders Würfelspiele oder der Münzwurf.

4. Weitere Anregungen für den Unterricht

Aufgaben wie die in KERMIT-3 können nicht nur zur Feststellung des Leistungsstandes, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den Schüler*innen zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Fähigkeiten der Schüler*innen angepasste Auswahl kompetenzorientierter Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so belegen es viele empirische Untersuchungen – ausreichend Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse nationaler und internationaler Leistungsvergleiche weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schüler*innen im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Kinder und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus.

Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind z. B. in Hirt & Wälti (2008) oder Walther et al. (2012) enthalten.

Die im Folgenden stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden[4].

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die den Kindern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren usw.), und bei der vielfältige Vernetzungen sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität hergestellt werden.
- Eine *konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden* in einem Unterricht, der geistige Schüler*innentätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schüler*innenorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird und Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind.

---

[4] Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum et al. (2006).

Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d. h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schüler*innen gleichermaßen geeignet sind).

Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, da sie Schüler*innen ermöglichen, entsprechend ihrer Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schüler*innenlösungen präsentieren und diskutieren lassen.

5. Literaturverzeichnis

Blum, W. (2006). Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32); Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Hirt, U. & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Hannover: Friedrich Verlag.

Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2013). *Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) in der Fassung vom 11.02.2013*. (https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm)

KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. Beschluss vom 15.10.2004. (https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject und https://www.kmk.org/de/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html)

Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule, 40 (10),* 34-37.

Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule (S. 120-141). Weinheim: Beltz.

Reiss, K., Roppelt, A., Haag, N., Pant, H. A. & Köller, O. (2012). Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S. 72-84). Münster: Waxmann.

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (2012). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret.* Berlin: Cornelsen Verlag.

Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Weinheim: Beltz.

6. Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein?

Daten aus unterschiedlichen Größenbereichen und Sachzusammenhängen sind die Grundlage für eine systematische Betrachtung von Ereignissen und deren Auftreten in der Lebenswirklichkeit. Die quantitative Ermittlung von Häufigkeiten (Wie oft?) spielt hierbei eine zentrale Rolle. Häufigkeiten stehen wiederum in engem Zusammenhang mit kombinatorischen Überlegungen (Wie viele Möglichkeiten gibt es?) und der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten (Wie viele Möglichkeiten gibt es für ein Ereignis im Vergleich zu einem anderen? Und Schlussfolgerungen daraus: Wie sind die Gewinnchancen?). Der Inhaltsbereich DHW (Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit) befasst sich inhaltlich also maßgeblich mit der Erfassung, Ermittlung, systematischen Betrachtung und Interpretation von Daten unter anderem auf der Basis von Häufigkeiten – sowohl in realen Kontexten als auch in Kontexten, in denen Aussagen über Wahrscheinlichkeiten erforderlich sind. Auf diese unterschiedlichen Aspekte wird im Folgenden eingegangen.

6.1 Daten

Daten enthalten aufbereitet in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen zu lebensweltlichen Sachzusammenhängen (im Inhaltsbereich DHW: „Daten erfassen und darstellen"). Tabellen und Diagramme haben den Vorteil, dass sich die darin enthaltenen numerischen Informationen zu Sachverhalten schnell erfassen lassen. Hierfür müssen Überschriften, (Achsen-)Beschriftungen oder Legenden zu den abgebildeten Werten in Beziehung gesetzt werden. Zugleich sind den verschiedenen Darstellungsformen zum Teil unterschiedliche Auskünfte zu entnehmen[5].

Statistische Darstellungsformen (kritisch) lesen zu können, gewinnt in der Informationsgesellschaft zunehmend an Bedeutung. Das sinnentnehmende Lesen und Deuten solcher nicht-kontinuierlichen Texte, wie sie Tabellen und Schaubilder darstellen, ist für viele Kinder (und auch manche Erwachsene) aber eine Herausforderung. Dies ist besonders dann der Fall, wenn nicht nur einfache Zahlenwerte bzw. Häufigkeiten abgelesen werden, sondern wenn Daten für weitergehende Rechnungen und Interpretationen verglichen und miteinander in Beziehung gesetzt werden müssen. Eng verknüpft ist damit die Kompetenz, Daten zu einem Erkenntnisinteresse selbst zu erheben, zu dokumentieren (z. B. mithilfe von Strichlisten) und mithilfe von Tabellen und/oder Schaubildern übersichtlich und für andere lesbar darstellen zu können (z. B. Wer bekommt die meisten Stimmen bei der Klassensprecherwahl? Fernseh-/Handykonsum in einer Woche). Dies gelingt Kindern nur, wenn sie eine gewisse Routine im Umgang mit und dem Darstellen von Daten entwickeln. Einige Fragen, die im Vorhinein geklärt werden sollten, sind:

1. Was will ich erfahren?
2. Wie sammele ich die Daten möglichst geschickt?

[5] z. B. <u>Tabelle</u>: Überblick zu absoluten Häufigkeiten (Anzahlen), <u>Säulen- und Balkendiagramm</u>: absolute und relative Häufigkeit durch einen Vergleich der Höhe bzw. Länge der Balken/Säulen, <u>Kreisdiagramme</u>: relative Häufigkeit durch einen Vergleich der Größe der Kreissegmente

3. Was will ich in einer Tabelle / in einem Diagramm veranschaulichen?
4. Welche Darstellungsform eignet sich (Tabelle, Balken-/Säulendiagramm, Kreisdiagramm[6], Piktogramme)?
5. Welche Einteilung der Achsenwerte (Skalierung) ist sinnvoll? Welche nicht? Warum?
6. Nützen mir Hilfsmittel (z. B. Skizzen anfertigen, Karopapier für das Einhalten von Abständen und Breiten)?

Neben Vernetzungen zu inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen, wie Größen und Messen, Zahlen und Operationen sowie Raum und Form zeigen sich hierbei auch Möglichkeiten für die Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen (Kommunizieren, Problemlösen, Argumentieren, Modellieren, Darstellen).

6.2 Wahrscheinlichkeit

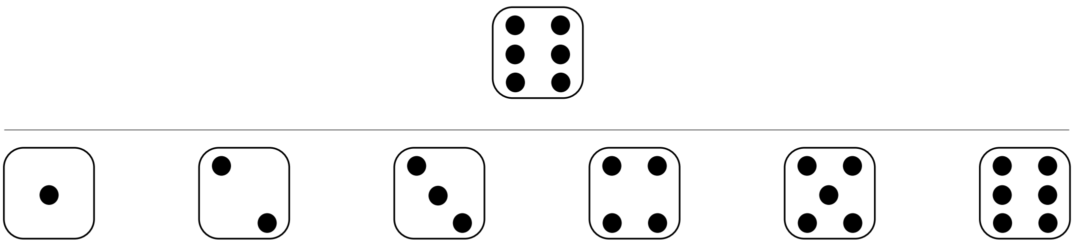
Im Inhaltsbereich DHW geht es zudem um das begründete Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten („Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen“). Dies beinhaltet, dass subjektive Vorstellungen von Zufall und Glück bei einfachen Zufallsexperimenten mathematisch hinterfragt und zum Eintreffen von Ereignissen begründete Vermutungen angestellt werden können. Für den Unterricht in der Grundschule sind zwei Herangehensweisen für die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten relevant:

1. Theoretische Wahrscheinlichkeit:

Bei einfachen Zufallsexperimenten, z. B. mit Würfel oder Münze, wird davon ausgegangen, dass sich die Gewinnchance für ein Ereignis (‚Bild oder Zahl‘, ‚Würfeln einer Zahl von 1 bis 6‘) aufgrund der geometrischen Eigenschaften der Körper nicht unterscheidet, also gleich ist. Die Wahrscheinlichkeit lässt sich dann aus der Anzahl aller für ein Ereignis günstigen Ergebnisse im Verhältnis zu der Anzahl aller möglichen Ergebnisse ermitteln und an folgendem Bruch am Beispiel des Würfels veranschaulichen:

Beispiel:

Wie ist die Gewinnchance für das Würfeln einer Sechs?



Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1/6.

[6] Für Grundschulkinder ist dies schwierig, da für eine eigenständige Einteilung der Kreissegmente Wissen zu Bruchrechnung und Winkelberechnungen notwendig sein kann.

2. Frequentistische Wahrscheinlichkeit:

Nach dem Gesetz der großen Zahlen „nähert sich die Häufigkeit, mit der ein Zufallsereignis eintritt, seiner rechnerischen Wahrscheinlichkeit immer weiter an, je häufiger ein Zufallsexperiment durchgeführt wird“ (Statista, 2023). Praktisch bedeutet dies, dass Kinder Zufallsexperimente mit vielen Wiederholungen (mind. 100-mal) durchführen, ihre Ergebnisse dokumentieren, um daraus entdeckend auf Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen von Ereignissen zu schließen. Hierbei besteht eine enge Verknüpfung mit dem Bereich Daten: Es werden Daten erfasst, systematisch notiert, dargestellt und interpretiert.

Wie auch beim Ermitteln, Darstellen und Lesen von Daten und Häufigkeiten zeigt sich, dass das Sammeln von praktischen Erfahrungen für ein Verständnis stochastischer Aufgaben grundlegend ist. Hieran lassen sich auch Begrifflichkeiten, wie *sicher, möglich, unmöglich* klären und ein Verständnis für Vergleiche im Sinne von „A ist wahrscheinlicher als B“ entwickeln. Die Begrifflichkeiten sind Kindern zwar meist aus dem allgemeinen Sprachgebrauch bekannt, müssen sich aber nicht notwendigerweise mit der mathematischen Bedeutung decken (z. B. Ist es unmöglich, dass ich zehnmal hintereinander die 6 würfle?).

6.3 Kombinatorik

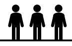
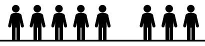
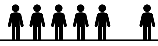
Das systematische Zählen bei der Betrachtung von Häufigkeiten und Kombinationsmöglichkeiten aus dem Kompetenzbereich Zahlen und Operationen („einfache kombinatorische Aufgaben [z. B. Knobelaufgaben] durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen“) schult das kombinatorische Denken und bereitet sinnvolles Argumentieren im Bereich Wahrscheinlichkeit vor. Aus diesem Grund werden Aufgaben zur Kombinatorik auch im Zusammenhang mit der Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit betrachtet. Gerade bei Aufgaben zur Kombinatorik zeigt sich eine enge Verbindung der Domänen Zahlen und Operationen mit Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit sowie mit allgemeinen prozessbezogenen Kompetenzen. Geht man kombinatorische Heranforderungen selbstentdeckend an, spielt dabei vor allem das Problemlösen eine wichtige Rolle. Für die strukturierte Dokumentation der Möglichkeiten an Versuchsausgängen ist aber auch das Entwickeln geeigneter Darstellungen notwendig (z. B. das Baumdiagramm).

7. Aufgaben zu Daten

Aufgabe 33 in Testheft B

Zwei Klassen wurden befragt, was sie beim nächsten Ausflug unternehmen wollen.
Die Klassen haben ihre Ergebnisse unterschiedlich dargestellt.

Klasse 3a

	Anzahl der Kinder
Wandern	
Museum	
Burg	
Klettern	

 1 Kind

Klasse 3b

	Anzahl der Kinder
Wandern	J J J J M M
Museum	J M M M
Burg	J J J J M M M M
Klettern	J J J J J M M M M

J: 1 Junge

M: 1 Mädchen

Kann man diese Fragen beantworten?
Kreuze an.

	ja	nein
Wie viele Kinder wurden insgesamt in beiden Klassen befragt?	☐	☐
Wie viele Mädchen wurden insgesamt in beiden Klassen befragt?	☐	☐
Wie viele Kinder haben in der Klasse 3a „Wandern“ gewählt?	☐	☐
In welcher Klasse sind weniger Kinder?	☐	☐

Auswertung

RICHTIG

	ja	nein
Wie viele Kinder wurden insgesamt in beiden Klassen befragt?	☒	☐
Wie viele Mädchen wurden insgesamt in beiden Klassen befragt?	☐	☒
Wie viele Kinder haben in der Klasse 3a „Wandern“ gewählt?	☒	☐
In welcher Klasse sind weniger Kinder?	☒	☐

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	V

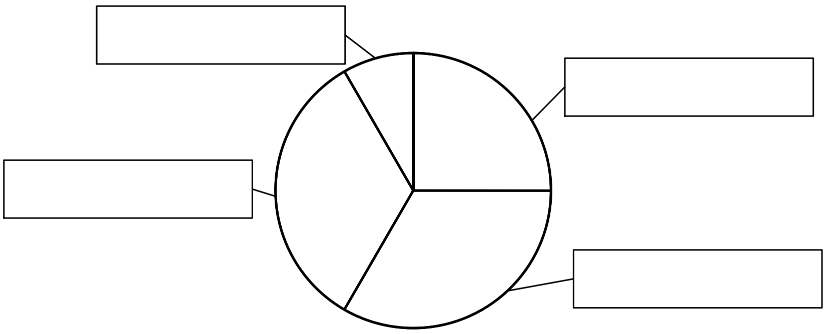
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten (5.3)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)

Aufgabe 25 in Testheft C

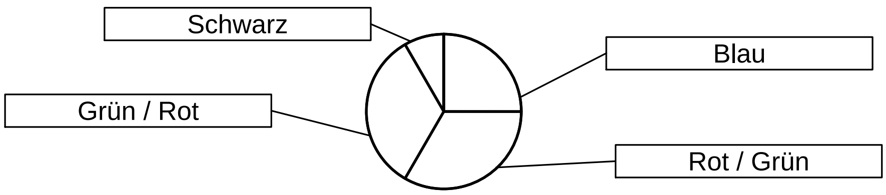
Lieblingsfarben

Schwarz mögen die wenigsten.
Rot und Grün mögen gleich viele Kinder.
Ein Viertel der Kinder mag Blau.

Beschrifte das Diagramm.



Auswertung

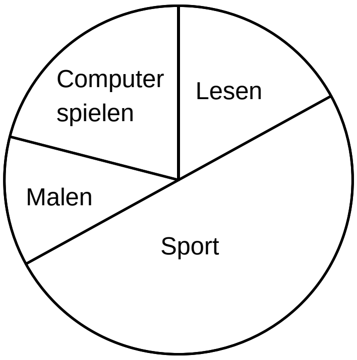
RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik 

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen (5.1.a)

Aufgabe 30 in Testheft B

24 Kinder haben angegeben, was sie am Nachmittag am liebsten machen möchten.



Wie viele Kinder möchten am liebsten Sport treiben? _________ Kinder

Auswertung

RICHTIG	12

Aufgabenmerkmale

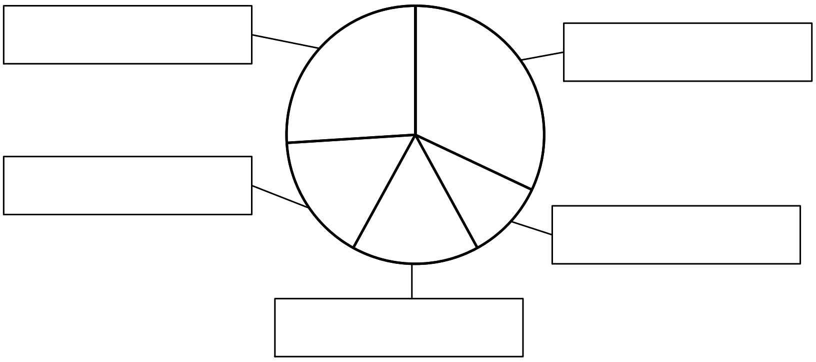
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)

Aufgabe 26 in Testheft B

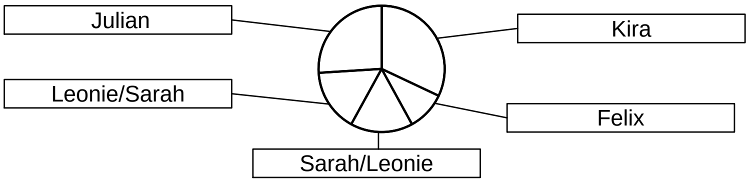
Taschengeld der 5 Kinder der Familie Schmid

Kira bekommt am meisten.
Felix bekommt am wenigsten.
Leonie bekommt weniger als Julian.
Sarah bekommt genauso viel wie Leonie.

Trage die Namen der Kinder ein.



Auswertung

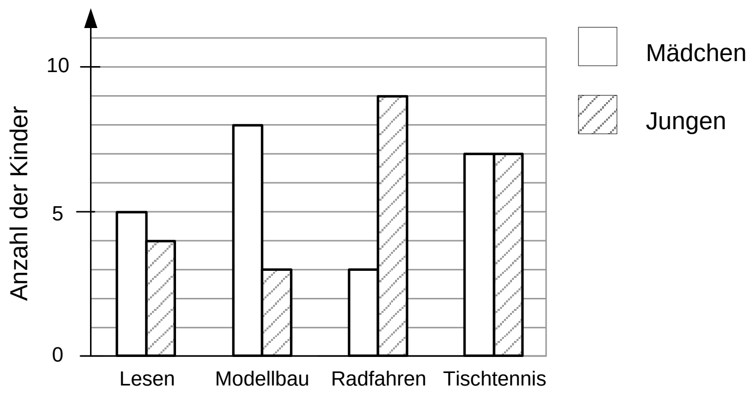
RICHTIG	

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen (5.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen (5.1.a)

Aufgabe 31 in Testheft B

Umfrage zu den Kursen am Nachmittag



Kreuze an.

	stimmt	stimmt nicht
Lesen wählen drei Mädchen.	☐	☐
Lesen wählen die wenigsten Kinder.	☐	☐
Tischtennis wählen gleich viele Jungen und Mädchen.	☐	☐
Modellbau wählen mehr Mädchen als Jungen.	☐	☐

Auswertung

		stimmt	stimmt nicht
RICHTIG	Lesen wählen drei Mädchen.	☐	☒
	Lesen wählen die wenigsten Kinder.	☒	☐
	Tischtennis wählen gleich viele Jungen und Mädchen.	☒	☐
	Modellbau wählen mehr Mädchen als Jungen.	☒	☐

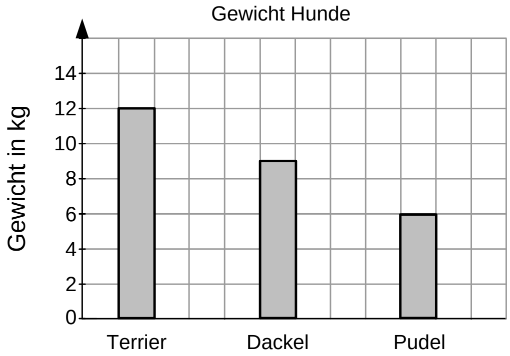
Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)

Aufgabe 31 in Testheft C

Fiona hat zu der Tabelle ein Diagramm gezeichnet.

Gewicht verschiedener Hundearten	
Terrier	6 kg
Dackel	9 kg
Pudel	12 kg



Ist ihr Diagramm richtig? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.

____

____

Auswertung

RICHTIG	NEIN wurde angekreuzt UND es wurde eine Begründung gegeben, die erkennen lässt, dass zwei Werte vertauscht wurden, z. B.: • Der Terrier und der Pudel sind falsch, (der Dackel ist richtig). • Beim Terrier muss die Säule bis 6 kg gehen und beim Pudel bis 12 kg. • Bei zwei Hunden ist das Gewicht vertauscht, nur der Dackel ist richtig. Als Begründung reicht das Benennen eines Fehlers. • Der Terrier wiegt nicht 12 kg, sondern 6 kg.
FALSCH	JA wurde angekreuzt ODER NEIN wurde angekreuzt UND/ODER keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben oder eine Begründung, die sich nicht auf die beiden vertauschten Werte bezieht, z. B.: • weil die Tabelle falsch ist • weil alles vertauscht ist • weil die Tiere zu viel wiegen

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3); Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten (5.3)

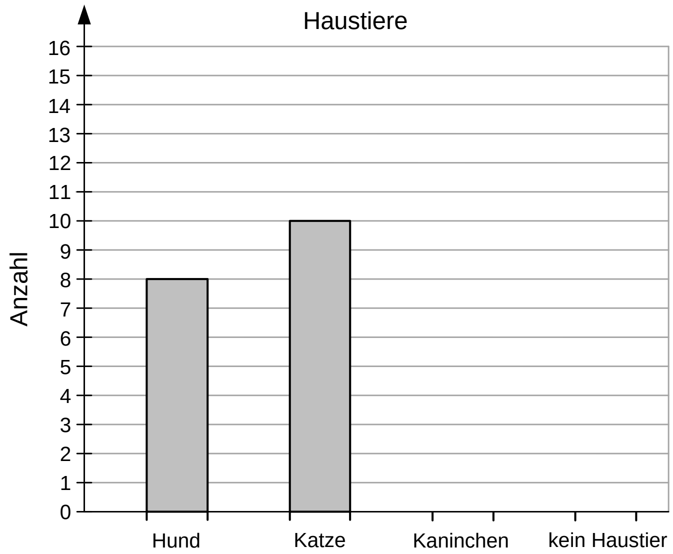
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)

Aufgabe 23 in Testheft B

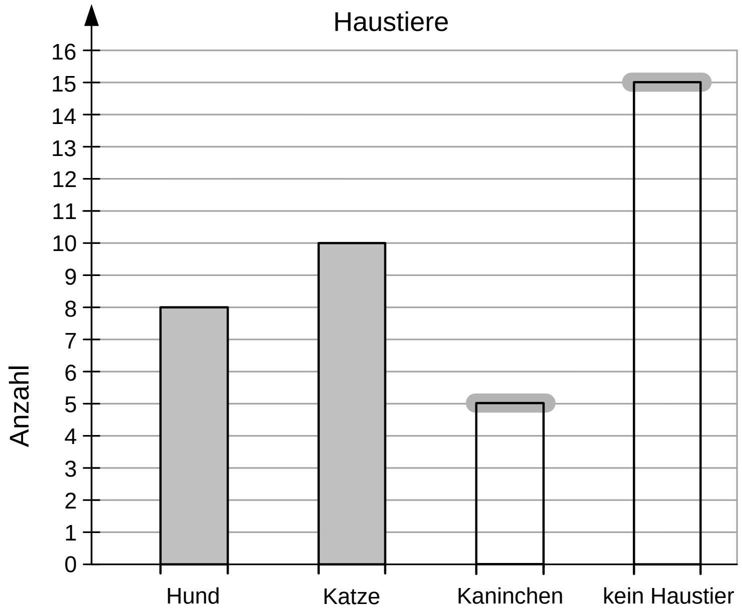
Haustiere der Kinder der Klassen 3a und 3b

Hund	𝍸 |||
Katze	𝍸 𝍸
Kaninchen	𝍸
Kein Haustier	𝍸 𝍸 𝍸

Ergänze das Diagramm.



Auswertung

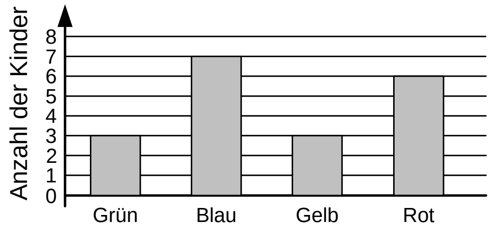
RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich am oberen Ende der Säulen ist grau markiert.)  Die Breite der Säulen sowie die Art der Markierung (z. B. gefüllt/nicht gefüllt) ist dabei nicht relevant.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen (5.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen (5.1.a); aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)

Aufgabe 23 in Testheft C

Lieblingsfarben der Klasse 3a



Welche Aussagen stimmen? Kreuze an.

	stimmt	stimmt nicht
Gelb mögen mehr Kinder als Rot.	☐	☐
Die meisten Kinder mögen Blau.	☐	☐
Gelb und Grün sind gleich beliebt.	☐	☐
Die wenigsten Kinder haben Rot als Lieblingsfarbe.	☐	☐

Auswertung

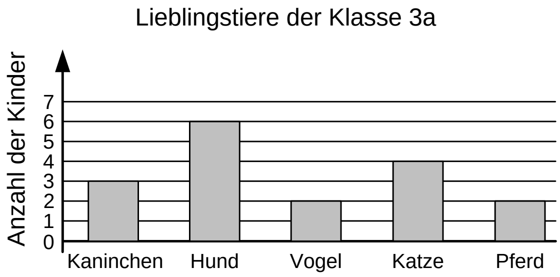
		stimmt	stimmt nicht
RICHTIG	Gelb mögen mehr Kinder als Rot.	☐	☒
	Die meisten Kinder mögen Blau.	☒	☐
	Gelb und Grün sind gleich beliebt.	☒	☐
	Die wenigsten Kinder haben Rot als Lieblingsfarbe.	☐	☒

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1); Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)

Aufgabe 34 in Testheft B

Lieblingstiere der Klasse 3a	
Kaninchen	ǀǀǀ
Hund	𝍸 ǀ
Vogel	
Katze	ǀǀǀǀ
Pferd	ǀǀ



Passt das Diagramm zur Strichliste? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.

____

____

____

Auswertung

RICHTIG	NEIN wurde angekreuzt UND es wurde eine Begründung gegeben, die erkennen lässt, dass die Werte für „Vogel“ in der Strichliste und im Diagramm nicht übereinstimmen.
FALSCH	JA wurde angekreuzt ODER NEIN wurde angekreuzt UND/ODER keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben.

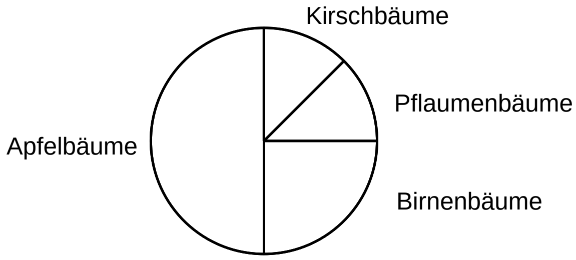
Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3); Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1); Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten (5.3)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)

Aufgabe 29 in Testheft C

Johanna zählt insgesamt 120 Obstbäume.
Trage die richtigen Zahlen in die Lücken ein.

Obstbäume auf der Wiese



Trage ein.

Es sind __15__ Kirschbäume.

Es sind ________ Pflaumenbäume.

Es sind ________ Birnenbäume.

Es sind ________ Apfelbäume.

Auswertung

RICHTIG	Es sind __15__ Kirschbäume. Es sind __**15**__ Pflaumenbäume. Es sind __**30**__ Birnenbäume. Es sind __**60**__ Apfelbäume.

Aufgabenmerkmale

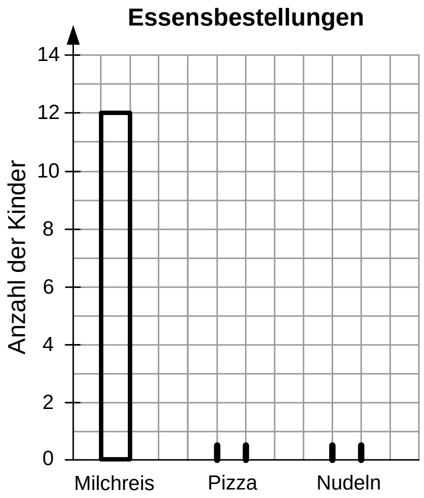
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	IV
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)

Aufgabe 34 in Testheft C

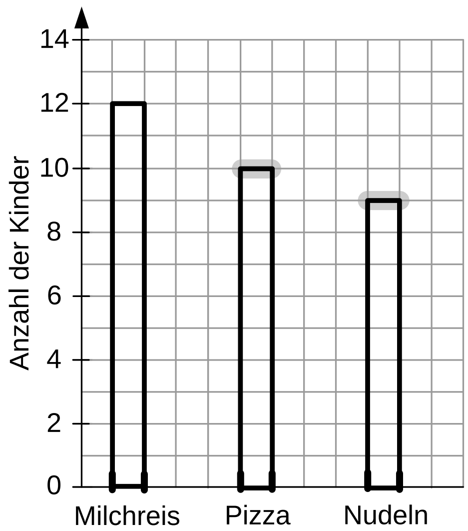
Die Kinder haben Essen bestellt.

	Klasse 3a	Klasse 3b	Klasse 3c
Milchreis	IIII	III	𝍸
Pizza	III	𝍸	II
Nudeln	III	III	III

Vervollständige das Diagramm.



Auswertung

RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik (Ein Toleranzbereich am oberen Ende der Säulen ist grau markiert.)  Die Breite der Säulen sowie die Art der Markierung (z. B. gefüllt/nicht gefüllt) ist nicht relevant.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I

Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen (5.1.a); aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)

Aufgabenbezogener Kommentar

Im Bereich „Daten“ sollen die Schüler*innen zum einen lernen, *den verschiedenen Darstellungsformen* – wie Tabellen, Schaubildern und Diagrammen – gezielt *Informationen zu entnehmen.*

Zum anderen umfasst dieser Bereich das *Sammeln, Strukturieren und Darstellen von Daten in Schaubildern, Tabellen und Diagrammen*. Hier sollen die Schüler*innen lernen, selbst Daten zu sammeln, diese sinnvoll zu strukturieren und sie anschließend übersichtlich in Schaubildern, Tabellen oder Diagrammen darzustellen. Die Daten, mit denen sich die Schüler*innen befassen, sollen aus der Erfahrungs- und Lebenswelt der Kinder stammen und möglichst selbst ermittelbar sein.

Informationsentnahme aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen

Informationsentnahme durch einen Vergleich zweier Tabellen

In der Aufgabe 33 in Testheft B müssen die Kinder anhand zweier Tabellen überprüfen, ob sie die in der Aufgabe folgenden Fragen bejahen oder verneinen. Die beiden Tabellen sind ähnlich aufgebaut: Beide Tabellen haben vertikal und horizontal die gleiche Beschriftung und in beiden Tabellen ist die dargestellte Anzahl durch Piktogramme bzw. Anfangsbuchstaben in Fünferbündelung beschrieben. Die Tabellen unterscheiden sich durch unterschiedliche Legenden. In der ersten Tabelle entspricht das Piktogramm einem Kind, in der zweiten Tabelle wird durch „J“ bzw. „M“ noch zwischen der Anzahl von Jungen und Mädchen unterschieden (entscheidend für die Beantwortung der zweiten Frage).

Informationsentnahme durch einen Vergleich von Tabelle und Säulendiagramm mit anschließender Begründung

Die Aufgaben 31 in Testheft C und 34 in Testheft A haben zwei verschiedene Darstellungsformen (jeweils eine Tabelle und ein Säulendiagramm), aus denen die Kinder Informationen entnehmen müssen. In beiden Aufgaben sind die Daten der Tabelle mit denen des Säulendiagramms zu vergleichen. Die Kinder haben zu entscheiden, ob die Darstellungen zueinander passen und haben dann ihre jeweilige Entscheidung zu begründen (Richtige Begründungen siehe Auswertung der Aufgaben.)

Informationsentnahme aus einem Kreisdiagramm

In den Aufgaben 30 in Testheft B und 29 in Testheft C müssen die Schüler*innen den jeweils vier Segmenten des Kreisdiagramms bestimmte Anzahlen zuordnen. Im Einleitungssatz der Aufgabe ist jeweils die Gesamtanzahl, die im Diagramm dargestellt wird, benannt. Bei beiden Diagrammen entspricht jeweils ein Segment genau der Hälfte der Anzahl. In der erst genannten Aufgabe ist nur die Anzahl des „Sport-Segments" anzugeben, wohingegen in der zweiten Aufgabe alle Anzahlen bestimmt werden müssen, die durch die Segmente dargestellt sind. Die letztgenannte Aufgabe lässt sich auf zwei Wegen lösen: ausgehend von dem halben Kreissegment (120 : 2) oder ausgehend von der gegebenen Anzahl 15, die einem Achtel entspricht (15 · 2, 30 · 2 oder 15 · 4).

Informationsentnahme aus einem Säulendiagramm

Die Aufgaben 31 in Testheft B und 23 in Testheft C haben als Ausgangssituation jeweils ein Säulendiagramm, anhand dessen die Schüler*innen verschiedene Aussagen verifizieren bzw. falsifizieren müssen. Die Bearbeitung der erst genannten Aufgabe ist etwas umfangreicher, da das Säulendiagramm drei verschiedene Informationen (Anzahl, Hobbys und Geschlecht der Kinder) enthält und zudem bei der zweiten Aussage die Anzahl der Jungen und Mädchen noch addiert werden muss, um richtig anzukreuzen. Bei den restlichen Aussagen ist ein direkter Vergleich oder ein direktes Ablesen der Anzahlen möglich.

Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen

Neben der Kompetenz der Informationsentnahme aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen müssen die Schüler*innen in den folgenden Aufgaben auch Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen bzw. Diagramme vervollständigen.

In den Aufgaben 25 in Testheft B und 26 in Testheft C beschreibt jeweils ein kurzer Text eine Situation, die aus der Lebenswelt der Kinder stammen kann. Im Text sind mathematische Begriffe („am meisten", „am wenigsten", „gleich viele" u. ä.) mit verschiedenen Aussagen verknüpft, mit Hilfe derer die Kinder die Segmente des Kreisdiagramms richtig beschriften sollen. Dazu müssen sie den Inhalt des Textes verstehen, die Aussagen zueinander in Beziehung setzen und den korrekten Proportionen des Kreissegments zuordnen. Dazu müssen die Schüler*innen dem Kreisdiagramm entnehmen, in welcher Beziehung die einzelnen Segmente zueinander und zum Ganzen stehen. Die Kenntnis der Darstellungsform des Kreisdiagramms wird dabei vorausgesetzt.

Bei den Aufgaben 23 in Testheft B und 34 in Testheft C müssen die Kinder aus Tabellen Anzahlen ermitteln, die jeweils durch Striche in Fünferbündelung dargestellt sind. Diese Anzahlen werden anschließend mit Säulen dargestellt, die die Kinder im gegebenen, noch unvollständigen Säulendiagramm ergänzen müssen. In der letztgenannten Aufgabe muss die Gesamtanzahl der Speisen noch durch Addition ermittelt werden.

Mögliche Schwierigkeiten

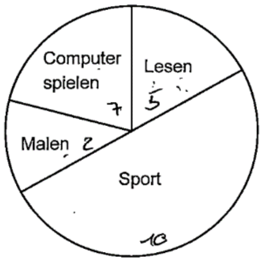
Bei der *Informationsentnahme aus Tabellen und Schaubildern* kann eine erste Problematik im grundlegenden Verstehen der Darstellung liegen, insbesondere dann, wenn eine für die Kinder nicht alltägliche Darstellungsform vorliegt (z. B. Kreisdiagramm). Daraus entstehen Schwierigkeiten beim Ablesen der dargestellten Werte oder Erkennen und/oder Nutzen der Relationen zwischen den Werten (mehr als, gleich viel wie, die Hälfte von, …). Dies ist bei der Gegenüberstellung zweier Schaubilder ebenso problematisch, wie beim Abgleich zwischen Schaubild und Angaben in Textform.

<u>Aufgabe 33 in Testheft B</u>

Schwierigkeiten können hier sowohl in der Interpretation der beiden unterschiedlichen Darstellungsformen als auch im Lesen und Verstehen der tabellarisch gegebenen Fragestellungen entstehen, z. B.:

- *Wie viele Kinder wurden insgesamt in beiden Klassen befragt?*
    - Kann ein Kind die beiden (unterschiedlichen) Legenden nicht richtig anwenden, wird es u. U. diese Frage als nicht zu beantworten markieren. Dabei spielt auch eine Rolle, in der unteren Darstellung zu erkennen, dass die differenzierteren Angaben in Jungen und Mädchen für die Beantwortung der Frage nach der Anzahl aller Kinder zusammengefasst werden können.
- *Wie viele Mädchen wurden insgesamt in beiden Klassen befragt?*
    - Diese Frage bereitet den Kindern i.d.R. die meisten Schwierigkeiten. Überliest ein Kind, dass es hier – im Gegensatz zur ersten Frage – ausschließlich um **Mädchen** geht oder dass sich die Frage gleichermaßen auf **beide Klassen** bezieht, kann diese Frage leicht fälschlicherweise als beantwortbar gekennzeichnet werden.

Aufgabe 30 in Testheft B

 Wie viele Kinder möchten am liebsten Sport treiben? 10 Kinder	Kann ein Kind anhand der Darstellungsform „Kreisdia-gramm“ nicht erkennen, dass der Anteil der Kinder mit Hobby „Lesen“ genau die Hälfte beträgt, ist es auf eine Schätzung angewiesen. Im Beispiel versucht das Kind wohl zunächst, die drei anderen Anteile zu schätzen. Aus deren Summe 14 errechnet es dann das falsche Ergebnis „24 − 14 = 10“ Kinder, die „Lesen“ benannt haben.
Wie viele Kinder möchten am liebsten Sport treiben? 50 Kinder	Häufig werden Kreisdia-gramme – in Anbahnung des prozentualen Betrachtens – an der Gesamtzahl 100 ausge-richtet. Dies könnte bei einer Übergeneralisierung zur Lö-sung „50“ führen, wobei der hälftige Anteil eigentlich korrekt interpretiert wird.
Wie viele Kinder möchten am liebsten Sport treiben? Sport Kinder Wie viele Kinder möchten am liebsten Sport treiben? ja Kinder	Das ungenaue Lesen bzw. Verstehen kann zu einer Antwort auf abweichende Fragestellungen führen – hier evtl.: „Welches Hobby möchten die meisten Kinder betreiben?“ und „Möchten die meisten Kinder Sport treiben?“
Wie viele Kinder möchten am liebsten Sport treiben? 21 Kinder Wie viele Kinder möchten am liebsten Sport treiben? 6 Kinder	Mögliche Fehlstrategien sind das Abziehen der Anzahl der Kreissegmente der anderen Hobbys (3) von der Gesamtzahl der Kinder (24 - 3 = **21**) oder das Dividieren der Gesamtzahl der Kinder durch die Anzahl der gegebenen Kreissegmente (24 : 4 = **6**).

Aufgabe 31 in Testheft B

Das Ablesen der Werte im Säulendiagramm, das Verstehen der gegebenen Aussagen und deren Bezug zum Diagramm sowie die (aufgrund der niedrigen Zahlenwerte allerdings niedrigen) rechnerischen Anforderungen bergen folgende Fehlerquellen:

- *Lesen wählen die wenigsten Kinder.*
  - Zur Beantwortung dieser Frage können nicht einfach die Säulen verglichen, sondern es müssen die jeweils zu einem Hobby gehörenden Werte addiert werden. Wird dies nicht erkannt (z. B. weil in der Zeile darüber der Fokus auf die ungefärbten Säulen „Mädchen“ gelenkt wurde und daher nur diese betrachtet werden) oder fehlerhaft addiert, kann sich daraus eine falsche Antwort ergeben.
- *Tischtennis wählen gleich viele Jungen und Mädchen.*
  - Bei dieser grundsätzlich eher leicht zu prüfenden Aussage beschränkt sich die Schwierigkeit auf das Verstehen des Satzes und das Auffinden des richtigen Säulenpaars.
- *Modellbau wählen mehr Mädchen als Jungen.*
  - Die Schwierigkeit liegt hier v. a. in der Anwendung der Legende, also dem Verstehen der Zuordnung der Säulenfarben zum Geschlecht der Kinder.

Aufgabe 23 in Testheft C

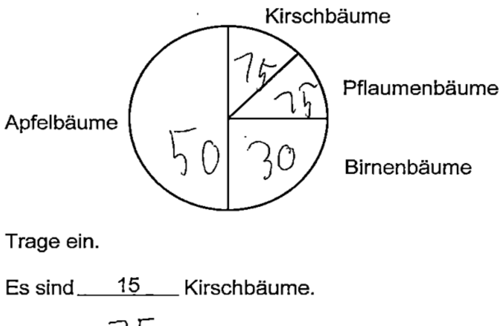
Bei dieser Aufgabe sind recht einfach strukturierte Aussagen anhand eines ebenso einfach aufgebauten Säulendiagramms zu hinterfragen, so dass sich nur geringe Schwierigkeiten ergeben. Fehlerhaftes Ankreuzen könnte u. a. auf Flüchtigkeit oder Verständnisprobleme beim Erlesen der gegebenen Aussagen zurückgeführt werden. Hierbei ist das Erkennen, Verstehen und richtige Interpretieren der Signalwörter *„mehr“, „die meisten“, „gleich“* und *„wenigsten“* von besonderer Bedeutung und mögliche Fehlerquelle.

Aufgabe 29 in Testheft C

Mögliche Schwierigkeiten und Fehlerquellen ergeben sich hier u. a. aus diesen Aspekten:

- (Nicht-)Vertrautheit mit der Darstellung von Zahlenwerten bzw. Teilen eines Ganzen in Form eines Kreisdiagramms,
- rechnerische Unsicherheiten beim Halbieren/Verdoppeln/Summieren,
- Nichtkenntnis bzw. Nichtanwendung von Kontrollrechnungen, z. B. über die Summenbildung und Vergleich mit der vorgegebenen Gesamtzahl.

Konkrete fehlerhafte Vorgehensweisen lassen sich bei dieser Aufgabe durch Interpretation der nichtzutreffenden Zahlenwerte identifizieren, die auf eine nicht stimmige Strategie bei der Lösungsfindung hindeuten, z. B.:

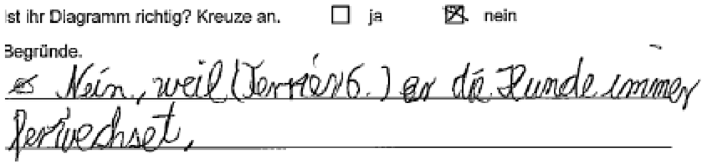
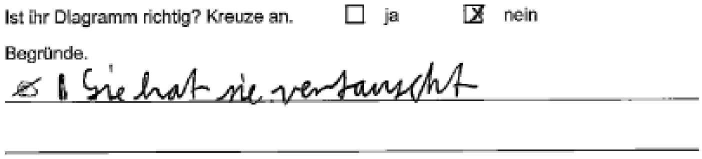
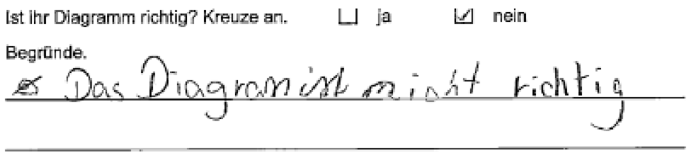
Es sind 15 Kirschbäume. Es sind 20 Pflaumenbäume. Es sind 35 Birnenbäume. Es sind 70 Apfelbäume.	Dieses Kind scheint ausgehend von 15 Kirschbäumen eine etwas größere Zahl an Pflaumenbäumen (20) gesehen zu haben und geht dann – unter Beachtung der weiteren Proportionen – rechnerisch korrekt weiter zu 15 + 20 = 35 Birnenbäumen und 35 + 35 = 70 Apfelbäumen. Eine Kontrolle der Gesamtzahl erfolgt nicht.
Es sind 15 Kirschbäume. Es sind 16 Pflaumenbäume. Es sind 30 Birnenbäume. Es sind 59 Apfelbäume.	Auch hier wurde – wohl aufgrund des optischen Eindrucks – eine minimal höhere Anzahl an Pflaumen- als an Kirschbäumen vermutet. Dies führt das Kind dann konsequent bis zur Bildung der korrekten Gesamtsumme 120 fort, die mit 59 Apfelbäumen erreicht wird. Das Halbieren der Gesamtsumme zur Ermittlung der Apfelbaumanzahl scheint nicht Verwendung zu finden.
Es sind 15 Kirschbäume. Es sind 15 Pflaumenbäume. Es sind 50 Birnenbäume. Es sind 100 Apfelbäume.	Hier könnte das Kind sich von zwei Seiten genähert haben: Korrektes Erkennen der Zahlengleichheit bei Kirsch- und Pflaumenbäumen (15), fehlerhaftes Ausgehen von der Apfelbaumanzahl „100“ (möglicherweise durch Halbieren von „200“ anstelle „120“ bei flüchtig gelesener Gesamtzahl), dann wieder korrektes Halbieren zur Erlangung der Anzahl von 50 Birnenbäumen.
 Trage ein. Es sind 15 Kirschbäume. Es sind 15 Pflaumenbäume. Es sind 30 Birnenbäume. Es sind 50 Apfelbäume.	Zunächst wird die Gleichheit der Anzahlen der Kirsch- und Pflaumenbäume sowie die daraus resultierende doppelt so große Anzahl an Birnenbäumen korrekt ermittelt. Für die Festlegung der Zahl „50“ für die Apfelbäume könnte ein einfacher Rechenfehler (Summe 15 + 15 + 30) ursächlich sein, aber auch die evtl. aus unterrichtlicher Verwendung von Kreisdiagrammen geläufige Anzahl „50“ für die Hälfte (in Anbahnung des prozentualen Betrachtens werden Kreisdiagramme häufig an der Gesamtzahl 100 ausgerichtet).

Es sind 15 Kirschbäume. Es sind 15 Pflaumenbäume. Es sind 30 Birnenbäume. Es sind 45 Apfelbäume.	Nach korrekter Summenbildung 15 + 15 = 30 zur Ermittlung der Anzahl der Birnenbäume könnte hier anstelle der Summierung aller drei auf der rechten Seite angeordneten Baumarten (15 + 15 + 30 = 60) zur Ermittlung der Anzahl der Apfelbäume fehlerhafterweise nur 30+15 gerechnet worden sein. Es wird nicht über die Bildung der Hälfte der Gesamtzahl (120 : 2 = 60) vorgegangen, ebenso unterbleibt die Kontrollsummenbildung.
Es sind 15 Kirschbäume. Es sind 15 Pflaumenbäume. Es sind 15 Birnenbäume. Es sind 15 Apfelbäume. Es sind 15 Kirschbäume. Es sind 16 Pflaumenbäume. Es sind 17 Birnenbäume. Es sind 18 Apfelbäume.	Bei beiden Kindern ist hier zu vermuten, dass die Schwierigkeit beim Verstehen der Aufgabe bzw. in der Nichtvertrautheit mit Kreisdiagrammen und deren Anwendung lag.

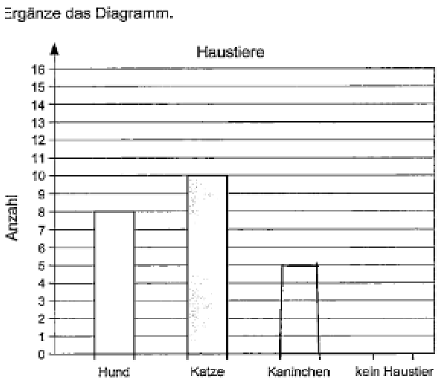
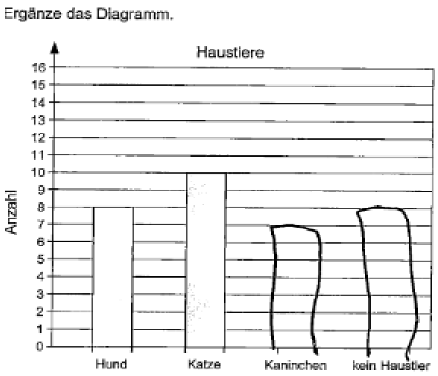
Bei den Aufgaben 31 in Testheft C, 23 in Testheft B, 34 in Testheft B und 34 in Testheft C könnten sich Schwierigkeiten daraus ergeben, dass die Begriffe „Diagramm“, „Tabelle“ und „Strichliste“ und/oder die Skalierung eines Diagramms nicht bekannt sind.

Aufgabe 31 in Testheft C

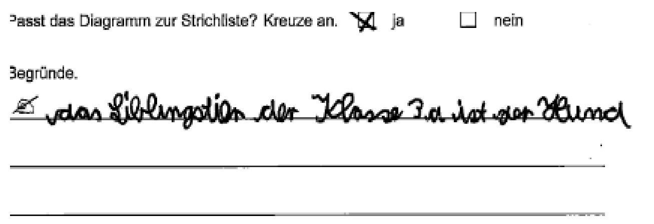
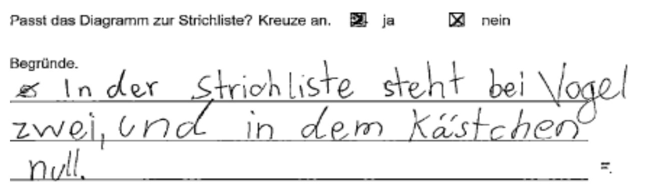
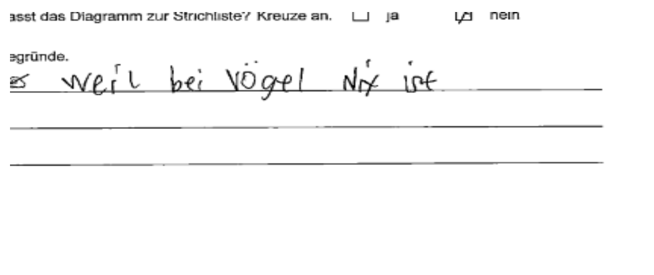
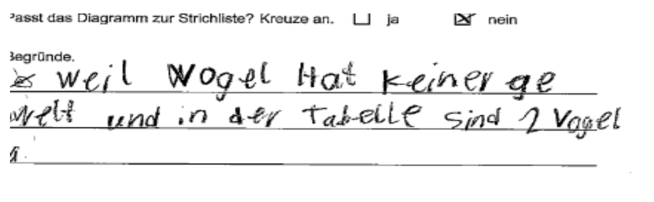
Ist ihr Diagramm richtig? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein Begründe. Sie müste beim Dackel 1 und einhalbes dazumachen beim Pudel muss sie nach 9 kästchen dazu machen beim Terrier muss sie nichts dazumachen und ~~...~~ al[illegible] Ist ihr Diagramm richtig? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein Begründe. Es ist nicht richtig denn Pudel und Dackel wiegen mehr als sie gezeichnet hat.	Die Skalierung der y-Achse wird nicht beachtet Die SuS gehen wahrscheinlich davon aus, dass ein Kästchen für ein Tier steht.
Ist ihr Diagramm richtig? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein Begründe. schon wider sind zwischen den Zahlen Zahlen die fehlen z.B 1,3,5,7,9,11,13	Die Art der Skalierung der y-Achse wird als fehlerhaft beschrieben. In diesem Fall fehlt eine Begründung, die die Angaben in Tabelle

	und Schaubild vergleichend heranzieht.
 	Die Ausdrucksweise in der Begründung ist ungenau/unvollständig . Das Kind hat nicht beachtet, dass die Begründung alle relevanten Aspekte enthalten muss.
	Die Begründung wiederholt lediglich die Frage als eine Aussage, eine wirkliche Begründung fehlt.

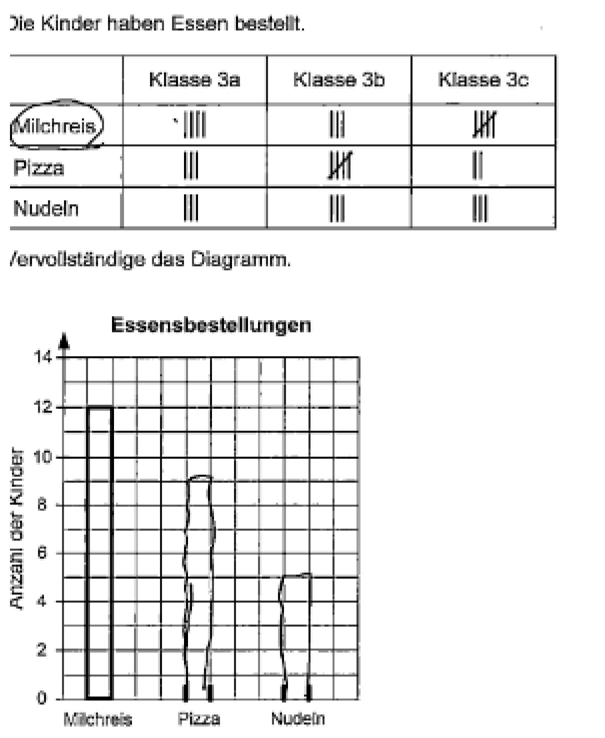
Aufgabe 23 in Testheft B

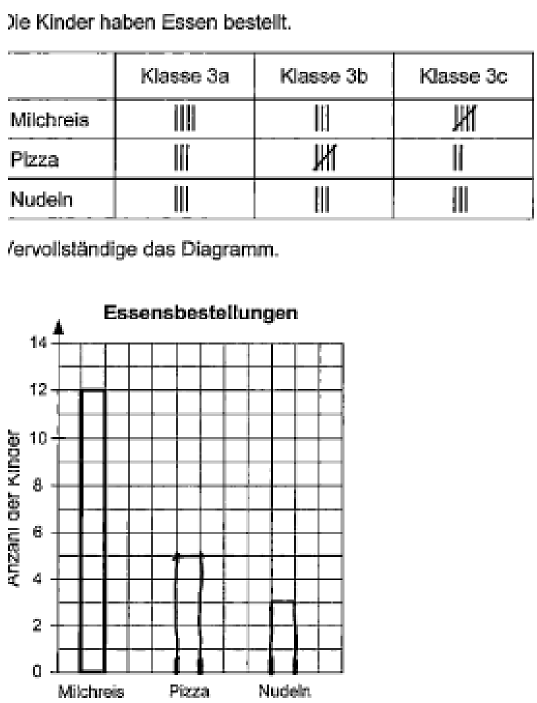
	Das Diagramm wurde unvollständig ausgefüllt.
	Viele Lösungen lassen nicht unmittelbar Rückschlüsse auf Gründe für die fehlerhafte Bearbeitung zu. Für die nicht korrekte Bearbeitung links kann zum Beispiel das fehlerhafte Ablesen der Strichliste ursächlich sein, aber auch das Nicht-Berücksichtigen der Skalierung. Zudem wird hier wahrscheinlich keine Kontrolle des gesamten Diagramms stattgefunden haben, da die letzte Säule am höchsten sein müsste.

Aufgabe 34 in Testheft B

	Die Begründung zielt nicht auf die Fragestellung ab. Eventuell hat sich das Kind nur auf die Überschrift des Diagramms konzentriert.
	Die Begriffe „Strichliste“ und „Diagramm“ wurden verwechselt.
	Die Begründung ist unvollständig, es fehlt der Bezug von Strichliste und Diagramm, keiner der beiden Begriffe „Strichliste“ und „Diagramm“ werden genannt.
	Die Begriffe „Strichliste“ und „Diagramm“ wurden nicht korrekt verwendet, das Diagramm wurde als „Tabelle“ bezeichnet.

Aufgabe 34 in Testheft C

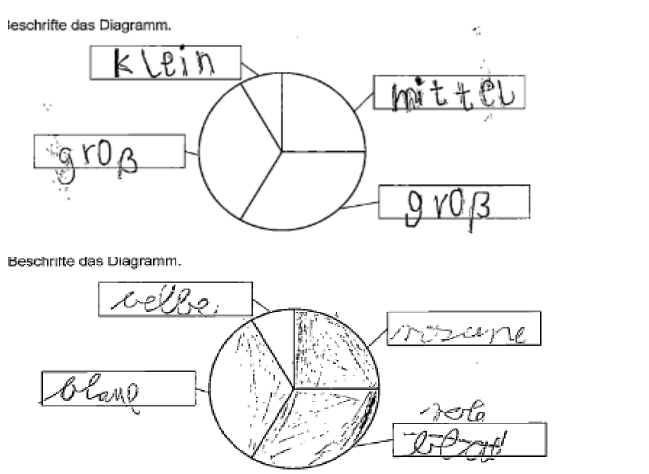
	Die Strichliste wurde nicht korrekt abgelesen oder es wurde sich verrechnet.



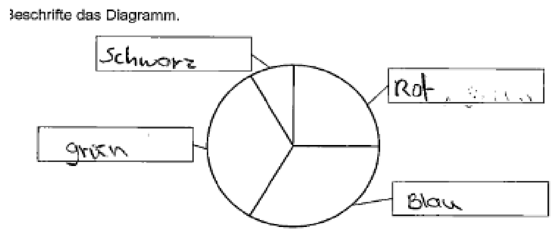
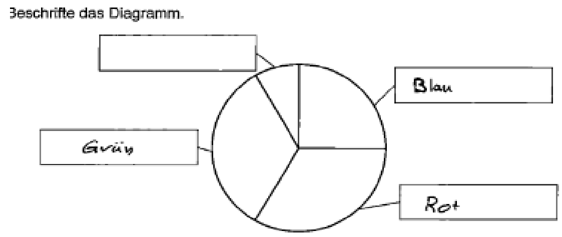
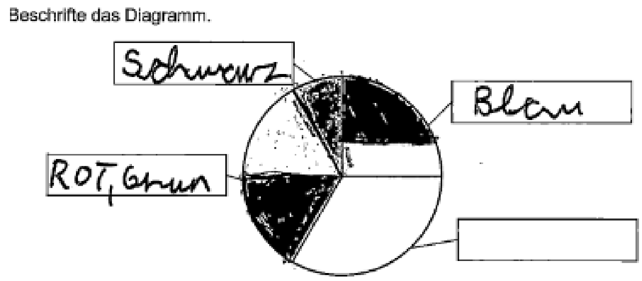
Lediglich die Eintragungen der Klasse 3b wurden beachtet und in das Säulendiagramm eingetragen.

Für die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben 25 in Testheft C und 26 in Testheft B müssen die Schüler*innen sowohl einem *Diagramm Informationen entnehmen* (Verhältnis der einzelnen Segmente zueinander und zum Ganzen) als auch *Diagramme vervollständigen, also Daten in Diagrammen darstellen* (indem sie in diesem Fall die Segmente passend beschriften). Bei diesen Aufgaben ist die korrekte Beschriftung von Kreisdiagrammen gefordert, die entsprechenden Begriffe sind einem kurzen Text zu entnehmen, dann müssen die im Text beschrieben Verhältnisse auf die Verhältnisse im Kreisdiagramm übertragen werden. Zunächst ergeben sich Schwierigkeiten, wenn den Schüler*innen die Darstellung „Kreisdiagramm“ nicht bekannt ist. Weitere Schwierigkeiten ergeben sich dann, wenn die Schüler*innen die Begriffe „die wenigsten“, „gleich viele“, „ein Viertel“, „am meisten“, „am wenigsten“, „weniger als“ und „gleich viele“ nicht kennen, nicht richtig zueinander in Beziehung setzen, diese nicht korrekt interpretieren oder die Kreissegmente nicht richtig in Beziehung setzen. Schwierigkeiten können ebenfalls auftreten, wenn die Schüler*innen die einzutragenden Begriffe nicht aus dem Text entnehmen können.

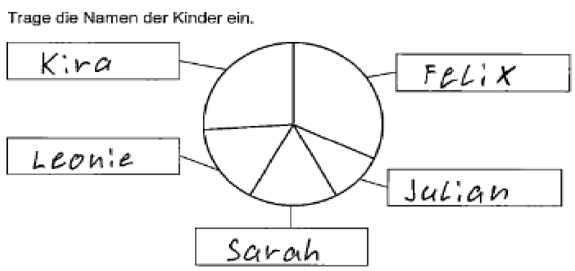
Aufgabe 25 in Testheft C

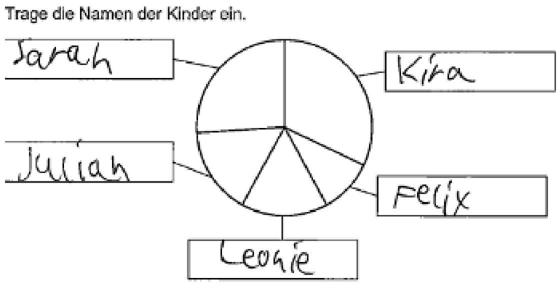


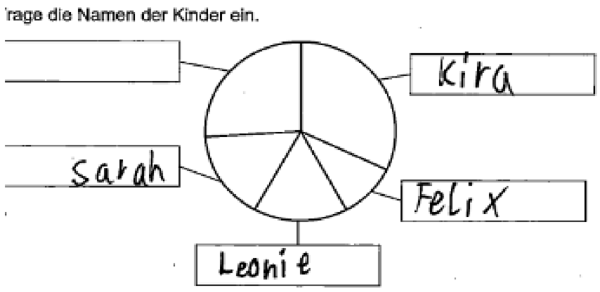
Die Schüler*innen wissen nicht, welche Begriffe einzutragen sind, sie können diese nicht aus dem Text entnehmen und tragen selbst gewählte Begriffe (groß, klein, mittel) oder Farben (gelbe) ein.

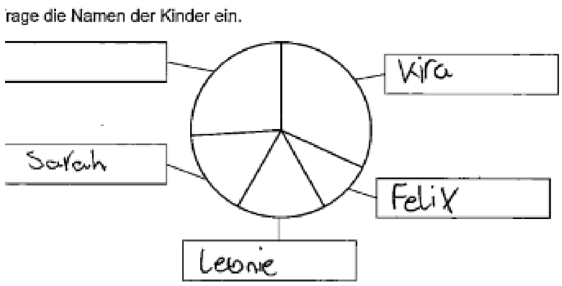
	Die beiden gleich großen Kreissegmente werden nicht gesehen, „ein Viertel“ im Kreisdiagramm wird nicht erkannt.
	Das Kreisdiagramm ist unvollständig ausgefüllt.
	Das Kreisdiagramm wurde umgestaltet; das Kind kann ein Kreisdiagramm und die Bedeutung der Segmente noch nicht angemessen deuten.

Aufgabe 26 in Testheft B

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>Die Begriffe „am meisten“, „am wenigsten“, „weniger als“ und „genauso viel“ aus dem Text sind nicht bekannt oder werden nicht richtig gedeutet.

Die Beziehungen werden nicht interpretiert, daher werden die Kreiss-egmente falsch zuge-ordnet.</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>Das Kreisdiagramm ist unvollständig ausgefüllt.

Julian wird vergessen (alle anderen Kinder stehen am Satzanfang), die nicht ausgereifte Lesekompetenz könnte hier eine mögliche Schwierigkeit sein.</td>
</tr>
</table>

Anregungen für den Unterricht

Diagramme - aus Zahlen werden Bilder!

Daten sammeln, strukturieren und darstellen

Das eigenständige Erheben, Strukturieren und Darstellen von Daten trägt wesentlich dazu bei, dass Schüler*innen Datendarstellungen lesen und Schlussfolgerungen für den dargestellten Kontext ziehen können. Das Arbeiten auf der enaktiven, ikonischen und symbolischen Ebene unmittelbar nebeneinander schafft hierbei Einsicht und Verständnis.

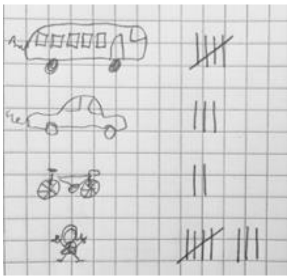
Zahlreiche Anlässe aus der Erfahrungswelt der Schüler*innen bieten die Möglichkeit Daten zu sammeln, zu strukturieren und darzustellen.

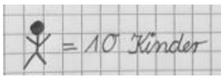
Daten **sammeln**

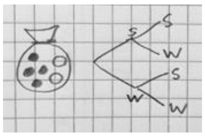
- Befragungen/Umfragen zu kindgerechten Themen:
  - Anzahl Jungen/Mädchen in einer Klasse, Alter der Kinder, Haustiere, Hobbys, Geburtstage, Lieblingsfarben, ...
- Beobachtungen, Messungen:
  - Verkehrszählung, Wetterbeobachtungen, Pflanzenwachstum (Bohne, Tomate, Gurken), Ergebnisse von Experimenten, Besucherzahlen im Zoo, ….
- Abstimmungen:
  - Wanderziele, Ausflugsziele, Klassensprecherwahl, Sportspiele, …

Daten **strukturieren** und **darstellen**

- Urliste (Versuchsprotokoll, Fragebogen, Strichliste)
- Tabelle
- Schaubild
- Piktogramme
- Streifendiagramm/Balkendiagramm/Säulendiagramm
- Baumdiagramm
- Kreisdiagramm
- u. a.







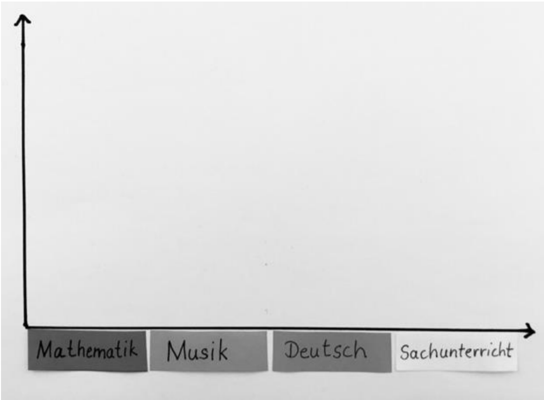
Copyright Fotos: IQB

Besondere Aufmerksamkeit gilt dem Übertragen der Daten in die verschiedenen Darstellungsformen. Folgende Übung bietet sich im Klassenraum an, um z. B. sukzessiv den Aufbau eines **Koordinatensystems** bzw. **eines Säulendiagramms** zu erarbeiten:

Ein unbeschriftetes Koordinatensystem wird auf ein Plakat gezeichnet.

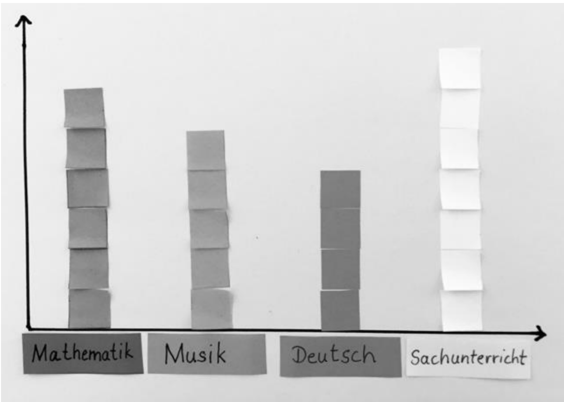
Copyright Foto: IQB

Zu der zu untersuchenden Frage, z. B. „Welches dieser Fächer magst du am liebsten?“ legt die Lehrkraft entsprechende Wortkarten (farbig) an die x-Achse.



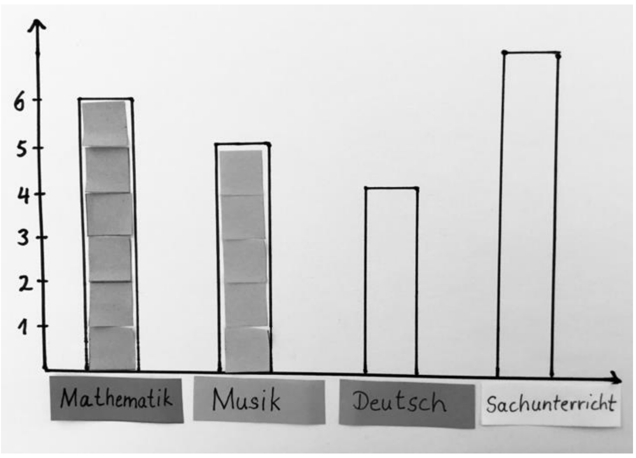
Copyright Foto: IQB

Nun werden die Schüler*innen dazu aufgefordert, farblich entsprechende Post-its zu nehmen und diese nahtlos und überschneidungsfrei übereinander ihren Lieblingsfächern zuzuordnen.



Copyright Foto: IQB

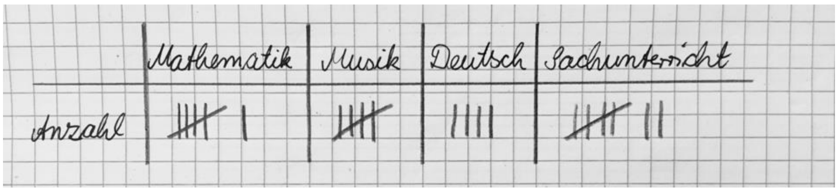
Anschließend wird mit einem Stift ein Rahmen um die Post-its der Kinder gezogen - am besten ein Tafellineal hinzunehmen. So entsteht die Säule zu der jeweiligen Kategorie und die y-Achse kann beschriftet werden.



Copyright Foto: IQB

Schließlich kann das Diagramm auf Kästchenpapier übertragen durch Beschriftung und Überschrift ergänzt werden.

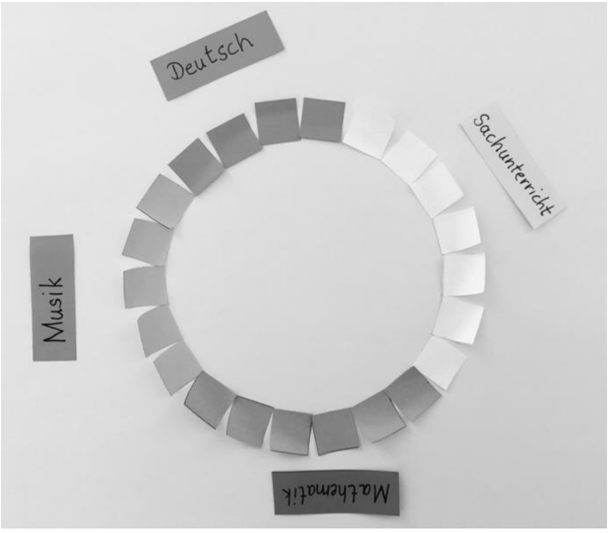
Eine Datenabfrage als Strichliste und/oder Tabelle kann nach Bedarf vorab erfolgen.



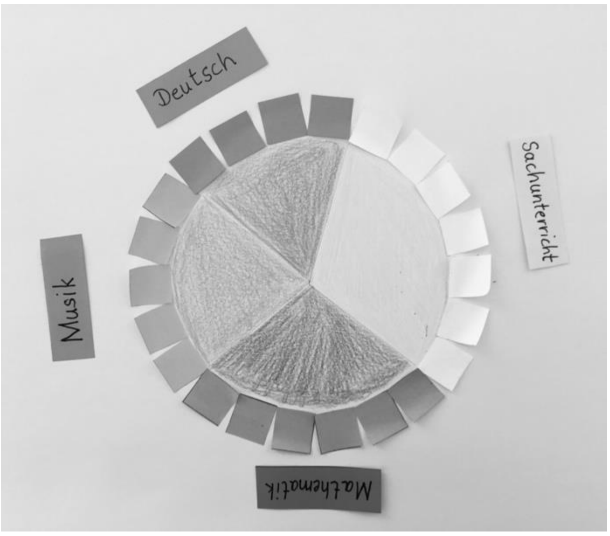
	Mathematik	Musik	Deutsch	Sachunterricht
Anzahl	~~IIII~~ I	~~IIII~~	IIII	~~IIII~~ II

Copyright Foto: IQB

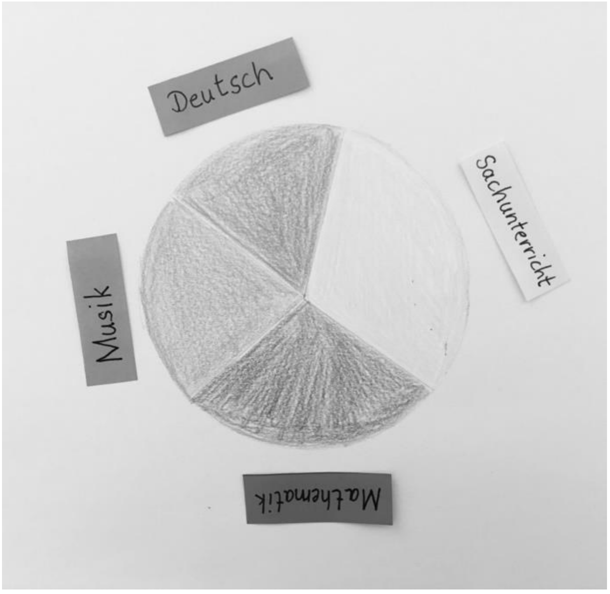
In einer weiteren Stunde bietet es sich an die Post-its dieser Befragung zur **Erarbeitung eines Kreisdiagramms** auf folgende Art zu nutzen.



Copyright Foto: IQB



Copyright Foto: IQB



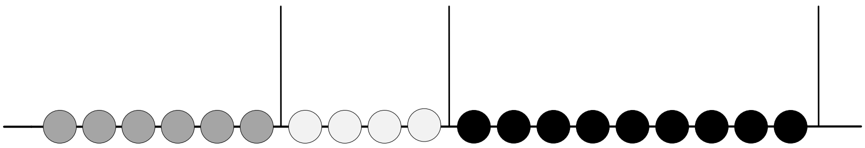
Copyright Foto: IQB

Kreisdiagramme werden häufig mit der Gesamtzahl 100 (da 100 %) in Verbindung gebracht. Dadurch kann die Informationsentnahme erschwert sein. Eine weitere Möglichkeit den Aufbau eines Kreisdiagramms zu verdeutlichen, ist folgende:

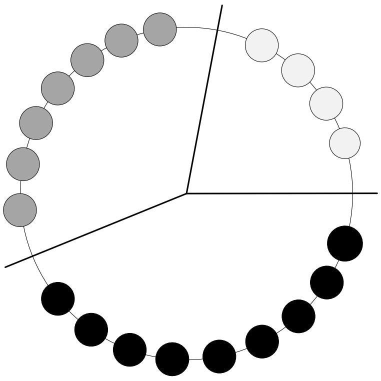
Mit einem dünnen Draht, bunten, großen Perlen zum Auffädeln und wahlweise Strohhalmen, lässt sich eine Umfrage zuerst *linear* darstellen. Zur Verdeutlichung werden vereinfachend 3 Kategorien herangezogen:

- 7 Kinder mögen am liebsten Bananen,
- 4 Kinder mögen am liebsten Birnen und
- 9 Kinder mögen am meisten Äpfel.

Es werden 7 gelbe Perlen auf den Draht gefädelt, mit der Erklärung, dass die oben genannten 7 Kinder, die Bananen gewählt haben, den 7 gelben Perlen entsprechen. Darauf folgen 4 grüne Perlen für die Kinder, die am liebsten Birnen mögen, und zum Abschluss 9 rote Perlen für die Kinder, die Äpfel bevorzugen. Um die Anteile der Früchte deutlicher darzustellen, wird jeweils ein Strohhalm zwischen den Farben aufgefädelt, so dass sie vom Draht „abstehen".



Formt man nun den Draht zu einem Kreis und schneidet die in die Mitte zeigenden Halme so ab, dass sie sich in der Mitte treffen, erhalten die Kinder eine prägnante Vorstellung davon, wie sich ein Kreisdiagramm zusammensetzt. Legt man diesen Kreis auf ein Blatt Papier und vervollständigt die Anteile noch in der entsprechenden Farbe, wird die Entstehung des Kreisdiagramms nochmals deutlicher (siehe oben).



Wichtig hierbei ist der Hinweis, dass die Gesamtzahl der Kinder 20 ist (und nicht 100). Ein Ablesen der genauen Zahl der Schüler, die Bananen am liebsten mögen, ist am Kreisdiagramm – selbst wenn die Kugeln noch für die einzelnen Kinder stehen – nicht ganz so einfach, wie an einem Säulendiagramm.

Weitere Materialien und Möglichkeiten, die sich anbieten um das Übertragen von Daten in verschiedene Darstellungsformen zu erarbeiten, sind:

- Steckwürfel
- Holzwürfel
- Schachteln (z. B. Streichholzschachteln)
- Bausteine

Eine digitale Möglichkeit bietet der „Diagramm-Generator" aus dem „Haus der kleinen Forscher", welcher kostenlos und frei verfügbar ist: https://www.meine-forscherwelt.de/diagramm-generator

Mit dem Diagramm-Generator können eigene Beobachtungen und Forschungsergebnisse dokumentiert und ausgewertet werden. Aus wenigen Daten können einfache Diagramme zur Veranschaulichung erstellt werden: Säulen-, Linien- und Kreisdiagramme. Je nach Art des Diagramms können Mengenverhältnisse, Anteile im Ganzen und zeitliche Verläufe auf einen Blick erfasst werden. Dabei sollte kritisch reflektiert werden, welches Diagramm die vorhandenen Daten am besten abbildet. Ein Liniendiagramm eignet sich z. B. nicht immer. So macht der Linienverlauf keinen Sinn, wenn beispielsweise Lieblingsfarben der Kinder in der Klasse dargestellt werden, wohl aber bei der Besucheranzahl im Freibad in den verschiedenen Sommermonaten.

Diagrammen Informationen entnehmen

Durch verschiedene Übungen zur Entnahme von Informationen aus Diagrammen sollen sich die Schüler*innen mit grafischen Darstellungen von Daten intensiver auseinandersetzen, einen schnelleren Blick für den jeweiligen Aufbau (Achsen, Legenden, Skalierungen, Strichlisten) entwickeln, Daten von Säulen oder aus Kreisen ablesen und sie vergleichend in einen Kontext bringen können.

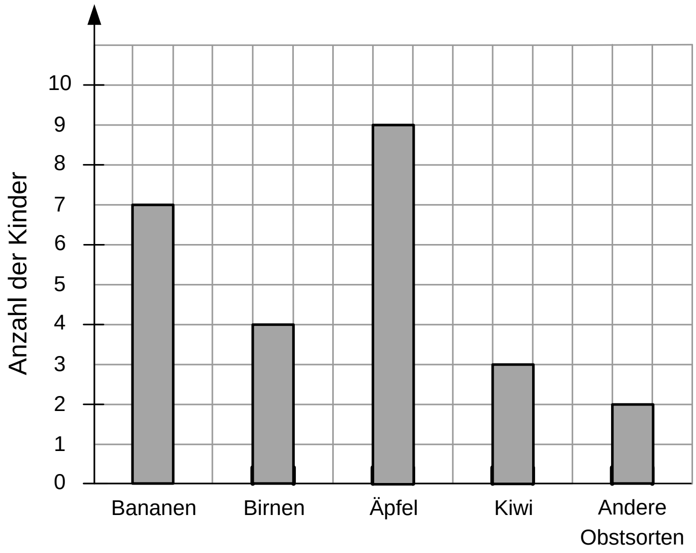
Anregungen dafür sind:

- Diagramme gemeinsam beschreiben und Sätze dazu formulieren und aufschreiben:
  - Was sieht man im Diagramm? Welche Überschrift könnte passen?

- Mögliche Antworten könnten sein: „An der y-Achse sehe ich die Zahlen von 0 bis 10“, „Diese Zahlen zeigen an ...“, „Es gibt 3 Säulen“, „Ein Strich steht für eine Person/Tier/Sache“, „Die Säulen sind unterschiedlich hoch.“, „Es geht um Obstsorten“, „Die Legende sagt,...“
- Ein Wortspeicher mit Satzanfängen, aber auch Begriffen wie „mehr als“, „weniger als“, „gleich viel wie“ o. ä. kann hier helfen (→ Kommunizieren)
- Differenzierung nach oben: Eigene Fragen und Lösungen zu Diagrammen formulieren und daraus Karteikarten erstellen lassen. Vorne sieht man Diagramm und Frage, hinten die Lösung. Wahlweise kann die Vorderseite auch ein Diagramm mit verschiedenen Aussagen samt einer Falschaussage enthalten, wobei die Falschaussage identifiziert werden muss und sich zur Kontrolle auf der Rückseite befindet.

- Zum genaueren Beschreiben und Ablesen der Säulenwerte:
  - als Hilfe ein Lineal nutzen
  - aus Steckwürfeln nachgebaute Säulen verschieben, um sie besser vergleichen zu können.
  - Differenzierung nach unten: Zu Beginn den Fokus nur auf eine Säule legen und den genauen Wert in die Säule eintragen oder ein Diagramm erstellen mit nur 2 - 3 Säulen, Balken oder Kreisanteilen.
- Aussagen zu Diagrammen überprüfen:
  - zu einem Diagramm werden mehrere Aussagen aufgestellt. Die Kinder müssen herausfinden, welche Daten tatsächlich abgelesen werden können und welche nicht. Beispiel:

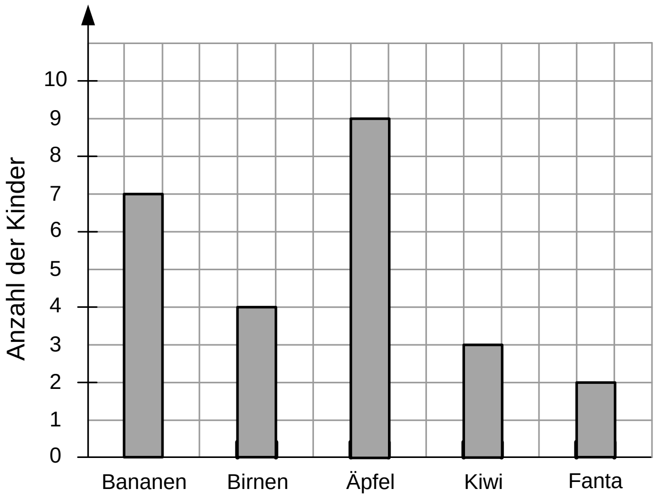
Lieblingsobst der Klasse 2d



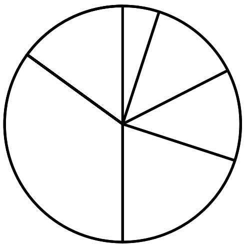
	Kann man ablesen
Die meisten Kinder mögen Äpfel.	
Es mögen mehr Jungen als Mädchen Birnen.	
23 Kinder mögen Obst.	
Die Klassenlehrerin mag Kiwis.	

- Um den Fokus auf die Beschriftung der Diagramme zu lenken:
  - Diagramme mit fehlender Skalierung u. ä. an die Kinder geben mit dem Auftrag, diese mit angegebenen Daten zu vervollständigen oder zumindest die „Fehler“ zu markieren.

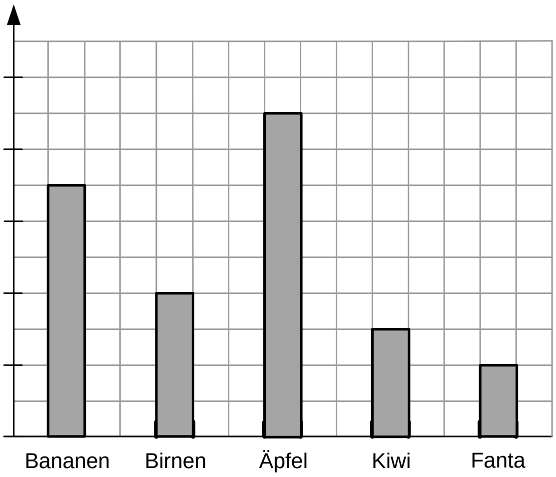
Lieblingsobst der 2d



Lieblingsobst der Klasse 2d



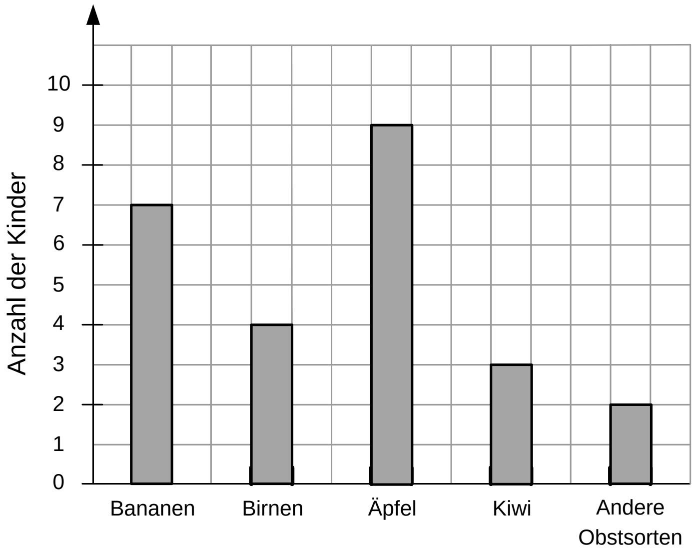
Lieblingsobst der 2d



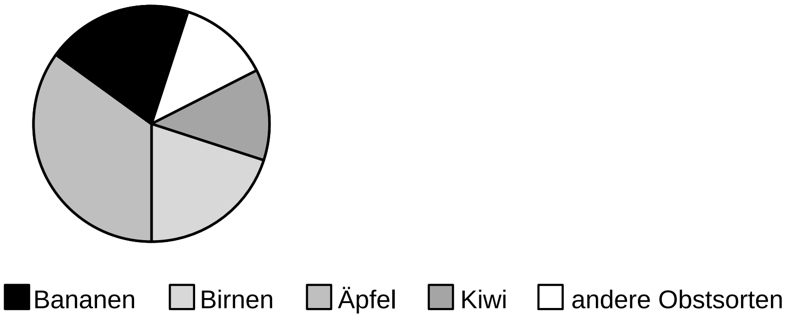
- Differenzierung nach oben: Diagramme auf Fehler untersuchen (Diagramme mit falscher Skalierung (mal Einer-, mal Zweierschritte), mit zusätzlich eingetragener Säule, aber in Daten nicht genanntem Wert, …)

- Zu Säulen- und Kreisdiagrammen gemachte Aussagen der Diagrammform zuordnen, mit Hilfe derer man es am schnellsten oder einfachsten erkennen kann, z. B.:
  - „Ich kann genau erkennen, **welche** Obstsorte die meisten Kinder mögen.“ (Anteile im Ganzen, Kreisdiagramm), „Ich kann genau erkennen, **wie viele** Kinder Birnen mögen.“ (Häufigkeiten im Ganzen, Säulendiagramm), „Ich kann gut erkennen, was die Kinder am wenigsten mögen“ (Kreis- und Säulendiagramm), „Ich kann genau erkennen, dass 5 Kinder Bananen mögen.“ (Säulendiagramm), „Ich kann genau erkennen, wie viel mehr Kinder lieber Bananen als Birnen mögen.“ (Säulendiagramm), (→ Argumentieren). Die Kinder erkennen damit, dass manche Aussagen zwar in beiden Diagrammarten schnell ablesbar sind (Äpfel mögen die meisten Kinder), die genaue Anzahl aber (3 Kinder mögen Kiwi) schneller dem Säulendiagramm zu entnehmen ist.

Lieblingsobst der Klasse 2d



Lieblingsobst der Klasse 2d



<u>Allgemeine (prozessbezogene) Kompetenzen:</u>

Die geforderten prozessbezogenen Kompetenzen im Mathematikunterricht können im Zusammenhang mit der Darstellung und Entnahme von Daten in Diagrammen auf vielfältige Weise gefördert werden (s. o.):

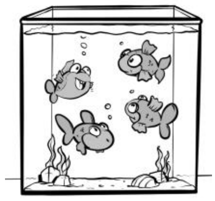
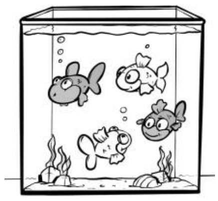
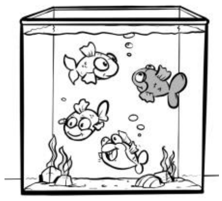
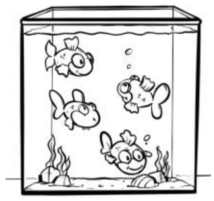
- *Übertragen* von Daten in andere Darstellungen
- *Bewerten* von Darstellungen auf ihre Aussagekraft
- *Darstellen* von mathematischen Sachverhalten in Tabellen
- *Beschreiben* von mathematischen Auffälligkeiten in Tabellen
- *Überprüfen* der Darstellungen von Daten einer Tabelle
- *Erschließen* von Informationen aus grafischen Darstellungen
- *Begründen* der Eignung von Diagrammen für bestimmte Zwecke

8. Aufgaben zu Wahrscheinlichkeiten

Begriffe

Aufgabe 24 in Testheft B

Bei welchem Aquarium ist es unmöglich, dass ein weißer Fisch geangelt wird?
Kreuze an.

			
☐	☐	☐	☐

RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) (5.2.a)

Aufgabe 28 in Testheft B

Geri zieht mit geschlossenen Augen zwei von diesen Zahlenkarten.

33	66	17

Kreuze an.

		stimmt	stimmt nicht
RICHTIG	Es ist möglich, aber nicht sicher, dass er dabei eine gerade Zahl zieht.	☒	☐
	Es ist sicher, dass er dabei eine zweistellige Zahl zieht.	☒	☐
	Es ist unmöglich, dass er dabei eine ungerade Zahl zieht.	☐	☒

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) (5.2.a)

Aufgabe 28 in Testheft C

Sina würfelt mit einem Spielwürfel. Kreuze an.

RICHTIG		sicher	möglich, aber nicht sicher	unmöglich
	Sina würfelt eine Zahl größer als Null.	☒	☐	☐
	Sina würfelt eine gerade Augenzahl.	☐	☒	☐
	Sina würfelt zwei Mal hintereinander eine Zwei.	☐	☒	☐

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen (5.2); Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) (5.2.a)

Aufgabe 29 in Testheft B

Pablo greift mit geschlossenen Augen in die Geldbörse und holt 3 Münzen heraus.

Er sagt: „Es ist unmöglich, dass es 3 gleiche Münzen sind.“

Hat er recht? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.

✍ ____

____

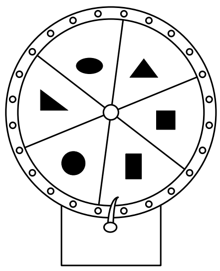
RICHTIG	JA wurde angekreuzt UND es wurde eine Begründung gegeben, die darauf abzielt, dass es jede Münze nur 2 Mal in der Geldbörse gibt, z. B.: - weil es da nur 2 Mal 20 Cent gibt und 2 Mal 50 Cent und 2 Mal 10 Cent - weil keine Münze dreifach ist - Es gibt nicht 3 gleiche Münzen. - Es gibt von den 50 Cent, 20 Cent und 10 Cent immer nur 2 Stück.
FALSCH	NEIN wurde angekreuzt ODER JA wurde angekreuzt UND/ODER keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben, z. B.: - weil das nicht geht - Es fehlen Münzen. - Zwei 10er sind auch 20 Cent.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) (5.2.a)

Aufgabe 24 in Testheft C

Regel: ♥ gewinnt.



Linda sagt: „Es ist unmöglich, zu gewinnen.“

Hat sie recht? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.

RICHTIG	JA wurde angekreuzt UND es wurde eine Begründung gegeben, in der zum Ausdruck kommt, dass es kein Feld mit Herz gibt, z. B.: - In der Drehscheibe gibt es kein Herz. - Es gibt (gar) kein Herz.
FALSCH	NEIN wurde angekreuzt ODER

	JA wurde angekreuzt UND/ODER keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben oder eine Begründung, die sich nicht auf das fehlende Herz bezieht, z. B.: - Sie wird verlieren. - Das Spiel ist unfair.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) (5.2.a)

Gewinnchancen einschätzen

Aufgabe 25 in Testheft B

Helena hat beim „Mensch-ärgere-dich-nicht"-Spiel bereits zehn Mal keine Sechs gewürfelt.

Sie sagt: „Beim nächsten Mal bekomme ich sicher eine Sechs!"

Stimmt das? Kreuze an.

☐ Ja, weil sie schon so lange keine Sechs mehr hatte.

☐ Ja, weil sie jetzt Glück hat.

☐ Nein, sie hat eine Pechsträhne.

☐ Nein, es kann auch eine andere Zahl sein.

RICHTIG	Nur das 4. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) (5.2.a); Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen (5.2.b)

Aufgabe 27 in Testheft C

Till wirft diese Münze. Beim ersten Wurf liegt das Bild oben.
Er sagt: „Beim zweiten Wurf liegt sicher die Zahl oben.“

Zahl

Bild

Hat Till recht? Kreuze an.

- ☐ Nein, weil wieder das Bild kommen kann.
- ☐ Nein, weil es immer anders kommt, als man denkt.
- ☐ Ja, weil er das Bild schon geworfen hat.
- ☐ Ja, weil sich das Bild und die Zahl immer abwechseln.

RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale

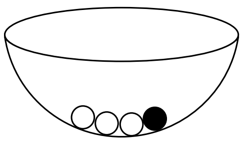
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen (5.2.b)

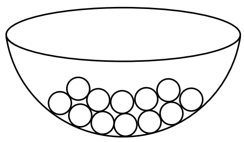
Aufgabe 30 in Testheft C

Elsa zieht mit geschlossenen Augen eine Kugel. Schwarz gewinnt.

Die Gewinnchance soll für beide Schalen gleich sein.

Färbe in der zweiten Schale die passende Anzahl Kugeln an.





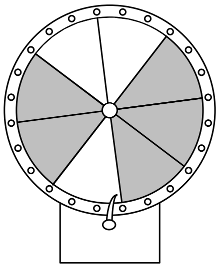
RICHTIG	In der zweiten Schale sind 3 Kugeln angemalt ODER 4 gefärbte Kugeln werden dazu gemalt.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)

Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen (5.2.b)

Aufgabe 27 in Testheft B



Mit welcher Farbe hat man hier die größere Gewinnchance?

Kreuze an. ☐ weiß ☐ grau

Begründe.

____

____

____

RICHTIG	GRAU wurde angekreuzt UND es wurde eine Begründung gegeben, in der deutlich wird, dass die Anzahl der grauen Felder größer ist als die Anzahl der weißen Felder, z. B.: - Es sind 5 graue Felder und nur 3 weiße Felder. Damit ist die Chance ein graues Feld zu bekommen größer. - Die grauen sind mehr als die weißen Felder. - Weiß hat keine große Gewinnchance, weil es weniger als graue davon gibt.
FALSCH	WEIß wurde angekreuzt ODER GRAU wurde angekreuzt UND/ODER keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben, z. B.: - weil Weiß die größere Gewinnchance hat - Weiß, weil es stärker ist.

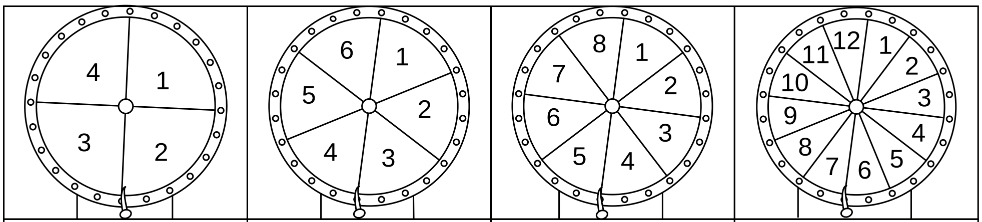
Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	I
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen (5.2.b)

Aufgabe 26 in Testheft C

Die Zahl 3 gewinnt.
Bei welchem Glücksrad ist die Gewinnchance am größten?

Kreuze an.



☐	☐	☐	☐

RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale

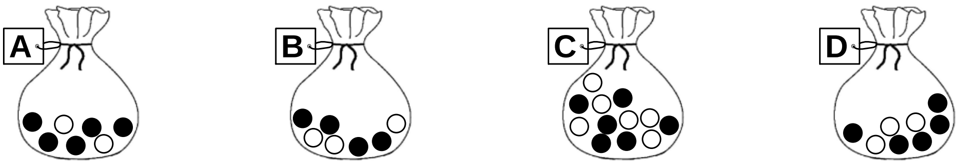
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	II
Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen (5.2.b)

Aufgabe 32 in Testheft B

Schwarz gewinnt.

Bei welchem Säckchen ist die Chance am größten, eine schwarze Kugel zu ziehen?

Kreuze an.



☐ A

☐ B

☐ C

☐ D

RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	III

Bildungsstandards allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandards inhaltsbezogene Kompetenzen	Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen (5.2.b)

Aufgabenbezogener Kommentar

Im Inhaltsbereich „Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen“ wird in den Bildungsstandards zwischen der Kompetenz „Grundbegriffe kennen“ und der Kompetenz „Gewinnchancen einschätzen“ unterschieden. Diese Unterscheidung wird im Folgenden aufgegriffen.

Grundbegriffe kennen

Bei den Aufgaben 1, 2, 4 und 6 in Testheft B und 3, 5 und 7 in Testheft C geht es um das Verstehen von **Grundbegriffen zur Wahrscheinlichkeit** und um deren sichere Anwendung.

Dabei werden hier drei Kategorien unterschieden (Die Prozentangaben dienen nur der Klärung, sie werden im Mathematikunterricht der Grundschule in der Regel noch nicht thematisiert):

- *sicher*: Die Eintrittswahrscheinlichkeit (eines bestimmten, in der Aufgabe definierten Ereignisses) beträgt 100 %.
- *möglich*: Die Eintrittswahrscheinlichkeit ist höher als 0 %. Dies schließt 100 % („sicher“) aber mit ein. Daher wird in den Aufgaben, in denen eine gegenseitig ausschließende Unterscheidung zwischen „sicher“ und „möglich“ gewünscht ist, eine Erweiterung zu „möglich, aber nicht sicher“ verwendet. Ansonsten müsste bei hundertprozentiger Eintrittswahrscheinlichkeit neben „sicher“ auch immer „möglich“ mit angekreuzt werden. Die Thematisierung dieses Aspekts im Unterricht kann zu spannenden Erkenntnissen bei den Kindern führen (s. „Anregungen für den Unterricht“).
- *unmöglich*: Die Eintrittswahrscheinlichkeit beträgt 0 %.

Nur die mathematische Beschreibung „möglich, aber nicht sicher“ lässt einen Spielraum für die Einschätzung, wie wahrscheinlich ein zufälliges Ereignis ist. Ein unmögliches Ereignis kann auf keinen Fall eintreten, ein sicheres Ereignis wird auf jeden Fall eintreten. Diese letztgenannten Fälle bedürfen keiner weiteren Differenzierung bzgl. der Gewinnchance (z. B. Aufgabe 1).

In Aufgabe 2 in Testheft B und 3 in Testheft C ist zusätzlich Wissen aus dem Bereich Zahlen und Operationen notwendig. Die Begriffe „gerade“, „ungerade“ und „zweistellige Zahl“, sowie „größer als“ müssen den Kindern vertraut sein.

Außerdem erfordern die Aufgaben 6 in Testheft B und 7 in Testheft C das Hinterfragen einer gegebenen mathematischen Aussage sowie die Begründung der eigenen Entscheidung (→ Argumentieren).

Gewinnchancen einschätzen

Bei den Aufgaben 4, 9 und 11 in Testheft B und 5, 8 und 10 in Testheft C werden zu einfachen Zufallsexperimenten, bei denen die Einzelergebnisse gleichwahrscheinlich sind, die jeweiligen **Gewinnchancen** eingeschätzt und miteinander verglichen. Dafür müssen die Kinder das Verhältnis der Anzahl der für ein bestimmtes Ereignis (z. B. gerade Zahl gewinnt) günstiger Ergebnisse (z. B. 2, 4, 6) zu den ungünstigen Ergebnissen untersuchen (z. B. 1, 3, 5). Hierzu müssen die Kinder den Zusammenhang zwischen *allen* möglichen Ergebnissen und den „gewünschten" Ergebnissen herstellen.

Bei Aufgabe 9 in Testheft B muss die Anzahl der weißen Felder mit der Anzahl der grauen Felder verglichen und daraus die Farbe mit der größten Gewinnchance abgeleitet werden. In der Begründung muss dieser Vergleich dargestellt sein. (z. B. „*Es sind mehr graue Felder als weiße Felder*.") (→ Argumentieren). Es ist auch möglich, dass die Kinder den Zusammenhang zwischen *allen* möglichen Ergebnissen und den „gewünschten" Ergebnissen herstellen. So können sie zum Beispiel den Zusammenhang zwischen dem Anteil der grauen bzw. weißen Flächen im Vergleich zur Gesamtfläche des Glücksrades nutzen. In der Begründung muss dieser Vergleich entsprechend dargestellt sein. (z. B. „Der Anteil der grauen Fläche im Glücksrad ist größer als der Anteil der weißen Fläche.") (→ Argumentieren)

Bei Aufgabe 8 in Testheft C wird zusätzlich die selbstständige Konstruktion eines Zufallsgenerators (Färben von Kugeln) zu einer vorgegebenen Gewinnchance gefordert (→ Darstellen). Die Kinder müssen das dargestellte Verhältnis von 1 zu 3 in der Form „eine schwarze Kugel und drei weiße Kugeln" in der Schale 1 auf die Menge von 12 Kugeln in Schale 2 übertragen. Für die Bearbeitung dieser Aufgabe sind verschiedene Strategien möglich (→ Problemlösen).

Mögliche Schwierigkeiten

- Die drei Begriffe sicher, möglich und unmöglich sind für sich genommen keine Fachbegriffe, sondern werden erst im Zusammenhang mit Ereignisbeschreibungen dazu. Die Bezeichnungen nehmen Kinder zunächst nicht als Fachbegriffe wahr. Vielmehr nutzen sie diese Begriffe in alltäglichen Situationen mit anderer Bedeutung, z. B.:
    - „*Der Pullover sieht unmöglich aus.*"
    - „*Der Weg zur Schule ist sicher.*"
    - „*Beim nächsten Mal würfle ich sicher eine 6.*"
- Kinder vermuten vielleicht verborgene Abhängigkeiten zwischen den Ausgängen: „*Ewig keine 6, jetzt kommt sie bestimmt*." Oder sie denken, der Versuchsausgang könne durch sachferne Umstände beeinflusst werden (z. B. besonders langes Schütteln oder Anpusten der Würfel).
- Manchen Kindern fällt es schwer, von der abgebildeten Situation (z. B. Lage der Kugeln im Säckchen) zu abstrahieren. Sie beziehen sich dann zum Beispiel auf die konkrete Lage der Kugeln im Bild oder die Anordnung der Flächen am Glücksrad (z. B. Flächen sind gleichmäßig verteilt oder es gibt

zusammenhängende Flächen) und schließen daraus auf den Ausgang des Zufallsexperiments.

- Je weniger konkrete Versuchserfahrungen ein Kind zum jeweiligen Zufallsexperiment gemacht hat, desto schwerer fällt ihm die Einschätzung der Gewinnchancen.

<u>Aufgabe 1 in Testheft B</u> stellt eine Situation dar, so wie sie Kinder häufig von Angelspielen kennen. Daher ist sie den meisten vertraut und für sie gut lösbar. Fehllösungen lassen mehr auf Sprachprobleme, statt auf stochastische Schwierigkeiten schließen. Gerade das Wort „unmöglich“ ist auf Grund der Vorsilbe für einige Kinder schwer lesbar bzw. zu deuten.

Bei <u>Aufgabe 2 in Testheft B</u> und <u>3 in Testheft C</u> sind ebenfalls sprachliche Hürden gegeben, weil hier sowohl stochastische als auch arithmetische Bezeichnungen zueinander in Beziehung gebracht werden. Außerdem sind die Wahrscheinlichkeitsbegriffe bei <u>Aufgabe 2 aus dem Testheft B</u> jeweils in einem Satz formuliert, was die sprachlichen Anforderungen der Aufgabe erhöht.

In <u>Aufgabe 4 in Testheft B</u> und <u>Aufgabe 5 in Testheft C</u> wird im Rahmen einer Spielsituation („Mensch ärgere dich nicht“) und einer Sachsituation (Münzwurf) das Verständnis des Fachbegriffs „sicher“ abgefragt. Gerade die Einbettung in eine Spielsituation bei <u>Aufgabe 4 in Testheft B</u> kann dazu führen, dass die Kinder verborgene Abhängigkeiten vermuten, wie sie die Antwortmöglichkeiten 1 bis 3 widerspiegeln. Die besondere Herausforderung bei <u>Aufgabe 5 in Testheft C</u> ist die Unterscheidung zwischen einer mathematischen und einer eher umgangssprachlichen Argumentation – viele Kinder wählen hier die eher alltagsgebräuchliche Begründung „Nein, weil es immer anders kommt, als man denkt“.

Bei der <u>Aufgabe 6 in Testheft B</u> besteht die besondere Schwierigkeit im Formulieren einer korrekten Begründung.

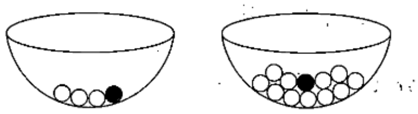
Hat er recht? Kreuze an. ☒ ja ☐ nein Begründe. nur zwei. [illegible]	Das Kind bezieht sich nur auf eine Sorte Münzen (hier auf die 20 Cent Münze) und formuliert keine allgemeine Begründung.
Hat er recht? Kreuze an. ☒ ja ☐ nein Begründe. Es kömmen einfach nicht drei Gleiche Münzen sein.	Es wird eine Aussage ohne Bezug auf die vorhandenen Münzen formuliert.

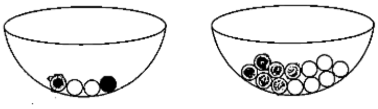
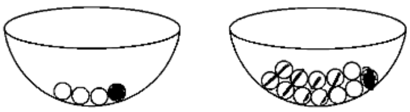
Hat er recht? Kreuze an. ☒ ja ■ nein Begründe. ~~...~~ weil 10 + 10 = 20	Es wird nach einer möglichen Rechnung gesucht.
Hat er recht? Kreuze an. ☒ ja ☐ nein Begründe. 50 50 danach 20 + 20 + 10 = 50	Es wird versucht, mit den gegebenen Münzen dreimal den gleichen Wert herzustellen (50 + 50 + 50). Dabei bleibt unberücksichtigt, dass es um gleiche Münzen und nicht um gleiche Beträge geht.

Auch bei der <u>Aufgabe 7 in Testheft C</u> besteht die besondere Schwierigkeit bereits im Erfassen des Sachverhalts bzw. im Formulieren einer Begründung. Mitunter wurde zwar richtig angekreuzt, aber keine Begründung notiert.

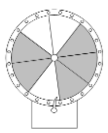
Hat sie recht? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein Begründe. denn üben macht denmeister denn örgend wann gewinnt mann ja. Hat sie recht? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein Begründe. In jedem Spiel ist möglich zu gewinnen.	Der Sachverhalt wurde nicht erkannt bzw. die Aufgabenstellung wurde nicht betrachtet.

Bei der <u>Aufgabe 8 in Testheft C</u> besteht die besondere Schwierigkeit im Erfassen eines Verhältnisses zwischen zwei Zahlen und dem Übertragen dieses Verhältnisses auf eine andere Gesamtmenge.

Elsa zieht mit geschlossenen Augen eine Kugel. Schwarz gewinnt. Die Gewinnchance soll für beide Schalen gleich sein. Färbe in der zweiten Schale die passende Anzahl Kugeln an. 	Es wird nur die Anzahl der einen schwarzen Kugeln übertragen ohne das Verhältnis zwischen schwarzen und weißen Kugeln an die größere Gesamtmenge anzupassen.

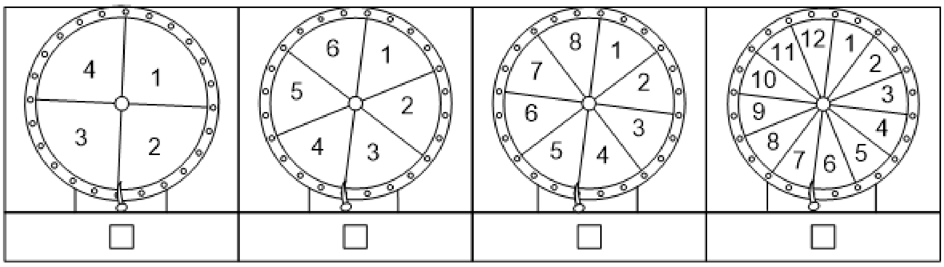
Elsa zieht mit geschlossenen Augen eine Kugel. Schwarz gewinnt. Die Gewinnchance soll für beide Schalen gleich sein. Färbe in der zweiten Schale die passende Anzahl Kugeln an. 	Es wird nur die Anzahl der weißen Kugeln beachtet. Die Anzahl der weißen Kugeln wird ohne Anpassung an die größere Gesamtmenge übertragen.
Elsa zieht mit geschlossenen Augen eine Kugel. Schwarz gewinnt. Die Gewinnchance soll für beide Schalen gleich sein. Färbe in der zweiten Schale die passende Anzahl Kugeln an. 	Der Auftrag nur in Schale 2 zu arbeiten, wurde nicht beachtet. Das Kind malt auch in der Schale 1 eine Kugel schwarz, so dass nun die Hälfte der Kugeln schwarz sind. Dieses Verhältnis ist auch in Schale 2 dargestellt.
Elsa zieht mit geschlossenen Augen eine Kugel. Schwarz gewinnt. Die Gewinnchance soll für beide Schalen gleich sein. Färbe in der zweiten Schale die passende Anzahl Kugeln an. 	Es wurden in Schale 2 nicht nur eine Kugel angemalt, sondern auch 8 Kugeln gestrichen. Das Verhältnis von 1 zu 3 wurde nicht auf die Menge 12 übertragen, sondern an die Menge der linken Schale angepasst und auf 4 reduziert.

Bei der <u>Aufgabe 9 in Testheft B</u> ist die Formulierung einer vollständigen Begründung besonders herausfordernd.

 Mit welcher Farbe hat man hier die größere Gewinnchance? Kreuze an. ☐ weiß ☒ grau Begründe. ✍ Weil es gibt 5 graue und mit grau hat man dann die gröẞte Gewinnchance.	In den Begründungen werden Aussagen zur Anzahl bzw. Häufigkeit der grauen Felder gemacht. Es fehlt jedoch der Vergleich zu den weißen Feldern, um die Begründung vollständig zu machen.
Mit welcher Farbe hat man hier die größere Gewinnchance? Kreuze an. ☐ weiß ☒ grau Begründe. ✍ Weil grau ihmer glück hat und bei Weiß kein glück.	Das Kind begründet seine subjektive Erwartung mit der angenommenen Wirkung der

	Farben weiß und grau auf den Zufall.
Mit welcher Farbe hat man hier die größere Gewinnchance? Kreuze an. ☒ weiß ☐ grau Begründe. Weil der Zeiger auf weiß steht	Das Kind bezieht sich in seiner Begründung auf das dargestellte Ergebnis in der illustrierenden Zeichnung.

Bei Aufgabe 10 in Testheft C liegt die größte Schwierigkeit darin zu erkennen, dass das Glücksrad mit dem größten Flächenanteil der Zahl 3 die größte Gewinnchance besitzt.



Fehlvorstellungen bzw. -interpretationen führen dazu, dass Kinder das Glücksrad mit den meisten Flächenanteilen auswählen und somit das letzte Glücksrad ankreuzen.

Bei Aufgabe 11 in Testheft B kann ein fehlendes oder mangelndes Verständnis bezogen auf das *Verhältnis* von schwarzen und weißen Kugeln zur Einschätzung der Gewinnchancen dazu führen, dass Kinder das Säckchen C mit den *meisten schwarzen Kugeln* ankreuzen.

Anregungen für den Unterricht

Ausgehend von den bei der Auswertung erkannten Schwierigkeiten in der Klasse kann eine Auswahl der folgenden grundlegenden, vertiefenden oder weiterführenden Erfahrungen und Übungen umgesetzt werden:

Begriffe festigen: „sicher – möglich, aber nicht sicher – unmöglich“

- Die Verwendung der Begriffe im Alltag stimmt teilweise nicht mit der exakten Anwendung in der Mathematik überein. Die Thematisierung solcher Beispiele führt zu entsprechenden Diskussionen (→ Argumentieren) und damit zum vertieften Verständnis der Unterscheidung:
    - „*Sicher wird es morgen regnen*.“
    - „*Du kannst bei dem Wetter unmöglich nach draußen gehen*.“

Dabei können alltagssprachliche Formulierungen der Kinder wie z. B. „Es kann nicht sein, dass ich eine 7 würfle.“ mit mathematischen Begriffen in Verbindung gebracht werden („ist unmöglich“) (→ Kommunizieren), z. B.:

Ordne zu:

Es kann nicht sein, dass er eine 7 würfelt.	Es ist unmöglich, dass er eine zweistellige Zahl zieht.
Er zieht auf jeden Fall eine zweistellige Zahl.	Es ist unmöglich, dass er eine gerade Zahl würfelt.
Er zieht nie eine zweistellige Zahl.	Es ist sicher, dass er eine zweistellige Zahl zieht.
Er könnte vielleicht zweimal hintereinander eine 2 würfeln.	Es ist möglich, dass er eine gerade Zahl würfelt.
Es könnte sein, dass er eine gerade Zahl würfelt.	Es ist unmöglich, dass er eine 7 würfelt.
Garantiert würfelt er keine gerade Zahl.	Er würfelt sicher eine Zahl größer als 0.
Ganz bestimmt würfelt er eine Zahl größer als 0.	Es ist möglich, aber nicht sicher, dass er zweimal hintereinander eine 2 würfelt.

- Die Thematisierung von Alltagsaussagen, bei denen die Wahrscheinlichkeit nahezu 100 % beträgt, fördert die Fähigkeit zur exakten Abgrenzung:
  - *„Es ist sicher, dass Du morgen wieder zur Schule gehst.“* (Aber: Möglichkeit der Erkrankung).
- Zur **Einführung der Begriffe** können verschiedene Aussagen aus der Erfahrungswelt der Kinder, notiert auf Kärtchen, den entsprechenden Sprechblasen zugeordnet und diskutiert werden (→ Kommunizieren, Argumentieren), z. B.:

Es ist sicher, dass ….

Es ist möglich, dass ….

Es ist unmöglich, dass ….

ich beim Würfeln zweimal hintereinander eine Drei würfle.	der FC Bayern aus der Bundesliga absteigt.
ich einen Klassenkameraden am Nachmittag beim Einkaufen treffe.	Delfine nur im Wasser leben.
man im Urlaub jemanden trifft, den man kennt.	um 9.30 h Pause ist.
man irgendwann stirbt.	Kinder älter als ihre Eltern sind.
ein Mensch eine Woche ohne Flüssigkeit leben kann.	es bei uns eine Überschwemmung gibt.
ich 300 Jahre alt werde.	ich 80 Jahre alt werde.
es im Dezember hitzefrei gibt.	es heute Hausaufgaben gibt.

Karotten auf dem Apfelbaum wachsen können.	wir uns im September wiedersehen.
im Herbst Äpfel reif werden.	es heute Pfannkuchen als Mittagessen gibt.
ich nächste Woche krank bin.	aus einem Frosch ein Prinz wird, wenn ich ihn küsse.
auf der Straße drei schwarze Autos hintereinander parken.	ich heute fernsehen darf.
ich beim Wettlauf im Sport gewinne.	ich irgendwann eine Brille bekomme.

- Des Weiteren bietet es sich an, dass Schüler*innen Aussagen aus ihrer Lebenswelt selbst formulieren, z. B.:
    - Adam: „Es ist möglich, dass über die Schule morgen ein Adler fliegt."
    - Laurin: „Es ist möglich, dass ich heute ein BMX-Rad bekomme."
    - Annabel: „Es ist sicher, dass Sophie und ich Zwillinge sind."
    - Leon: „Es ist unmöglich, dass bei einem Wasserfall das Wasser nach oben fließt."
    - Bengü: „Es ist möglich, dass beim Bau eines Hauses eine Bombe gefunden wird."
    - Julia: „Es ist unmöglich, dass ich gestern gestorben bin."
    - Zehra: „Es ist sicher, dass ich beim Baden nass werde."
    - Tristan: „Es ist sicher, dass ich jünger bin als meine Mama."
- Zur **Festigung der Begriffe und zum Thematisieren von Eintrittswahrscheinlichkeiten** von Ereignissen kann als kindgemäßer, lebensnaher Sachverhalt eine Angelsituation genutzt werden. Einige Kinder erhalten vorgegebene Sätze und zeichnen dazu passende Aquarien an die Tafel. Im Anschluss wird gemeinsam reflektiert, ob auch andere Sätze zum Bild passen. Auf diese Weise wird den Kindern deutlich, dass sowohl die Aussage, „Es ist unmöglich, einen weißen Fisch zu angeln", als auch die Aussage „Es ist sicher, einen blauen Fisch zu angeln" zum gleichen Bild passen können. Als Vertiefung werden in Einzel- oder Partnerarbeit Aquarien gemalt. Dazu ziehen die Kinder verdeckt die Aussagen als Malanordnung. Differenzierend können die Kinder zusätzliche Aussagen zu ihrem Bild formulieren (→ Kommunizieren, Argumentieren), z. B.:
    - Es ist unmöglich, dass ein roter Fisch geangelt wird.
    - Es ist unmöglich, dass ein blauer Fisch geangelt wird.
    - Es ist sicher, dass ein blauer Fisch geangelt wird.
    - Es ist möglich, aber nicht sicher, dass ein roter Fisch geangelt wird.
    - Es ist gleich wahrscheinlich, dass ein roter oder ein blauer Fisch geangelt wird.

- Es ist wahrscheinlicher, dass ein blauer Fisch geangelt wird als dass ein roter Fisch geangelt wird.
- Es ist unwahrscheinlicher, dass ein roter Fisch geangelt wird als dass ein blauer Fisch geangelt wird.

- Anlegen eines Wortspeichers (ggf. grafisch ergänzt) für Zufallsexperimente, der als Grundlage für selbst erstellte Aufgaben der Kinder dienen kann, z. B.:

Zufallsexperiment	**Wortspeicher Vergleiche**	**Wortspeicher Begriffe**
Glücksrad drehen Würfel werfen Kugeln ziehen Lose ziehen Kreisel drehen Münze werfen …	mehr als weniger als genauso viele größer als kleiner als …	Gewinnchance sicher möglich, aber nicht sicher unmöglich wahrscheinlicher als weniger wahrscheinlich als Fifty-fifty-Chance gleichwahrscheinlich …

- Die bei manchen Aufgaben notwendige Unterscheidung von „sicher“ und „möglich“ durch die Ergänzung „möglich, aber nicht sicher“ führt zu einer noch differenzierteren Betrachtung. Gleichzeitig werden fruchtbare Diskussionen in Gang gebracht (→ Argumentieren). So kann im folgenden Beispiel über die „Richtigkeit“ der gesetzten Kreuze diskutiert werden.
   - „Hier sind zwei Texte. Beschreibe: Was unterscheidet die Texte? Was ist gleich? Würdest du die Kreuze anders setzen? Warum?“

„Ich ziehe aus einem Säckchen mit 5 weißen Kugeln eine Kugel. Sie ist weiß.“

Dieses Ereignis ist ☒ *sicher* ☒ *möglich* ☐ *unmöglich.*

„Ich ziehe aus einem Säckchen mit 5 weißen Kugeln eine Kugel. Sie ist weiß.“

Dieses Ereignis ist ☒ *sicher* ☐ *möglich, aber nicht sicher* ☐ *unmöglich.*

- In spielerischer Weise können die Begriffe durch die Verwendung von Bildkarten visualisiert und gefestigt werden, z. B.: „Daumen hoch“ für „sicher“, „Daumen nach unten“ für „unmöglich“ und „nach vorne geöffneten Händen“ für „möglich, aber nicht sicher“.

- Wir sammeln Aussagen zu den Begriffen „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ und „unmöglich“ zu Spielsituationen. Zu welchem Begriff findet ihr die meisten Aussagen?

	sicher	möglich, aber nicht sicher	unmöglich

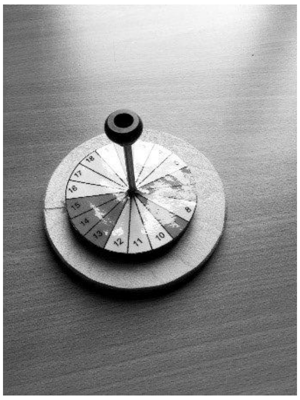
Spielwürfel	Ich würfle eine 1,2,3,4,5 *oder* 6.	Ich würfle eine 1. Ich würfle eine 2. Ich würfle eine 2 oder 3. Ich würfle eine 1,2,3,4 oder 5.	Ich würfle eine 7.
Münzwurf: Zahl oder Bild?	Eine Zahl *oder* ein Bild liegt oben.	Ein Bild liegt oben. Eine Zahl liegt oben.	-
Reißnagel/Heftzwecke werfen	Spitze zeigt nach oben oder Spitze zeigt nach unten.	Spitze zeigt nach oben. Spitze zeigt nach unten.	-

- Die Kinder beschreiben auf Kärtchen Ereignisse die sicher bzw. unmöglich sind. Sie kommen so mit anderen ins Gespräch (→ Argumentieren, Kommunizieren) und die Lehrkraft erhält Einblick in evtl. Fehlvorstellungen. Die Kärtchen können im Unterricht während einer täglichen Übungsphase immer wieder Anlass zur Klärung der mathematischen Begriffe „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ bzw. „unmöglich“ geben.

Wahrscheinlichkeiten einschätzen

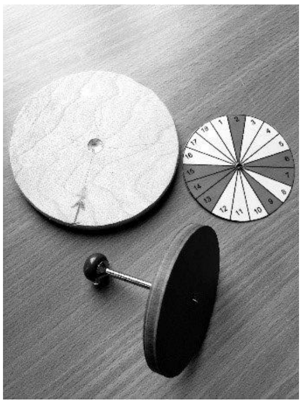
Wenn den Schüler*innen deutlich geworden ist, dass diese Begriffe zur mathematischen Fachsprache gehören und wenn sie hinreichend Übung haben, mit diesen Begriffen Eintrittswahrscheinlichkeiten zu beschreiben (z. B. bei Spielausgängen, bei Problemstellungen aus der Kombinatorik, beim Eintreten von Ereignissen im Alltagsleben), kann man dazu übergehen, Eintrittswahrscheinlichkeiten von Ereignissen quantitativ differenzierter zu betrachten und zu beschreiben.

Durch experimentelles, handlungsorientiertes Vorgehen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. Drehen eines Glücksrades, Ziehen von Losen oder Kugeln, Werfen einer Münze oder eines Würfels), können inhaltliche Überlegungen zum Einschätzen, Vergleichen und Begründen von Gewinnchancen vorbereitet werden.



Copyright Foto: IQB

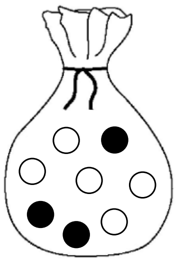
Copyright: IQB



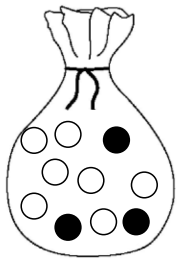
Copyright Foto: IQB

- Es bietet sich im Anschluss an konkrete Handlungserfahrungen an, die differenzierte Betrachtung von „möglichen“ Ereignissen zwischen „sicher“ und „unmöglich“ genauer zu verorten – zunächst beschränkt auf den Vergleich mehrerer Ereignisse, die in Relation zueinander gesehen werden (Begriff „**wahrscheinlicher** als…“):

Bei welchem dieser Säckchen ist es wahrscheinlicher, eine schwarze Kugel zu ziehen? A

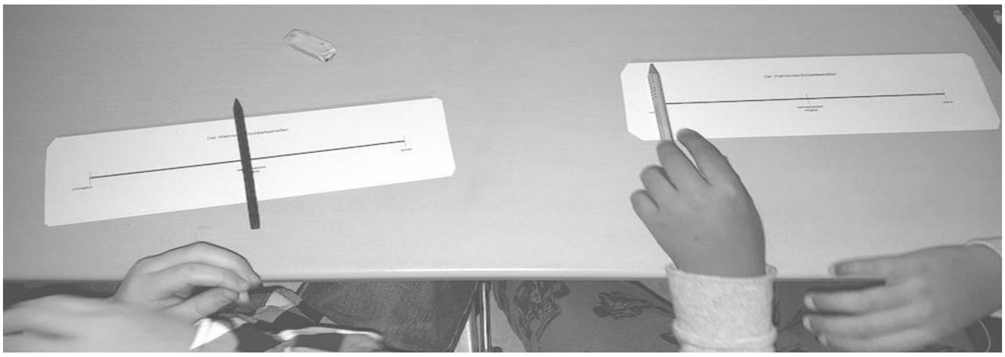


B



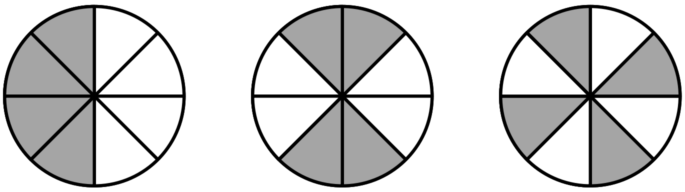
- Für ein Ereignis/Ergebnis, das möglich, aber nicht sicher ist, gibt es eine breite Wahrscheinlichkeitsskala. In der Grundschule wird man diese Skala nur sehr eingeschränkt bei Vergleichen von Ergebnissen verdeutlichen können mit den Begriffen wahrscheinlicher, weniger wahrscheinlich, die Wahrscheinlichkeit ist kleiner bzw. größer, die Wahrscheinlichkeit ist am größten/ kleinsten usw.
- Als Hilfsmittel kann hier der Wahrscheinlichkeitsstreifen genutzt werden. Mit diesem kann man über das Verhältnis von verschiedenen Eintrittsmöglichkeiten von Ereignissen kommunizieren und entsprechende Vorstellungen aufbauen.

Jedes Kind schätzt durch Positionierung eines Stiftes auf dem Streifen ein, wie hoch es die Wahrscheinlichkeit eines gegebenen Ereignisses einstuft (→ Darstellen). Diese Einschätzung ist dann im Gespräch zu begründen (→ Kommunizieren, → Argumentieren).



Copyright Foto: IQB

- Zur Verdeutlichung der gleichen Gewinnwahrscheinlichkeit bei verschieden gefärbten Glücksrädern mit jeweils gleichem Flächenanteil der „Gewinnfarbe“ können mehrere Glücksräder zerschnitten und die einzelnen Segmente der gleichen Farbe zusammengefügt werden (enaktives Handeln als Grundlage für das Verstehen). Es wird deutlich, dass nicht die *Anzahl* oder *Lage* der Segmente, sondern die Gesamtfläche der Segmente (bzw. die Gesamtlänge der Segmentbögen) ausschlaggebend für die Gewinnwahrscheinlichkeit ist.

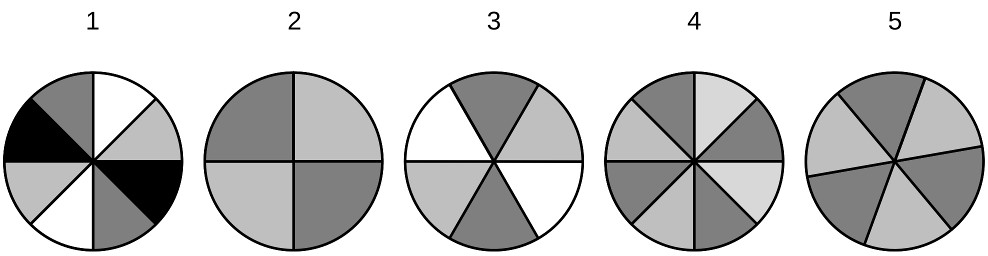


Vergleichen von Gewinnchancen

Nach selbst durchgeführten Zufallsexperimenten mit ersten Erfahrungen zu Gewinnchancen und der Wahrscheinlichkeit zum Eintreten eines Ereignisses können Gewinnchancen bei verschiedenen Zufallsgeneratoren (z. B. Münzen, Würfel, Glücksrad…) miteinander verglichen werden.

Anfangs sollten nur zwei Ereignisse direkt miteinander verglichen werden, um dann eine Ordnung von sicher nach unmöglich herzustellen.

Hellgrau gewinnt. Bei welchen Glücksrädern ist die Chance zu gewinnen gleich groß?



Kreuze an.

☐ bei Glücksrad 1 und Glücksrad 2

☐ bei Glücksrad 1 und Glücksrad 3

☐ bei Glücksrad 1 und Glücksrad 4

☐ bei Glücksrad 1 und Glücksrad 5

☐ bei Glücksrad 2 und Glücksrad 3

☐ bei Glücksrad 2 und Glücksrad 4

☐ bei Glücksrad 2 und Glücksrad 5

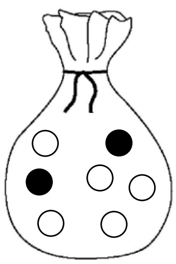
☐ bei Glücksrad 3 und Glücksrad 4

☐ bei Glücksrad 3 und Glücksrad 5

☐ bei Glücksrad 4 und Glücksrad 5

Weitere Möglichkeiten des Vergleichs ergeben sich, wenn die Gewinnregel geändert wird z. B. weiß gewinnt.

- Anknüpfend an Aufgaben zur Einschätzung von Gewinnchancen beim Ziehen von Kugeln *(wie in Aufgabe 11)* können vorgegebene Begründungen gemeinsam auf ihre Korrektheit geprüft und diskutiert werden (→ Kommunizieren,→ Argumentieren).



„Es ist wahrscheinlicher, eine weiße Kugel zu ziehen, als eine schwarze Kugel.“

Hat Kira recht? Begründe Deine Antwort.

Mögliche (teils nicht zutreffende / nicht ausreichende) Begründungen als Diskussionsgrundlage:

Kira hat recht:

- Es gibt 5 weiße Kugeln und 2 schwarze Kugeln.
- Es sind nur zwei schwarze Kugeln.
- Es sind 5 weiße Kugeln.
- Es sind mehr weiße als schwarze Kugeln.
- Es sind drei weiße Kugeln mehr als schwarze.

Kira hat nicht recht:

- Es sind eine weiße und eine schwarze Kugel ganz oben im Säckchen. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für beide Farben gleich.
- Es gibt weiße und schwarze Kugeln.
- Die schwarzen Kugeln bringen Glück, weil es nur zwei gibt.

Zufallsexperimente selbst entwickeln und Gewinnchancen beeinflussen

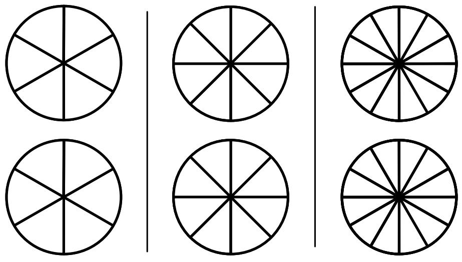
Neben dem Erproben und Durchführen von verschiedenen Zufallsexperimenten bildet die aktive Gestaltung eigener Konstellationen für ein Zufallsexperiment nach Vorgabe oder nach eigener Aufgabenstellung (→ Darstellen; vgl. hierzu auch die oben geschilderte Angelsituation) eine stabile Basis für die Fähigkeit zur Einschätzung der Wahrscheinlichkeit.

Ein erster Zugang zur selbständigen Beeinflussung von Gewinnchancen stellt das Färben von Glücksrädern oder Kugeln dar.

Ein gleichmäßig in zahlreiche und/oder verschiedene Sektionen unterteiltes Glücksrad kann von den Kindern mehrfach unterschiedlich gefärbt werden, mit der Maßgabe, dass dennoch überall die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit bestehen soll.

So kann das Einfärben der Segmente eines Glücksrads zum Bestimmen und Begründen der Gewinnchancen genutzt werden, wie im Folgenden dargestellt:

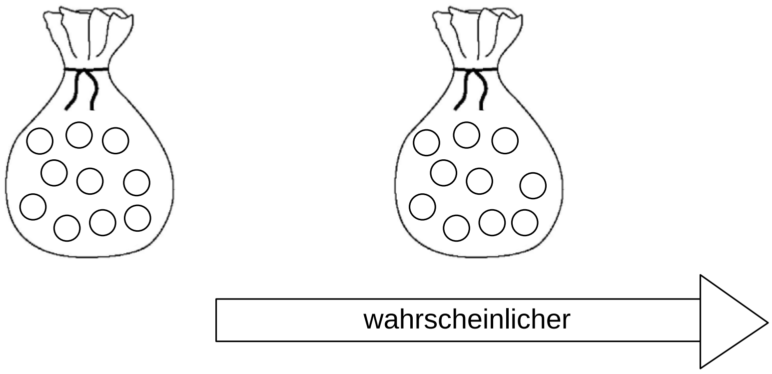
Rico, Ben und Gina drehen am Glücksrad.
Rico gewinnt bei rot, Ben bei blau und Gina gewinnt bei gelb.
Färbe die Glücksräder so, dass jeder die gleiche Chance zum Gewinnen hat.
Finde verschiedene Möglichkeiten.



Für einen einfachen Vergleich von Gewinnchancen bei Kugeln in Säckchen ist es sinnvoll, die Gesamtzahl der Kugeln zunächst nicht zu verändern.

In jedem Säckchen soll es schwarze Kugeln geben.

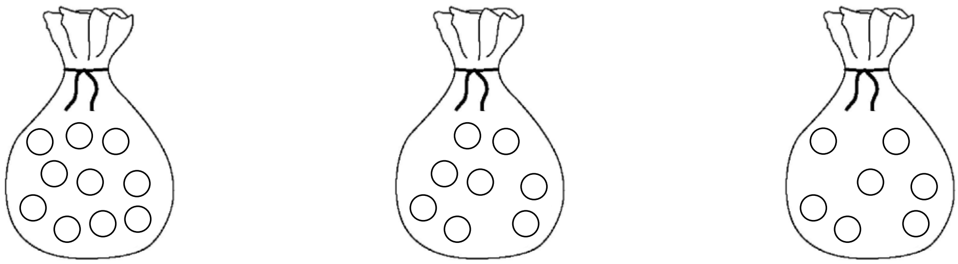
Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, soll im linken Säckchen am geringsten, im rechten Säckchen am höchsten sein. Male passend an.



Die Aufgaben zum selbstständigen Beeinflussen der Gewinnchancen werden anspruchsvoller, wenn die Gesamtmenge z. B. bei Kugeln in verschiedenen Säckchen unterschiedlich ist, wie in den folgenden Beispielen.

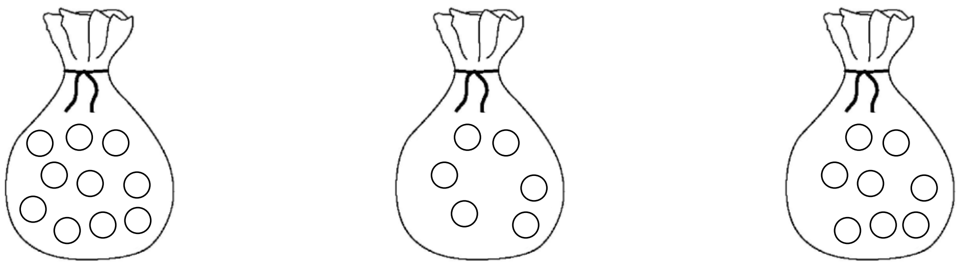
Färbe einzelne Kugeln schwarz.

Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, soll im linken Säckchen am geringsten, im rechten Säckchen am höchsten sein.



Die Anzahl der Kugeln in den Säckchen darf nicht teilerfremd sein, wenn die Wahrscheinlichkeit gleich sein soll. In diesem Fall ist die Anzahl durch 2 teilbar.

Färbe die Kugeln so, dass bei jedem Säckchen die gleiche Wahrscheinlichkeit besteht, eine schwarze Kugel zu ziehen.



Bei Glücksrädern bietet sich zur Erhöhung des Schwierigkeitsgrades eine Erweiterung der Anzahl der verwendeten Farben auf drei oder mehr an. Dabei kann variiert werden, ob mehrere Farben Gewinnfarben sind, oder nur eine. Entscheidend ist jeweils die gesamte „Gewinnfläche“.

9. Aufgaben zur Kombinatorik

Aufgabe 33 in Testheft C

Paolo würfelt mit einem Spielwürfel zwei Mal hintereinander.
Mit welchen Augenzahlen kann er die Summe 10 erreichen?
Trage alle Möglichkeiten in die Tabelle ein.

1. Wurf	2. Wurf

Auswertung

<table>
<tr><td>RICHTIG</td><td>
<table>
<tr><th>1. Wurf</th><th>2. Wurf</th></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td></tr>
</table>
Die Reihenfolge der Zeilen ist beliebig.
Das Ergebnis 5 / 5 gibt es nur einmal, darf also auch nur einmal aufgelistet
werden.
Korrekt gemalte Würfelbilder sind auch richtig.
</td></tr>
<tr><td>FALSCH</td><td>alle anderen Antworten, z. B. wenn die 5 zwei Mal aufgeschrieben oder wenn zusätzlich weitere Zahlenpaare genannt werden</td></tr>
</table>

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen (1.3.e)

Aufgabe 32 in Testheft C

Carlotta will einen Spielwürfel werfen und die Augenzahl dann verdoppeln.

Sie sagt: „Es ist sicher, dass das Ergebnis eine gerade Zahl ist.“

Stimmt das? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.

✍ ____

____

____

Auswertung

RICHTIG	JA wurde angekreuzt UND es wurde eine Begründung gegeben, in der zum Ausdruck kommt, dass das Ergebnis einer Verdopplung immer eine gerade Zahl ist, z. B.: • Wenn man Zahlen verdoppelt, sind sie immer gerade. • Das Doppelte von einer Zahl ist (immer) gerade. • Auch wenn ungerade Zahlen verdoppelt werden, werden sie gerade. Die Überprüfung aller Möglichkeiten gilt auch als richtig. 1 + 1 = 2 2 + 2 = 4 3 + 3 = 6 4 + 4 = 8 5 + 5 = 10 6 + 6 = 12
FALSCH	NEIN wurde angekreuzt ODER JA wurde angekreuzt UND/ODER keine, eine falsche oder unvollständige Begründung gegeben oder eine Begründung, die sich nicht darauf bezieht, dass das Ergebnis einer Verdopplung immer eine gerade Zahl ist, z. B.: • Auf dem Spielwürfel gibt es auch ungerade Zahlen. • Beim Würfeln weiß man nie was kommt.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Verallgemeinern und Reflektieren (III)
Kompetenzstufe	V
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2); Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen (1.3.e); Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) (5.2.a)

Aufgabenbezogener Kommentar

Die vorliegenden Aufgaben stammen aus dem Bereich der Kombinatorik. Man unterscheidet in diesem Zusammenhang unter anderem sogenannte kombinatorische Grundmuster.

- Kombinationen sind Zusammenstellungen von Objekten, bei denen die Anordnung ohne Bedeutung ist („ohne Beachten der Reihenfolge“): Werden dieselben Dinge verschieden angeordnet, handelt es sich um dieselbe Kombination. Beispiel-Kontext: „Ziehen mehrerer Steine aus einem Glas mit bunten Steinen“
- Permutationen und Variationen sind Zusammenstellungen von Objekten, bei denen die Anordnung bedeutsam ist („mit Beachten der Reihenfolge“): Werden dieselben Dinge verschieden angeordnet, handelt es sich um jeweils andere Permutationen oder Variationen. Beispiel-Kontext: „Bauen von Türmen aus bunten Steinen“

Neben der Anordnung sind „Wiederholungen“ relevant.

Permutationen, Variationen und Kombinationen „ohne Wiederholung“ sind solche, bei denen nur *verschiedene* Sorten auftreten, keine Sorte kommt innerhalb einer Anordnung mehrfach vor: „Türme aus bunten Steinen, jede Farbe kommt nur einmal vor“.

Permutationen, Variationen und Kombinationen „mit Wiederholung“ sind solche, bei denen Sorten mehrfach auftreten können. Bei der Auflistung aller Möglichkeiten werden auch die mitgezählt, bei denen keine Sorte mehrfach vorkommt: „Türme aus bunten Steinen, Farben können mehrfach vorkommen“.

Einige Worte, zum Beispiel „Kombination“, werden in der Alltagssprache mit einer anderen Sinngebung verwendet als in der Fachsprache. Obwohl die Fachbegriffe nicht explizit im Unterricht thematisiert werden, ist es wichtig, die jeweiligen, verschieden gearteten kombinatorischen Aufgabenstellungen in Kontexten zu betrachten und die Lösungen handelnd zu erarbeiten. Dabei sollte auch die Versprachlichung der Handlung thematisiert werden.

Wenn viele mögliche Lösungen zu erarbeiten sind, ist es nötig, Wert auf die Zähl*strategien* zu legen, mit denen die jeweils gefragten Anzahlen bestimmt werden. Dabei verfahren die Kinder handlungsorientiert, dokumentieren ihre Ergebnisse und erlernen Strategien, die ein Ermitteln aller Zusammenstellungen übersichtlich und fehlerfrei ermöglichen.

So verhindern beispielsweise systematische Auflistungen Doppelungen und Auslassungen. Durch materialgestütztes Experimentieren mit anschließendem Ordnen und Sortieren gewinnen Kinder einen produktiven Zugang zur kombinatorischen Struktur einer Situation (siehe Anregungen für den Unterricht). Dadurch soll ein Verständnis für Zählprinzipien bei kombinatorischen Fragestellungen aufgebaut werden.

Bei <u>Aufgabe 33 in Testheft C</u> spielt die Reihenfolge eine Rolle (4 und 6 sowie 6 und 4 unterscheiden sich voneinander) und die Zahlen können auch doppelt vorkommen (5 und 5). „Mit Wiederholung“ bedeutet hier: Bei jedem Wurf sind alle Zahlen von 1 bis 6 möglich.

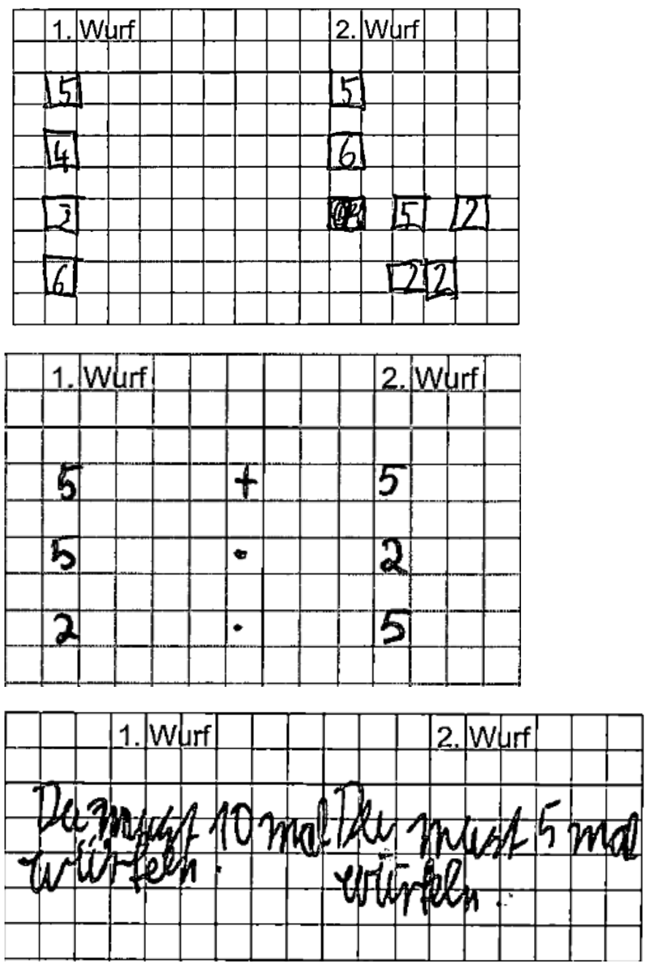
In <u>Aufgabe 32 in Testheft C</u> ist der Kontext ebenfalls ein Würfelexperiment. Den Kindern wird eine Situation geschildert, bei der die Handlung noch nicht abgeschlossen ist. Der Ausgang des Prozesses ist nicht bekannt und muss gedanklich durchgespielt werden. Das Wissen über die auf einem Spielwürfel vorhandenen Augenzahlen kann als gegeben angenommen werden. Zur Lösung der Aufgabe muss eine Begründung gefunden und geschrieben werden. Diese kann über die Auflistung aller sechs möglichen Ergebnisse des Experiments geschehen oder verallgemeinert die Regel nutzen, dass bei der Verdopplung stets gerade Zahlen entstehen.

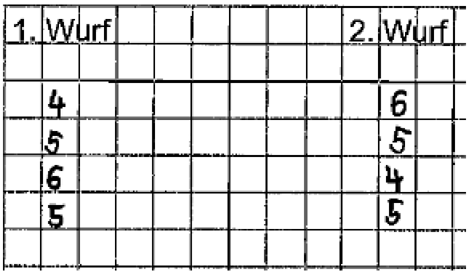
Mögliche Schwierigkeiten

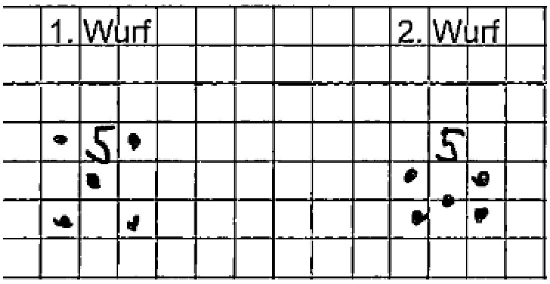
Das Verständnis für die Modellierung kombinatorischer Aufgaben gestaltet sich herausfordernd, da meist noch keine Standardverfahren zur Lösung kombinatorischer Fragestellungen zur Verfügung stehen. Die Kinder sind gefordert, sich die zugrundeliegende kombinatorische Struktur zu erschließen. Das Auflisten aller kombinatorischen Möglichkeiten verlangt im Anschluss eine Systematik, um Doppelungen oder Auslassungen einzelner kombinatorischer Elemente zu vermeiden.

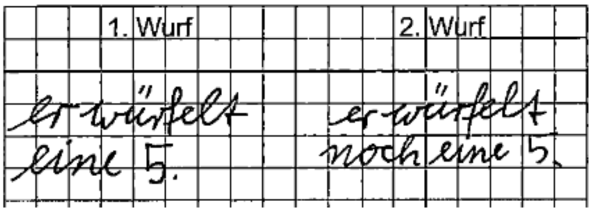
In <u>beiden Aufgaben</u> ist ein gedankliches Operieren mit dem Würfel gefragt, die Kinder müssen beachten, dass auf dem Würfel nur die Zahlen von 1 bis 6 vorkommen.

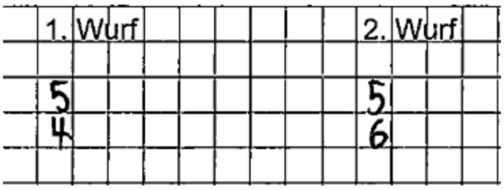
Dies zu erkennen stellt die erste Herausforderung im Lösungsprozess dar. Eine Schwierigkeit ist zudem das systematische Auflisten zur Lösungsfindung. Erfolgt dies nicht konsequent, können sich Doppelungen oder Auslassungen von kombinatorischen Möglichkeiten ergeben.

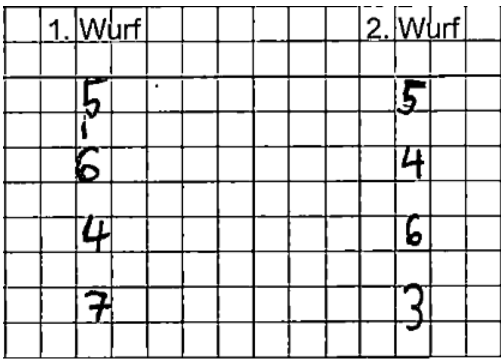
	Aufgabenstellung nicht verstanden, da gegebenenfalls Begriffe wie „2. Wurf“ bzw. „Summe“ nicht bekannt sind.

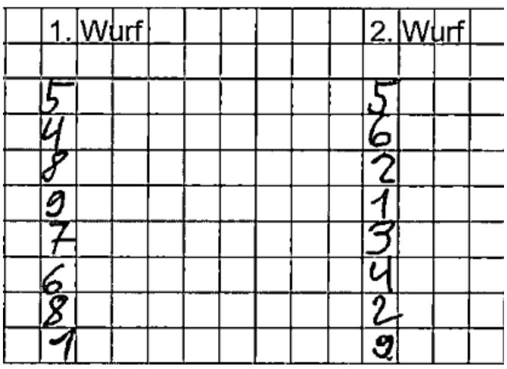
<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>5er Pasch doppelt notiert.</td>
</tr>
<tr>
<td>




</td>
<td>Unvollständig, Auslassungen von kombinatorischen Möglichkeiten</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>Eine kombinatorische Möglichkeit fehlt, da Reihenfolge der möglichen Ergebnisse des Experiments nicht beachtet</td>
</tr>
<tr>
<td>




</td>
<td>Würfelzahlen nicht beachtet</td>
</tr>
</table>

In <u>Aufgabe 32 in Testheft C</u> soll eine Begründung gefunden und aufgeschrieben werden. Wenn Kinder die Begründung über die Aufzählung aller möglichen Ergebnisse des Experiments formulieren wollen, so ist eine mögliche Fehlerquelle eine unvollständige Auflistung. Der Begriff „sicher“ muss von den Kindern als mathematischer Fachbegriff verstanden werden im Sinne von „bei jedem Ergebnis des Experiments trifft die Aussage zu, eine andere Möglichkeit ist ausgeschlossen“.

Begründe. Weil es kann doch sein das Careatta auch eine gehradene Zahl wirft.	Aufgabenstellung falsch interpretiert „verdoppeln“ überlesen
Begründe. weil da nur die 5,3,1 eine ungrade zahl ist deswegen kann sie eine gradezah wird.	
Begründe. Weil das doppelt ist eine 2+2=4 und es ist eine grade zahl.	Nur beispielhaft argumentiert, als Begründung unvollständig.
Begründe. Wenn sie ~~B~~ Die 3 verdoppelt ist das ergebnis 6, bei der Fünf ist das ergebnis 10.	

Anregungen für den Unterricht

Die vielfältigen kombinatorischen Aufgabenstellungen sollten materialgestützt und handlungsorientiert im Unterricht realisiert werden. Dabei gelangt man vom weniger oder nicht systematischen Probieren zum systematischen Probieren und entwickelt schließlich durch gemeinsame Reflektion von Schülerlösungen mit den Kindern zielführende Strategien (→ Problemlösen).

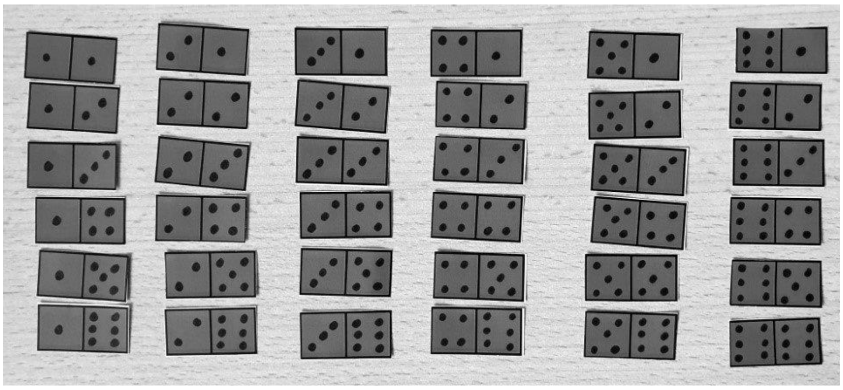
Anhand verschiedener Würfelexperimente können unterschiedliche Kombinationsmöglichkeiten und damit unterschiedlich wahrscheinliche Ergebnisse untersucht werden.

Wurde bisher noch nicht mit Würfeln gearbeitet, sollte zunächst der Aufbau eines Spielwürfels mit den Würfelzahlen 1 bis 6 thematisiert werden.

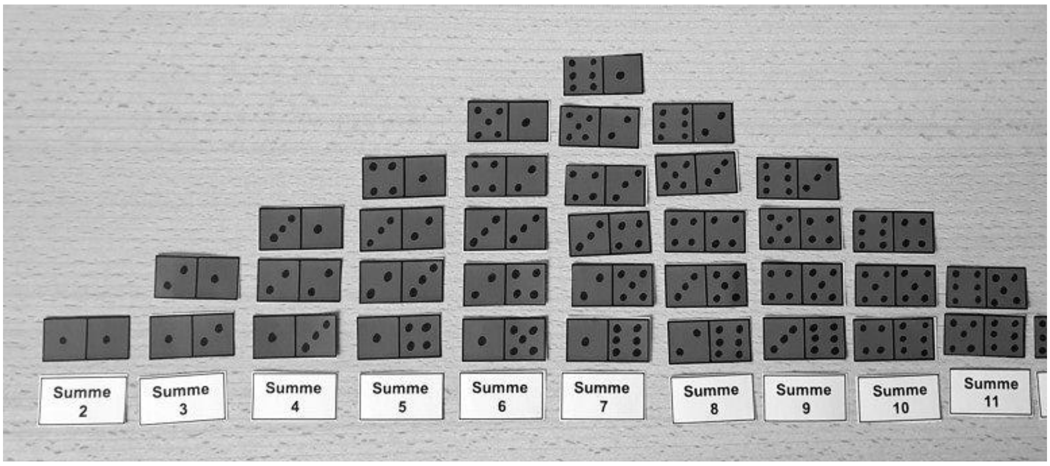
Dann können Kombinationen mehrerer Würfe und deren Summen bzw. Produkte betrachtet werden. So erkennen die Kinder z. B., dass mit 2 Würfeln die Summen 2 und 12 nur durch jeweils eine bestimmte Kombination erreicht werden, die Summe 7 hingegen am häufigsten vorkommt.

Um zu verdeutlichen, dass es sich z. B. bei 3 + 4 und 4 + 3 bzw. bei 3 · 2 und 2 · 3 um zwei unterschiedliche Ergebnisse handelt, sollten die Experimente möglichst mit Würfeln in unterschiedlichen Farben durchgeführt werden.

Dabei bietet es sich an, die möglichen Würfelergebnisse erst zu notieren und diese dann auszuschneiden und zu strukturieren (→ Darstellen).



Mögliche Würfe mit zwei Würfeln
Copyright Foto: IQB



Mögliche Summen mit zwei Würfeln
Copyright Foto: IQB

Zur Veranschaulichung der möglichen Kombinationen kann auch mit Tabellen gearbeitet werden.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

·	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Um den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu vertiefen, kann man im Anschluss (unterschiedlich) faire Spielregeln erarbeiten, die bei den Würfelexperimenten gelten sollen (→ Kommunizieren). Auch dazu müssen im Vorfeld die möglichen Kombinationen durchgespielt und notiert werden. Dann markieren und vergleichen die Kinder, welche Ergebnisse zu einem Gewinn führen.

z. B. Max und Moritz würfeln mit 2 Würfeln.

Spiel 1: Max gewinnt bei der Würfelsumme 7, Moritz gewinnt bei der Würfelsumme 10.

Spiel 2: Moritz gewinnt, wenn das Produkt der beiden Würfe eine gerade Zahl ist. Max gewinnt, wenn das Produkt eine ungerade Zahl ist.

Ist das Spiel fair?

Spiel 1:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Spiel 2:

·	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

3 Würfel

	Punkte	Ben	Lea
Drilling	10		
Zwilling	2		
Summe > 12	4	4	
gerade Summe	3		
3 Zahlen in Folge	12		12
genau eine 6 dabei	5		
...			
Ergebnis			

Eine andere Möglichkeit, unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten zu thematisieren ist das Spiel „3 Würfel“, welches an das bekannte Kniffel bzw. Yatzy angelehnt ist.

Spielverlauf:

Wer an der Reihe ist, würfelt zu Beginn seines Zuges mit 3 Würfeln. Günstig erscheinende Würfel werden beiseitegelegt, einzelne oder auch alle Würfel dürfen ein zweites Mal gewürfelt werden, um ein besseres Ergebnis zu erreichen.

Ziel ist es, eine der vorgegebenen Bedingungen zu erfüllen, zum Beispiel Summe größer 12.

Der Spieler entscheidet, für welche Bedingung er den Wurf verwenden kann und notiert sich die dazugehörigen Punkte in seiner Spalte auf der Liste.

Beispiel: Wurf mit 4, 4, 5

In der Runde könnte der Spieler die Bedingung Summe >12 oder Zwilling erfüllen.

Schafft es ein Spieler in einer Runde nicht, eine noch offene Bedingung zu erzielen, so muss er eine Bedingung auswählen und streichen.

Gewonnen hat, wer am Ende des Spiels die meisten Punkte sammeln konnte.

Unterrichtliche Spielvorbereitung:

Im Vorfeld werden Bedingungen, die erwürfelt werden sollen, mit der Klasse erarbeitet und ein Spielplan erstellt. Den Bedingungen werden angemessene Punktzahlen zugeordnet, je nachdem, wie wahrscheinlich es ist, das Ereignis zu erzielen. Je mehr Würfelkombinationen die Bedingung erfüllen, umso weniger Punkte gibt es.

Beispiel:

Es gibt 6 Möglichkeiten für einen „Drilling". Hier im Beispiel wurden der Bedingung 10 Punkte zugeordnet.

Zur Bedingung „3 Zahlen in Folge" gibt es nur 4 Möglichkeiten 1, 2, 3 oder 2, 3, 4 oder 3, 4, 5 und 4, 5, 6.

Demnach wurden mehr Punkte geben, hier 12.

Leistungsstarke Kinder können alle 56 möglichen Ergebnisse, 3 Würfel zu werfen, sammeln. Zum Ermitteln, wie viele „günstige Kombinationen" es jeweils für eine Bedingung gibt, können dann in einer Kopie der 56 möglichen Ergebnisse jeweils die Kombinationen gekennzeichnet werden, die einen Gewinn für die jeweilige Bedingung darstellen. Im Beispiel „Drilling" sind es 6 Möglichkeiten. Das Abschätzen der Gewinnchancen ist Voraussetzung für die Zuweisung angemessener Punkte.

Bedingung	Anzahl der Möglichkeiten	Punkte
Drilling	6	10
Zwilling	32	2
Summe > 12	17	4
gerade Summe	26	3
3 Zahlen in Folge	4	12
genau eine 6 dabei	15	5
...		

6	6	6	6	5	5	6	4	4	6	3	3	6	2	2	6	1	1
6	6	5	6	5	4	6	4	3	6	3	2	6	2	1			
6	6	4	6	5	3	6	4	2	6	3	1						
6	6	3	6	5	2	6	4	1									
6	6	2	6	5	1												
6	6	1															
			5	5	5	5	4	4	5	3	3	5	2	2	5	1	1
			5	5	4	5	4	3	5	3	2	5	2	1			
			5	5	3	5	4	2	5	3	1						
			5	5	2	5	4	1									
			5	5	1												
						4	4	4	4	3	3	4	2	2	4	1	1
						4	4	3	4	3	2	4	2	1			
						4	4	2	4	3	1						
						4	4	1									
									3	3	3	3	2	2	3	1	1
									3	3	2	3	2	1			
									3	3	1						
												2	2	2	2	1	1
												2	2	1			
															1	1	1

10. Abbildungsverzeichnis

Anhang – Nummerierung der einzelnen Kompetenzen

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der KMK vom 15.10.2004 sind die einzelnen Kompetenzen nicht durchnummeriert aufgelistet. Aus diesem Grunde findet sich zur Erleichterung der praktischen Arbeit mit dem Material in Teil III hier eine nummerierte Auflistung, die optional verwendet und separat ausgedruckt werden kann.

Ergänzung der allgemeinen mathematischen Kompetenz *Technische Grundfertigkeiten*

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der KMK vom 15.10.2004 ist die allgemeine mathematische Kompetenz *Technische Grundfertigkeiten* noch nicht enthalten. Eine inhaltlich ähnlich beschriebene allgemeine mathematische Kompetenz findet sich allerdings bereits bei den Bildungsstandards für den Sekundarbereich („Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“). Mittlerweile wurden im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik auch für den Primarbereich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der *Technischen Grundfertigkeiten* ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (vgl. Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ vom 29.10.2008 unter

http://www.iqb.hu-berlin.de/bista/dateien/Mathe_primar.pdf.

Im Gegensatz zu den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen ist diese Dimension allerdings dort nicht näher aufgeschlüsselt. Mit Bezug auf Winkelmann & Robitzsch (2009) lassen sich (analog zu den Standards für den Sekundarbereich) folgende Aspekte als technische Grundfertigkeiten subsumieren:

- Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen
- symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt
- mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen

Literatur

Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Beltz.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Schroedel.