Kompetenzen ermitteln

Mathematik
Didaktisches Material

2023

8

Version **B / C**

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

die vorliegende Veröffentlichung enthält die Aufgabenstellungen, Lösungen und didaktischen Kommentierungen der *KERMIT 8 Mathematik 2023*[1], die vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen der Humboldt-Universität zu Berlin (IQB) erstellt wurden. Die didaktischen Materialien sollen nicht nur ganz konkret über die Bildungsstandards Mathematik und einen entsprechenden kompetenzorientierten Unterricht informieren, sondern sie sollen vor allem Sie als Lehrkraft in Ihrem täglichen Bemühen um einen solchen Unterricht unterstützen. Aus diesem Grund werden in dieser Handreichung allgemeine Informationen zu getesteten Kompetenzbereichen gegeben. Anschließend werden eine Reihe von Aufgaben, die bei KERMIT 8 (2023) in den Testheften B und C eingesetzt wurden mitsamt ihren jeweiligen Lösungen und didaktischen Kommentierungen wiedergegeben.

Wir möchten Sie darauf hinweisen, dass die vorliegende Veröffentlichung keine Testergebnisse Hamburger Schülerinnen und Schüler enthält; die Rückmeldung der Testergebnisse Ihrer Schülerinnen und Schüler erhalten Sie über Ihre Schulleitung direkt vom Institut für Bildungsmonitoring und Qualitätsentwicklung. Sie können das didaktische Material für Ihre persönlichen (Unterrichts-)Zwecke in gewohnter Weise vervielfältigen und weitergeben.

Wir freuen uns über Ihre Kommentare und Anregungen zu der vorliegenden Veröffentlichung. Sie helfen uns damit, Ihre Erwartungen zukünftig noch besser erfüllen zu können.

Ihr KERMIT-Team am Institut für Bildungsmonitoring und Qualitätsentwicklung

Beltgens Garten 25

20537 Hamburg

Mail: kermit@ifbq.hamburg.de

[1] Die Bezeichnung für diese länderübergreifende Erhebung ist nicht überall gleich. In einigen Bundesländern werden sie als Vergleichsarbeiten (VERA) bezeichnet, in anderen werden sie Lernstandserhebungen genannt.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2003, 2004a, 2004b) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die Vergleichsarbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (KERMIT-8) im Fach Mathematik. Daher wird in dieser didaktischen Handreichung zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt (siehe Abschnitt 2, S. 3). Anschließend werden die beiden zur Wahl stehenden Schwerpunkte der diesjährigen Ergänzungsmodule näher erläutert: die Leitidee *Messen* mit Fokus auf der Kompetenz *Mathematisches Modellieren* (siehe Kapitel 3) sowie die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* mit Fokus auf das Thema *Graphen* (siehe Kapitel 4). Dabei wird in beiden Abschnitten ein besonderes Augenmerk auf zentrale Inhalte der Schwerpunktsetzungen gelegt. Es werden Herausforderungen geschildert und Beispiele vorgestellt, wie Lehrkräfte mit diesen in der Unterrichtspraxis umgehen können. Des Weiteren wird insbesondere bei Darstellungswechseln (zwischen Graphen und anderen Darstellungsformen) aufgezeigt, wie digitale Werkzeuge gewinnbringend in den Unterricht eingebunden werden können. In den dazugehörigen Kapiteln 6 und 7 werden außerdem Aufgaben aus KERMIT-8 vorgestellt, die jeweils einem der diesjährigen Schwerpunkte beider Leitideen zugeordnet werden können.

2. Bildungsstandards und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein. Eine grundlegende paradigmatische Wende stand bevor: Während zuvor der *Input* im Vordergrund stand, also Inhalte und Themen, sollte nun auch der *Output* stärkere Beachtung finden, also der Aufbau von Kompetenzen, Wissensstrukturen, Werten etc.. Inhalte sollten mit der Entwicklung von Persönlichkeitsmerkmalen verknüpft werden, die die Basis für ein lebenslanges Lernen legen und so persönliche Weiterentwicklung und gesellschaftliche Teilhabe ermöglichen (Klieme et al., 2003). Die OECD betont dabei den Anwendungscharakter von Mathematik:

> „Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit des Einzelnen, Mathematik in einer Vielzahl von Kontexten zu formulieren, anzuwenden und zu interpretieren. Sie umfasst mathematisches Argumentieren und die Verwendung mathematischer Konzepte, Verfahren, Fakten und Werkzeuge zur Beschreibung, Erklärung und Vorhersage von Phänomenen. Sie hilft dem Einzelnen, die Rolle zu erkennen, die die Mathematik in der Welt spielt, und begründete Urteile und Entscheidungen zu

treffen, die von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern benötigt werden.“ (OECD, 2013, S. 25, eigene Übersetzung)

Zu diesem Zweck benennen die Bildungsstandards Kompetenzen, die Schüler*innen bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe anhand zentraler Fachinhalte erworben haben sollen (KMK, 2004, 2005). Dabei wird davon ausgegangen, dass ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schüler*innen die folgenden drei *Grunderfahrungen* ermöglichen soll (Winter, 1995, S. 37):

(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Bildungsstandards umfassen in ihrem Wesen die benannten Grunderfahrungen sowie Inhalte, Kompetenzen und Niveaustufen, wie das folgende Kompetenzmodell für das Fach Mathematik darlegt. Das Kompetenzmodell liefert eine *Orientierung* für Lehrpersonen und Schulen zur Einhaltung verbindlicher Ziele sowie zur Weiterentwicklung von Schule und Unterricht (Klieme et al., 2003). Orientierung bedeutet insbesondere, dass im Vordergrund nicht die Umsetzung eines – aus der fachlichen Systematik entstehenden – „starren Gerüsts“ steht, sondern dass Schulen ein großer „Freiraum für die innerschulische Lernplanung“ (ebd., S. 9) gelassen wird. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe Abbildung 1):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Leitideen*
3. *Anforderungsbereiche*

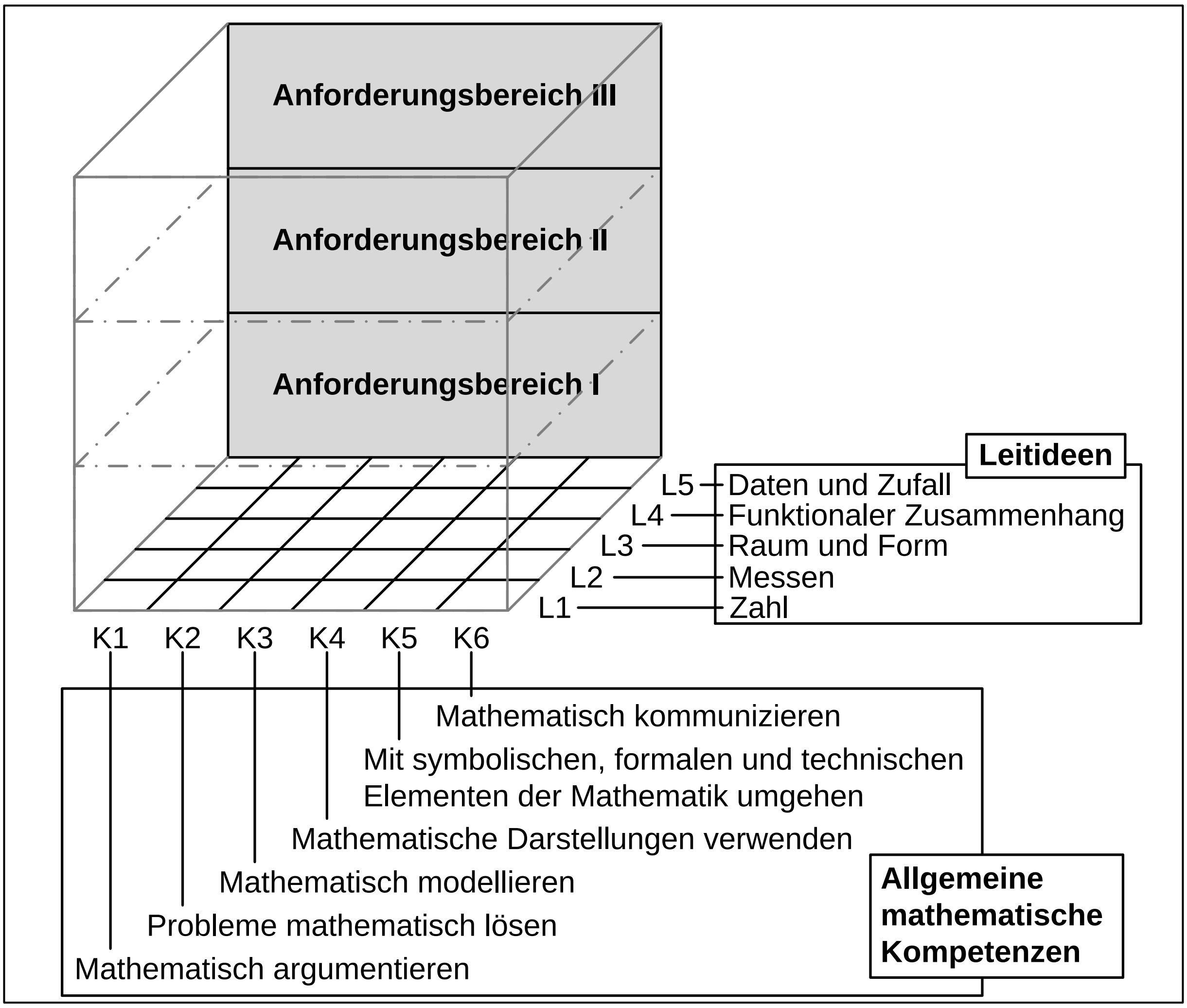


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells. Dabei wird vom Grundgedanken ausgegangen, „das Können der Schüler an den *Kompetenzen* festzumachen, die sie beim Bearbeiten von Aufgaben zu aktivieren haben“ (Leiss & Blum, 2010, S. 33). Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *mathematisch modellieren* (K3), *mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *mathematisch kommunizieren* (K6). Diese allgemeinen mathematischen Kompetenzen sollen differenziert betrachtet werden, auch wenn sie üblicherweise im Verbund erworben werden und häufig auch gemeinsam angewendet werden müssen. Insbesondere werden bei der Bearbeitung von komplexeren mathematischen Aufgaben oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt. Mit der getrennten Betrachtung ist die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen, was eine differenziertere Planung des Mathematikunterrichts ermöglicht. So kann ein mathematischer Inhalt den

Schüler*innen entlang verschiedener durchzuführender mathematischer Tätigkeiten zugänglich gemacht werden. Inhalte können durch die multiperspektivische und wiederholte Betrachtung eher in ihrer Gänze verstanden werden und mathematische Kompetenzen anhand unterschiedlichster Erscheinungen über den Inhalt hinaus erworben werden.

Jedoch reicht der Blick auf die allgemeinen mathematischen Kompetenzen für eine produktive Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht aus (Leiss & Blum, 2010, S. 35). Daher bilden die *Leitideen* die zweite Dimension des Modells. Die fünf Leitideen sind *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). Die fünf Leitideen ergeben sich vom Prinzip her, wenn Phänomene aus der Welt mit mathematischen Augen betrachtet werden (ebd., S. 20). In den Bildungsstandards wird dazu erläutert:

> „Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll." (KMK, 2004, S. 9).

Leitideen folgen keinem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“). Sie erlauben es, bestimmte mathematische Inhalte unter einer Kategorie zusammenzufassen. Leitideen können als fundamentale Ideen aufgefasst werden (vgl. Schwill, 1993), die im Mathematikunterricht auf jedem intellektuellen Niveau vermittelt werden können.

Die dritte und letzte Dimension enthält die drei *Anforderungsbereiche*. Sie beschreiben das Schwierigkeitsniveau von Aufgaben, denn das Bearbeiten und Lösen von Aufgaben fordert mathematische Kompetenzen in unterschiedlichen Ausmaßen (KMK, 2004). Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem *Anforderungsbereich I* werden Anforderungen an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum *Reproduzieren* unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum *Anforderungsbereich II* zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schüler*innen ermöglichen, *Zusammenhänge herzustellen* und Gelerntes anzuwenden. In den *Anforderungsbereich III* gehören diejenigen Anforderungen, die es Schüler*innen abverlangen zu *verallgemeinern und zu reflektieren* (ebd.).

Die drei Bestandteile des Kompetenzmodells stellen gleichwertige Dimensionen der Bildungsstandards dar. Im Folgenden werden exemplarisch ein Aspekt der Leitidee *Messen* sowie ein Aspekt der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* herausgegriffen und erläutert. Eine Orientierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinen mathematischen Kompetenzen – also der Prozessdimension des Kompetenzmodells – ist eine maßgebliche Errungenschaft der Bildungsstandards, die auch bei exemplarischer Betrachtung einzelner Leitideen nicht in den Hintergrund geraten sollte.

3. Die Leitidee *Messen*

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss werden unter der Leitidee *Messen* die folgenden inhaltsbezogenen Kompetenzen zusammengefasst (KMK, 2004)

*Die Schüler*innen*

- *nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-, Flächen- und Volumenmessung, auch in Naturwissenschaften und in anderen Bereichen,*
- *wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel),*
- *schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten,*
- *berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren,*
- *berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel sowie daraus zusammengesetzten Körpern,*
- *berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen, auch unter Nutzung von trigonometrischen Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen,*
- *nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.*

In den Bildungsstandards Mathematik für den Hauptschulabschluss (KMK, 2005) finden sich viele der genannten Aspekte wieder. Dabei werden jedoch einige Einschränkungen vorgenommen. Es entfallen Volumen- und Oberflächenbestimmung von Kegel und Kugel, sowie die Bestimmung von Streckenlängen und Winkelgrößen auch unter Nutzung der Trigonometrie. In beiden Varianten der Bildungsstandards wird im Bereich *Messen* der Umweltbezug besonders hervorgehoben, sei es bei der situationsangemessenen Auswahl von Einheiten, der Größenschätzung, dem Entnehmen von Maßangaben aus Quellenmaterial oder dem Bewerten von Ergebnissen im Kontext einer Sachsituation.

Dass gerade dieser Bezug zu realen Objekten in der Leitidee eine besondere Stellung einnimmt, liegt auch an der grundlegenden Definition des Messens. Im Allgemeinen geht es beim Messen darum, quantitative Aussagen über bestimmte

Eigenschaften eines Objektes zu treffen. Demnach wird die Welt der uns umgebenden Phänomene – der Gegenstände, Vorgänge und Zustände – durch das Messen in die strukturierte Welt der Zahlen übertragbar (Vohns, 2012). Um eine solche Eigenschaft genauer zu erfassen – etwa um verschiedene reale Objekte hinsichtlich dieser Eigenschaft zu vergleichen – macht man sich mathematische Größen (Länge, Masse, Zeit, Geldbetrag, Fläche, usw.) zunutze (Greefrath, 2010). *Messen* zu erlernen meint also stets auch das Kennen- und Anwenden-Lernen unterschiedlicher Größen. Dabei sind Größen nicht als natürliche Eigenschaft eines Objektes zu verstehen, sondern vielmehr als die Möglichkeit, den Objekten der Wirklichkeit in verschiedener Weise, z. B. hinsichtlich ihres Volumens oder ihrer Masse, einen abstrakten Wert der Mathematik zuzuordnen, der sich ähnlich wie eine Zahl verhält (Barzel & Leuders, 2014). Messgrößen sind dabei im Allgemeinen aus einer Maßzahl und einer standardisierten Maßeinheit wie etwa Meter, Liter oder Quadratmeter zusammengesetzt.

Eine grundsätzliche Vorgehensweise für die zahlenmäßige Erfassung einer Eigenschaft eines Objektes ist es, sich ein passendes Vergleichsobjekt mit bekannter Maßeinheit zu wählen und mit dem Objekt zu vergleichen. Dieses Prinzip des Messens greift auf die Grundvorstellung des „Passen in" zurück (Barzel & Leuders, 2014). Wenn beispielsweise die Maße einer Schreibtischplatte ermittelt werden sollen, kann man sich fragen, wie oft ein Vergleichsobjekt bekannter Größe (etwa ein DIN A4-Blatt) in die Länge bzw. Breite des Schreibtisches passt. Messen kann demnach als Auslegen einer Maßeinheit verstanden werden.

Daher spielt beim *Messen* oft auch das Schätzen von Größenangaben eine wichtige Rolle, insbesondere zur Überprüfung der Plausibilität gefundener Resultate – oder bei so genannten *unterbestimmten Aufgaben*, bei denen gewisse Angaben nicht dem Aufgabentext zu entnehmen sind. Um im Laufe der Schulzeit geeignete Vorstellungen zu Messgrößen zu entwickeln, ist der Aufbau von Stützpunktvorstellungen von großer Bedeutung. Mögliche Repräsentanten bezüglich des Stützpunktwissens zur Größe Volumen sind beispielsweise das Fassungsvermögen einer Badewanne (ca. $140\ l$) oder eines üblichen Putzeimers (ca. $10\ l$). Für eine Vorstellung von Flächeninhalten kann beispielsweise das Wissen über die Größe einer Seitentafel ($1\ m^2$) oder eines Fußballfeldes (ca. $105\ m \cdot 68\ m \approx 7000\ m^2$) dienen.

3.1. Schwerpunktthema: *Modellieren*

Insbesondere bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben sind das Schätzen sowie der Rückgriff auf verfügbares Stützpunktwissen in verschiedenen Teilprozessen unerlässlich. *Modellieren* meint das Erfassen von Phänomenen der realen Welt mithilfe der Mathematik und ist Teil der sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K1 – K6) der Bildungs-standards für das Fach Mathematik. Modellierungsaufgaben zeichnen sich nicht nur durch ihren zwingend vorhandenen Realitätsbezug aus, sondern auch durch eine Vielzahl von Teilschritten, die zu ihrer Lösung ausgeführt werden müssen (Kaiser et al., 2015). Eine schematische Darstellung eines Modellierungsprozesses stellt der vierschrittige Kreislauf nach Maaß (2004) in Abbildung 2 dar.

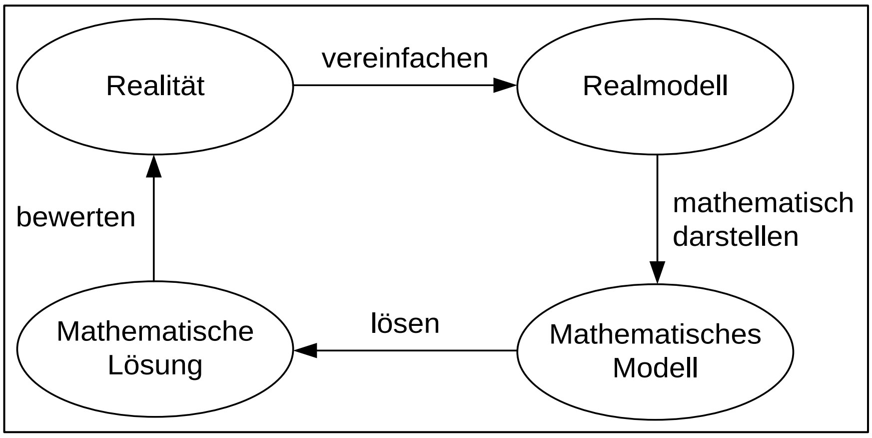


Abbildung 2: ***Modellierungskreislauf nach Maaß (2004)***

Der Kreislauf beginnt oben links damit, dass Schüler*innen zunächst die gegebene realweltliche Situation verstehen und erkennen, worin das zu lösende Problem genau besteht. Da die Situation in der Realität in der Regel zu komplex ist, um sie vollständig bei der Lösung zu berücksichtigen, muss sie in einem ersten Schritt vereinfacht werden (Kaiser et al., 2015). Dazu ist es nicht nur erforderlich, Texte zu erfassen, sondern auch Kreativität und Allgemeinwissen sind gefordert, um zu entscheiden, welche Annahmen und Vernachlässigungen sinnvoll sind. Durch diesen ersten Schritt entsteht eine vereinfachte Abbildung der Realsituation, das so genannte Realmodell. Dieses Realmodell kann im zweiten Schritt mathematisiert, d. h. in die Sprache der Mathematik übersetzt werden. Übersetzen meint in diesem Fall das Darstellen notwendiger Elemente der Realsituation durch mathematische Objekte. Diese Objekte können je nach Problemverständnis ganz unterschiedlicher Art sein, etwa Formeln, Terme, Gleichungen oder auch geometrische Figuren. Mithilfe der gewählten Objekte kann dann unter Rückgriff auf formale mathematische Operationen gearbeitet und die Aufgabe gelöst werden. „Gelöst" meint aber nicht zwingend, dass die Bearbeitung der Modellierungsaufgabe mit dem Finden eines mathematischen Ergebnisses oder dem Notieren eines Antwortsatzes beendet ist. Elementarer Bestandteil der Kompetenz des *Modellierens* ist das kritische Hinterfragen eines gefundenen Ergebnisses – zumal es bei Modellierungsaufgaben bisweilen nicht nur ein richtiges Ergebnis gibt, da es von den zuvor getroffenen Entscheidungen abhängen kann. Die Reflexion kann sich auf unterschiedliche Aspekte beziehen. So müssen Schüler*innen darauf achten, dass sie eine geeignete Einheit verwendet haben, Plausibilitätsüberlegungen durch Überschlagsrechnungen oder Vergleiche mit bekannten Größen anstellen, oder aber die gewählten mathematischen Objekte überdenken. Dies kann auch zum Verwerfen der bisherigen Lösung und zu einem erneuten Durchlauf des Kreislaufs führen, wenn die Lernenden feststellen, dass ein Ergebnis nicht exakt genug ist, oder ein Modell zu grob oder gar falsch gewesen ist. Ziel der Modellierung ist es, eine adäquate Antwort auf die Fragestellung innerhalb des realen Kontextes zu finden. Dabei geht es nicht ausschließlich darum, überhaupt eine Antwort zu finden, sondern darum, die Modellierung so oft zu verbessern, bis das Ergebnis im realen Kontext plausibel und angemessen genau erscheint (Blum, 2007).

3.2. Modellieren im Bereich Messen

Es gibt viele Modellierungsaufgaben, die insbesondere Wissen über Inhalte aus dem Bereich *Messen* erfordern. Dies soll anhand einer Modellierungsaufgabe mit aktuellem Bezug veranschaulicht werden: Vor einiger Zeit brannte die Kathedrale Notre-Dame in Paris. Seitdem wurden einige Vorschläge gemacht, wie die Kirche wiederaufgebaut werden könnte.

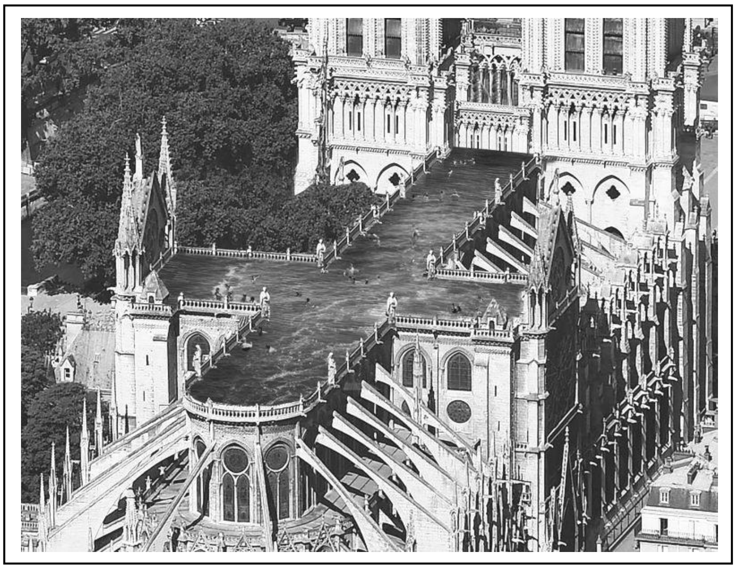


Abbildung 3: ***Modellierungsproblem Notre-Dame***

Ein besonders innovativer Vorschlag stammt von dem schwedischen Architekturbüro UMA. Dieses schlug vor, das Dach der Kathedrale durch einen Swimming-Pool zu ersetzen[2]. Abbildung 3 zeigt eine entsprechende Fotomontage des Architekturbüros. Aus diesem Bild können sich interessante Fragestellungen ergeben, etwa „Wie groß ist dieser Pool?“, oder auch (etwas schwieriger) „Wie viel Wasser fasst der Pool?“. Solche Fragestellungen können von der Lehrperson vorgegeben oder von der Lerngruppe entwickelt werden.

[2] Vgl. die Meldung der FAZ vom 14.06.2019 „Ein Schwimmbad auf dem Dach – Wiederaufbau der Notre-Dame“ (https://www.faz.net/aktuell/gesellschaft/ungluecke/ausgefallene-ideen-fuer-den-wiederaufbau-der-notre-dame-16235199.html)

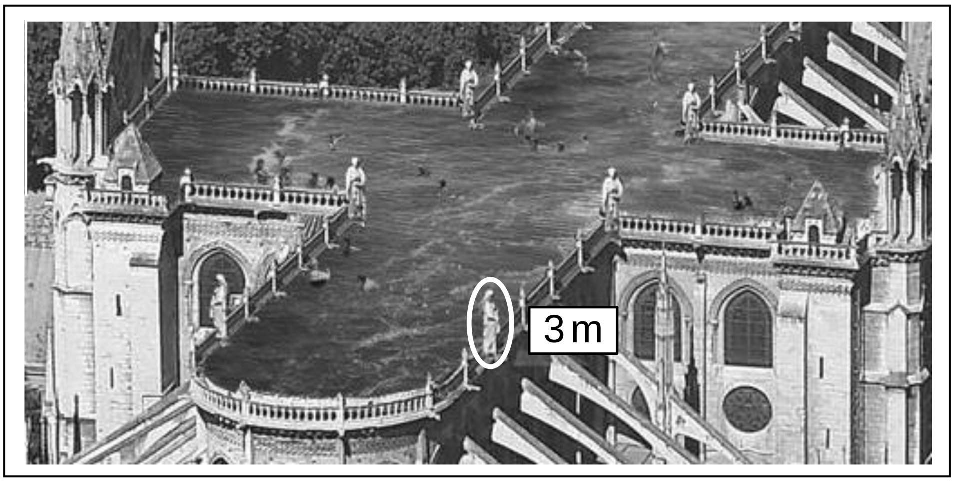


Abbildung 4: Modellierungsproblem Notre-Dame – Referenzgröße Statue

Mit Blick auf die Fläche des Pools soll nun also durch eine Modellrechnung ein Flächenmaß bestimmt werden. Dazu ist es zunächst nötig, bestimmte Annahmen zu treffen. In diesem Fall ist insbesondere die Entnahme bzw. das Schätzen von Größen zentral. Als Referenzgröße zum Abschätzen der Längen des Poolrandes können beispielsweise die Statuen am Rand genutzt werden. Diese sind etwa drei Meter groß (siehe Abbildung 4). Diese Information kann man entweder wissen, im Internet recherchieren oder durch Vergleich mit den im Pool befindlichen Personen ableiten. Da es nur um eine Abschätzung geht, sind die zentimetergenauen Maße nicht notwendig. Die Höhe der Statuen kann dann genutzt werden, um die Seitenlängen des Pools abzuschätzen. Nutzt man das mathematische Modell aus Abbildung 5, so lässt sich die Figur in drei Rechtecke, zwei davon gleich groß, sowie einen Halbkreis zerlegen.

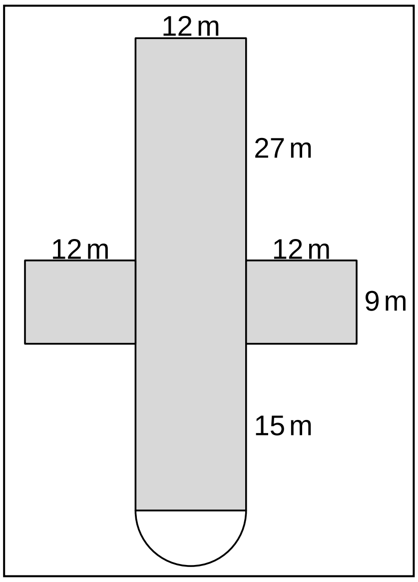


Abbildung 5: Modellierungsproblem Notre-Dame – Mathematisches Modell

Für die Gesamtfläche ergibt sich die folgende Gleichung:

$$12\,m \cdot 27\,m + 2 \cdot 12\,m \cdot 9\,m + 0{,}5 \cdot (6\,m)^2 \cdot \pi \approx 596{,}55\,m^2$$

Die Poolfläche würde also ca. $600\ m^2$ betragen. Es stellt sich die Frage, ob dieses Ergebnis plausibel erscheint. Insgesamt verfügt die Notre-Dame über eine Grundfläche von $4800\ m^2$. Die gesuchte Fläche entspricht also in etwa einem Achtel der Bodenfläche, dies erscheint auf den ersten Blick recht passend. Ein $50\,m$ langes und $25\,m$ breites Schwimmbecken, wie es beispielsweise bei olympischen Spielen benutzt wird, hat einen Flächeninhalt von $1250\ m^2$ und wäre also ungefähr doppelt so groß. Vergleicht man die gesuchte Fläche grafisch mit der Fläche eines Schwimmbeckens (siehe Abbildung 6), erscheint dieses Ergebnis plausibel.

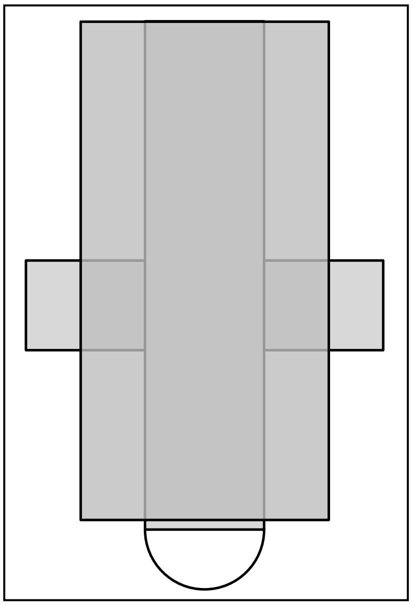


Abbildung 6: Modellierungsproblem Notre-Dame – Plausibilitätsprüfung

Diese Aufgabe stellt einige Anforderungen an die Schüler*innen und ist insbesondere durch die fehlenden Maßangaben sehr offen. In Bezug auf ihre Offenheit lässt sich diese Aufgabe durchaus mit Fermi-Aufgaben vergleichen. Sie eignet sich für den unterrichtlichen Einsatz, da mit ihr verdeutlicht werden kann, wie sich mathematische Größen aus realen Gegebenheiten ableiten lassen. Sie birgt aber aufgrund ihrer deutlichen Offenheit Schwierigkeiten für standardisierte Erhebungen wie etwa KERMIT-8, insbesondere in Bezug auf die Eingrenzung eines realistischen Lösungsintervalls, um eine verlässliche Kodierung sicherzustellen. Wie zur Kompetenzmessung im Bereich *Modellieren* geeignete Aufgaben aussehen können, illustriert der folgende Abschnitt.

3.3. Modellieren im Bereich Messen in den KERMIT-8 Erhebungen

Die oben erläuterten Fähigkeiten im Bereich des *Modellierens* innerhalb der Leitidee *Messen* werden auch in den KERMIT-8 Erhebungen geprüft. Dies wird im Folgenden anhand der beiden Aufgaben „Rollrasen“ und „Krawatte“ erläutert.

Die Aufgabe „Rollrasen“ (siehe Beispielaufgabe 1), die dem *Anforderungsbereich II* zuzuordnen ist, thematisiert die Modellierung einer mit Rollrasen zu versehenden Fläche:

Herr Klie hat eine Gartenbaufirma und gestaltet einen Teil seines Firmengeländes in eine Rasenfläche um. Diese neue Rasenfläche ist 11 m lang und 10,5 m breit.

Aus Zeitgründen verwendet Herr Klie Rollrasen (siehe Fotos 1 und 2). Als Rollrasen bezeichnet man fertigen Rasen, der in rechteckige Stücke geschnitten und dann zum Transport aufgerollt wird.

Foto 1

Foto 2

Ein Streifen Rollrasen ist 0,6 m breit, 0,03 m dick und 2 m lang.

Ermittle, wie viele Streifen Herr Klie benötigt, um die gesamte Rasenfläche mit Rollrasen auszulegen. Reststücke eines Streifens werden weiterverarbeitet.

Beispielaufgabe 1: ***„Rollrasen"***

Bei dieser Aufgabe spielen Flächenberechnungen in einem realen Kontext eine Rolle. Es sind Eigenschaften realer Objekte (hier: des Rollrasens und der Gesamtfläche) in Form der Größe *Länge* angegeben. Damit unterscheidet sich diese Aufgabe in Bezug auf ihre Offenheit von der obigen Notre-Dame-Aufgabe. Dies hat den Vorteil, dass ein weniger breites Lösungsintervall bestimmt werden kann und so die Aufgabe leichter zu bewerten ist. Anhand der gegebenen Maße müssen ein Maß für den Flächeninhalt eines Streifens sowie die Anzahl der benötigten Streifen bestimmt werden. Daraus resultiert die Zuordnung zur Leitidee *Messen*. Zunächst müssen dem Aufgabentext die wichtigen Informationen entnommen werden (*Mathematisch Kommunizieren* K6). Es muss weiterhin ein Weg gefunden werden, wie die Anzahl der Streifen mathematisch ermittelt werden kann (*Probleme mathematisch lösen* K2, *Mathematisch Modellieren* K3). Beispielsweise kann die Größe der auszulegenden Fläche berechnet und durch die Größe eines Rollrasenstreifens dividiert werden, da auch mögliche Reststücke weiterverarbeitet werden können. Eine weitere Teilaufgabe der Rollrasen-Aufgabe lautet wie folgt:

Herr Klie transportiert mehrere Streifen Rollrasen in einer Schubkarre (siehe Foto 3).

Ermittle das Gewicht der sieben Rollen Rollrasen, die er pro Fuhre transportieren kann. Ein m^3 Rollrasen wiegt circa 900 kg.

__________ kg

Foto 3

Beispielaufgabe 2: *„Rollrasen"*

In dieser Teilaufgabe können die einzelnen Streifen als Quader mit den Maßen $0{,}6\ m$, $2\ m$ und $0{,}03\ m$ aufgefasst werden (*Mathematisch Modellieren* K3). Von diesen berechnet man jeweils das Volumen und das Gewicht. Anschließend wird das Ergebnis versiebenfacht. Beide Teilaufgaben gehören aufgrund der Anforderungen an das *Modellieren* und *Problemlösen* zu *Anforderungsbereich II*.

Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe können dann auftreten, wenn ein Rollrasenstreifen nicht als Quader modelliert, sondern als Rechteckfläche aufgefasst wird. Es würde somit der berechnete Flächeninhalt weiterverwendet werden, um das Gewicht eines Rollrasenstreifens zu bestimmen. Somit überprüft diese Aufgabe auch, ob Schüler*innen Vorstellungen zu verschiedenen Größen verknüpfen können. Sollten auf Seiten der Lernenden in diesem Fall Probleme auftreten, so könnte dies einer starken Orientierung am Kalkül geschuldet sein. Zur Bestimmung von Raum- und Flächeninhalten könnte verstärkt auf Anwendungsbeispiele aus der Realität gesetzt werden, um Vorstellungen von Größen mit realweltlichen Beispielen zu verbinden.

Bei der Aufgabe „Krawatte“ (siehe Beispielaufgabe 3) handelt es sich um eine Schätzaufgabe, zu deren Lösung die Höhe der Skulptur mithilfe geeigneter Annahmen geschätzt werden muss. Eine Möglichkeit besteht darin, die Körpergröße des Menschen (im rechten Bild) zu schätzen und anschließend auf die Länge der Riesenkrawatte zu übertragen. Anhand des linken Bildes ist zu erkennen, dass der Mann etwa drei- bis fünfmal so lang wie die Krawatte ist, die er trägt. Über dieses Verhältnis lässt sich dann die Körpergröße des ‚Riesenmenschen' ermitteln. Bei dieser Aufgabe müssen die Schüler*innen angemessen schätzen (*Mathematisch Modellieren* K3*)* und mit Verhältnissen und Faktoren korrekt umgehen (*Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* K5).

Viele Bankangestellte tragen eine Krawatte (siehe Abbildung 1).

Abbildung 1

Abbildung 2

Abbildung 2 zeigt ein Kunstwerk im Bankenviertel von Frankfurt am Main. Es stellt eine Krawatte dar. Die Krawatte sieht aus, als ließe der Wind sie nach oben flattern.

Wie groß wäre ein Mann ungefähr, der diese Riesenkrawatte trägt?

ungefähr .... m

Notiere deine Annahmen und deinen Lösungsweg.

Beispielaufgabe 3: *„Krawatte"*

Das Lösungsintervall ist relativ breit gewählt, damit im Erwartungshorizont verschiedene Schätzungen einbezogen werden können. So werden Körpergrößen zwischen $30\,m$ und $70\,m$ als richtig kodiert. Dabei muss der Lösungsweg zusätzlich eine angemessene Modellierung erkennen lassen, bei der mithilfe einer Vergleichsgröße und eines entsprechenden Faktors ein (impliziter) Bezug zur Länge der Skulptur hergestellt wird. Wünschenswert – im Sinne einer adäquateren Modellierung – wäre zudem, wenn in der Lösung der Knick in der Krawatte mitberücksichtigt würde. In der Testsituation ist dies jedoch nicht notwendig, da aus diagnostischer Sicht Schüler*innen die benötigten Kompetenzen auch bei Vernachlässigung des Knicks nachgewiesen haben.

4. Leitidee Messen: Schwerpunktthema Modellieren

4.1. Einheiten von Größen situationsgerecht auswählen

Testheft B - Aufgabe 20: Honigbiene

20. Wie lang ist diese Biene ungefähr?

A	☐	1,5 mm
B	☐	1,5 cm
C	☐	1,5 dm
D	☐	1,5 m

Auswertung

RICHTIG	☐ 1,5 mm	☒ 1,5 cm	☐ 1,5 dm	☐ 1,5 m

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1a

Aufgabenbezogener Kommentar

Leitidee

Die Aufgabe „Honigbiene“ wird der Leitidee *Messen* (L2) zugeordnet, da zur Bestimmung der Länge der Biene aus den vorgegebenen Antworten die angemessene Einheit gewählt werden muss.

Kompetenzen

Die Überlegung, welche Größeneinheit für die Länge einer Biene realistisch scheint und die Auswahl aus unterschiedlichen Resultaten entsprechen der Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3).

Anforderungs-bereich

Die Aufgabe liegt damit im *Anforderungsbereich I*.

Anregungen für den Unterricht

Aufgabenvariation

Die Aufgabe „Honigbiene“ zielt darauf ab, die passende Einheit einer Größe situationsgerecht auszuwählen. Charakteristisch für offene Modellierungsaufgaben wie zum Beispiel Fermi-Aufgaben ist, dass benötigte Angaben fehlen und diese durch Schätzen ermittelt werden (Greefrath, 2018; Kaiser & Stender, 2015). Dabei ist es auch möglich, dass Einheiten situationsgerecht ausgewählt werden müssen. Um bei Schüler*innen nicht nur ein Gefühl für verschiedene Größeneinheiten zu schulen, sondern ebenfalls ihre

Fähigkeiten im Schätzen und den Bezug zu geeigneten Repräsentanten beim Schätzen von Größen zu üben, kann die Aufgabe „Honigbiene“ im Unterricht variiert werden. So kann die Aufgabe dahingehend verändert werden, dass keine Antwortmöglichkeiten vorgegeben sind, sondern die Schüler*innen allein anhand des Fotos die Länge der Biene abschätzen sollen. Da die Biene auf dem Foto auf einer Hand sitzt, kann die Größe einer Hand, eines Daumennagels oder eines Fingers als Vergleichsgröße genutzt werden, um die Länge der Biene abzuschätzen. Somit würde die Fähigkeit im Schätzen von Größen mithilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten gefördert werden, welche auch für die Bearbeitung umfangreicherer mathematischer Modellierungsaufgaben von Bedeutung sind.

Ein Beispiel für eine solche offene Modellierungsaufgabe ist die Aufgabe „Litfaß-Säule“ (siehe Abbildung 1). Bei dieser Aufgabe soll die Frage beantwortet werden, wie viele Briefmarken benötigt werden, um eine Litfaßsäule komplett zu bekleben. Dafür müssen Schüler*innen zunächst verschiedene Annahmen und Abschätzungen treffen. So sollte erst einmal überlegt werden, welche Maße einer Litfaßsäule geschätzt werden müssen, um damit die zu beklebende Fläche berechnen zu können. Zudem muss überlegt werden, welche Maße eine Briefmarke hat und eine Einheit zum weiteren Rechnen situationsgerecht ausgewählt werden.

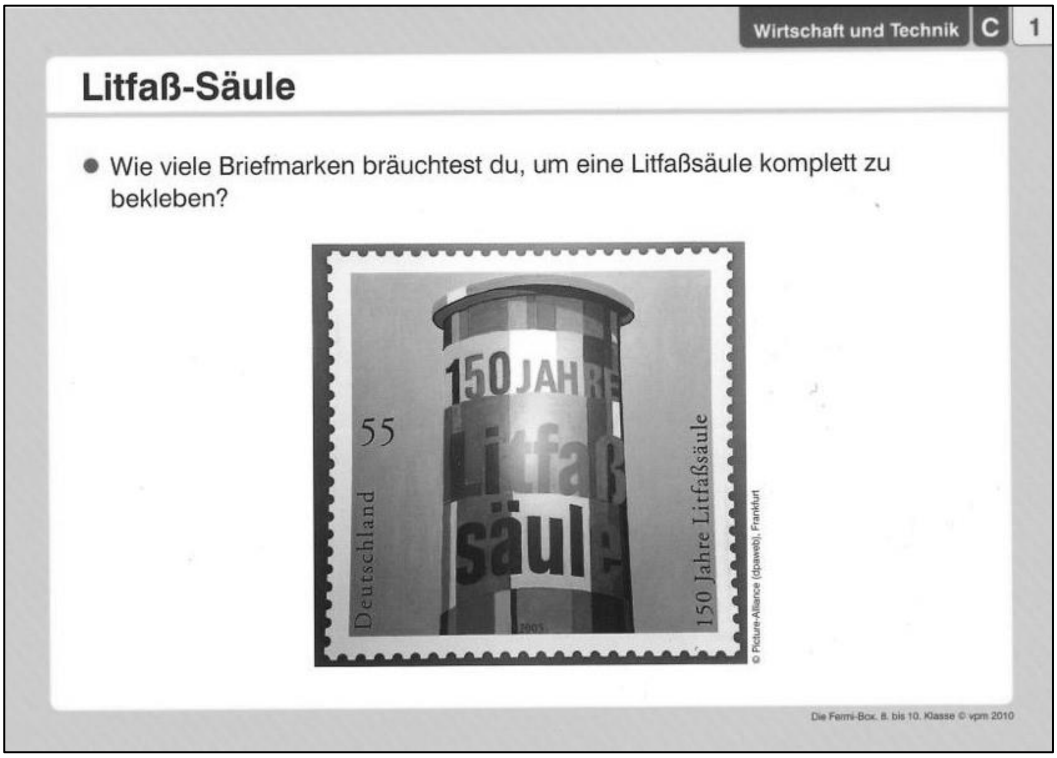


Abbildung 8: Fermi-Aufgabe „Litfaß-Säule“

4.2. Größen mithilfe von Repräsentanten schätzen

Testheft C - Aufgabe 16: Riesenfuß

In der Detmolder Innenstadt steht ein Modell des Fußes einer Statue in Originalgröße.

Schätze die ungefähre Länge des Fußes.

Der Fuß der Statue ist ungefähr

______________ m lang.

Notiere deine Annahmen und deinen Lösungsweg.

Auswertung

RICHTIG	Zahl aus dem Intervall [1,80; 2,6] UND Lösungsweg, der eine Modellierung und ihre Mathematisierung erkennen lässt. Darin muss mindestens eine Größe (z. B. Körpergröße eines Menschen) erkennbar sein, mit der ein Bezug zur Länge des Fußes der Statue hergestellt wird. Beispiel(e) Der Mann ist 1,90 m groß. Der Fuß ist etwas länger als der Mann groß ist, daher gehe ich von ca. 2 m = 200 cm aus.

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mathematisch kommunizieren (K6)

Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Riesenfuß“ wird der Leitidee *Messen* (L2) zugeordnet, da die Länge des Fußes der Statue mithilfe von Vorstellungen über Repräsentanten (beispielsweise der Körpergröße der Menschen auf dem Foto) geschätzt werden soll. Leitidee

Zur Lösung der Aufgabe kann zum Beispiel die Körpergröße eines Menschen als Bezugsobjekt hinzugezogen werden, um die Länge des Fußes der Statue zu schätzen. Das Treffen eigener Annahmen ist der Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) zuzuordnen. Kompetenzen

Zudem sollen der Lösungsweg sowie die Annahmen notiert werden. Das verständliche Darstellen der eigenen Überlegungen gehört zur Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6).

Da eine mehrschrittige Modellierung erforderlich ist, Lösungswege beschrieben und verständlich dargestellt werden, ist die Aufgabe dem *Anforderungsbereich II* zuzuordnen. Anforderungsbereich

Testheft C - Aufgabe 20: Bühnenbild

Die Abbildung zeigt einen Arbeiter beim Aufbau des Bühnenbildes für ein Festspiel. In diesem Bühnenbild ist die riesige Hand einer Frau dargestellt.

Der Arbeiter soll den Daumennagel an der riesigen Hand der Frau frisch lackieren. Auf dem Behälter mit dem Lack ist angegeben, dass man 90 ml Lack pro Quadratmeter benötigt.

Schätze, wie viel Lack der Arbeiter demnach benötigt, um den Nagel zu lackieren.

__________________ ml

Notiere deine Annahmen und gib deinen Lösungsweg an.

Auswertung

RICHTIG	Wert aus dem Intervall [60; 350] UND Lösungsweg, der die Maße des Fingernagels über die Größe eines Menschen ermittelt. Beispiel(e) • Der Arbeiter ist ungefähr 1,80 m groß. Der Daumennagel hat also einen Flächeninhalt von etwa $1{,}2\,\text{m} \cdot 0{,}8\,\text{m} = 0{,}96\,\text{m}^2$. Das ist ungefähr 1m^2, daher werden etwa 90 ml Lack benötigt. Der Fingernagel ist ungefähr so groß wie zwei Menschen. $1{,}8\,\text{m} \cdot 1\text{m} = 1{,}8\,\text{m}^2$. Es werden $1{,}8 \cdot 90 = 162\,\text{ml}$ Lack benötigt.

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	III
Kompetenzstufe	5

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Bühnenbild“ erfordert das Schätzen von Größen (der Größe des Bühnenbilds beziehungsweise der Maße des Daumennagels) mithilfe geeigneter Repräsentanten (der Körpergröße eines Menschen) sowie die Berechnung eines Flächeninhalts (des Daumennagels). Dementsprechend ist die Aufgabe „Bühnenbild“ der Leitidee *Messen* (L2) zuzuordnen. Leitidee

Indem die Maße des Fingernagels über die Größe eines Menschen ermittelt werden und somit die Menge des benötigten Lacks bestimmt wird, wird zwischen Realität und Mathematik hin- und zurückübersetzt. Damit wird die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) abgebildet. Kompetenzen

Die getroffenen Annahmen werden notiert und der Lösungsweg verständlich dargestellt, wodurch die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) erforderlich ist. Anforderungsbereich

Da es sich hierbei um eine komplexe und unvertraute Situation für Schüler*innen handelt, wird diese Aufgabe dem *Anforderungsbereich III* zugeordnet.

Testheft B - Aufgabe 25: Daumen

Elli sieht in Koblenz das Kunstwerk „Der Daumen“ und vergleicht das Kunstwerk mit ihrem eigenen Daumen.

Wievielmal länger als Ellis Daumen ist das Kunstwerk ungefähr?

ungefähr ______________ -mal

Notiere deine Annahmen und deinen Lösungsweg.

Auswertung

RICHTIG	Zahl aus dem Intervall [30; 80] UND Lösungsweg, aus dem (implizit) die geschätzte (oder im Bild gemessene) Daumenlänge eines Menschen und die Höhe der Figur hervorgehen. Beispiel(e) • Daumen (5 cm), Kunstwerk (2 m), 40-mal so hoch • 220 cm : 4 cm = 55

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	III
Kompetenzstufe	4

Aufgabenbezogener Kommentar

Aufgrund der Bestimmung der Daumenlänge eines Menschen und der Größe der abgebildeten Figur durch Schätzen oder Messen wird die Aufgabe der Leitidee *Messen* (L2) zugeordnet. Leitidee

Um zu berechnen, wievielmal länger als der Daumen eines Menschen das Kunstwerk ungefähr ist, wird mit Termen gearbeitet. Dementsprechend wird die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) abgebildet. Die Aufgabe „Daumen" erfordert die Modellierung einer komplexen Situation, da keine Größenangaben vorhanden sind und zur Schätzung der Daumenlänge auf Repräsentanten zurückgegriffen werden muss. Somit ist die Aufgabe der Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) zuzuordnen. Kompetenzen

Wegen der Modellierung einer komplexen Situation befindet sich diese Aufgabe im *Anforderungsbereich III*. Anforderungsbereich

Testheft C - Aufgabe 5: Messen

Auf dem Foto siehst du sehr viele Schokolinsen.

Schätze, wie viele Schokolinsen auf diesem Foto abgebildet sind. Du kannst dafür eine der abgebildeten Figuren verwenden.

Das Foto zeigt etwa ____________________ Schokolinsen.

Beschreibe dein Vorgehen.

Auswertung

RICHTIG	Zahl aus dem Intervall [200; 800] UND Eine Beschreibung, in der auf einen geeigneten Repräsentanten verwiesen wird und aus der die Anwendung des Repräsentanten auf das gesamte Bild hervorgeht.

	Beispiel(e) • Im eingezeichneten Quadrat sind ca. 30 Schokolinsen. Das Quadrat passt ca. 12-mal in das Foto. Also sind es insgesamt 360 Schokolinsen. • Auf dem Foto sind in der Breite ca. 30 Schokolinsen zu sehen und in der Höhe ca. 20. Also sind es insgesamt ca. 600 Schokolinsen. • Ich habe geschätzt, wie viele Schokolinsen in eine Form passen und dann geschaut, wie oft die Form in das Bild passt. [Anm.: Die Annahmen, dass die Schokolinsen gleichverteilt und nur in der Fläche verteilt sind, müssen nicht explizit erwähnt werden.]
FALSCH	Alle anderen Antworten Beispiel(e) • Im Rechteck sind 32 Schokolinsen. [Anm.: Die Anwendung des Repräsentanten auf das gesamte Bild ist nicht ersichtlich.]

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	4

Aufgabenbezogener Kommentar

Leitidee

Die Aufgabe gehört zur Leitidee *Messen* (L2), da mithilfe von Vorstellungen über Repräsentanten (den abgebildeten Figuren) eine Größe (die Anzahl der Schokolinsen auf dem Foto) geschätzt werden muss.

Kompetenzen

Zur Lösung der Aufgabe muss eine Modellierung vorgenommen werden, indem das Bild mithilfe einer geometrischen Figur zerlegt und ein Teilbereich des Bildes ausgezählt wird, sodass die gegebene Situation vereinfacht wird und die Anzahl der Schokolinsen abgeschätzt werden kann. Dabei wird zwischen realer Situation und Mathematik übersetzt. Demnach wird mit der Aufgabe „Schokolinsen“ die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) angesprochen.

Zur Bestimmung der Anzahl der Schokolinsen werden mit den abgebildeten geometrischen Figuren Operationen ausgeführt. Dabei wird zum Beispiel die Anzahl, wie oft eine der Figuren in das Bild passt, bestimmt und diese Anzahl mit der Anzahl der Schokolinsen in der Figur multipliziert. Somit erfordert die Aufgabe „Schokolinsen“ die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5).

Da das eigene Vorgehen bei der Lösung der Aufgabe beschrieben werden soll, ist es erforderlich, eigene Überlegungen verständlich darzustellen, sodass der Aufgabe „Schokolinsen“ die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) zugeordnet wird.

Anregungen für den Unterricht

Gemeinsame Merkmale der Aufgaben

Die Aufgaben „Riesenfuß“, „Bühnenbild“, „Daumen“ und „Schokolinsen“ zielen jeweils auf das Schätzen von Größen ab. Dabei wird ein Vergleichsobjekt, um die Größe verschiedener Objekte abzuschätzen, zu Hilfe genommen. So kann die Länge des Riesenfußes etwa über die Größe eines Menschen oder die Anzahl an Schokolinsen auf dem Foto durch Zuhilfenahme einer geometrischen Figur abgeschätzt werden.

Stützpunktwissen

Durch das Schätzen von Größen werden grundlegende Eigenschaften von Messungen geübt (Hildreth, 1983). Eine Möglichkeit, um Größen korrekt abzuschätzen, ist der Rückgriff auf Stützpunktwissen. Dieses beinhaltet mental verfügbare Repräsentanten für verschiedene Größen, welche beim Schätzen von Größen zum Vergleich herangezogen werden können (Franke & Ruwisch, 2010). Um Stützpunktvorstellungen aufzubauen, sollten im Unterricht regelmäßige Gelegenheiten zum Schätzen von Größen geboten werden.

Das Schätzen von Größen kann beispielsweise durch Erkundungen auf dem Schulhof oder im Klassenraum mit realen Objekten geübt werden (Wie hoch ist die Tür? Wie groß ist die Spannweite meiner Arme? Wie groß ist ein Baum?). Die Erkundungen sollten in verschiedene Aufgaben und in unterschiedliche Themengebiete eingebettet sein. Dabei kann es motivierender sein, Objekte in der Realität statt Fotos zu nutzen. Eine Möglichkeit für Erkundungen mit realen Objekten ist das Erstellen eines mathematischen Wanderpfads. Die App „MathCityMap“ ermöglicht das Anlegen solcher mathematischer Wanderpfade, bei welchen auf einer Karte Objekte ausgewählt und mit einer mathematischen Fragestellung verbunden werden. Der Wanderpfad kann dann von Schüler*innen abgelaufen und die zuvor eingefügten Aufgaben können bearbeitet werden. Unter dem folgenden Link kann das Webportal der „MathCityMap“ eingesehen werden: https://mathcitymap.eu/de/.

Weitere Möglichkeiten bestehen darin, Aufgaben aus Schulbüchern zu öffnen, indem die Werte einer Aufgabe eben durch eine vom Lernenden anzustellende Abschätzung ersetzt werden, ein Foto anstelle einer Skizze mit Maßangaben verwendet wird oder im Anschluss an eine Anwendungsaufgabe dazu aufgefordert wird, Ergebnisse an der Realität zu prüfen. Das Erstellen von Tabellen mit Vergleichsgrößen kann bei der Behandlung von Abschätzungen hilfreich sein. Ein Plakat im Klassenraum, auf dem Einheiten und entsprechende Vergleichsgrößen (Stützpunktwissen) festgehalten werden, kann die Ergebnisse solcher Erkundungen überzeitlich sichern und in diversen Unterrichtssituationen spontan herangezogen werden. Ein Beispiel einer Übersicht über Vergleichsgrößen zeigt Abbildung 2.

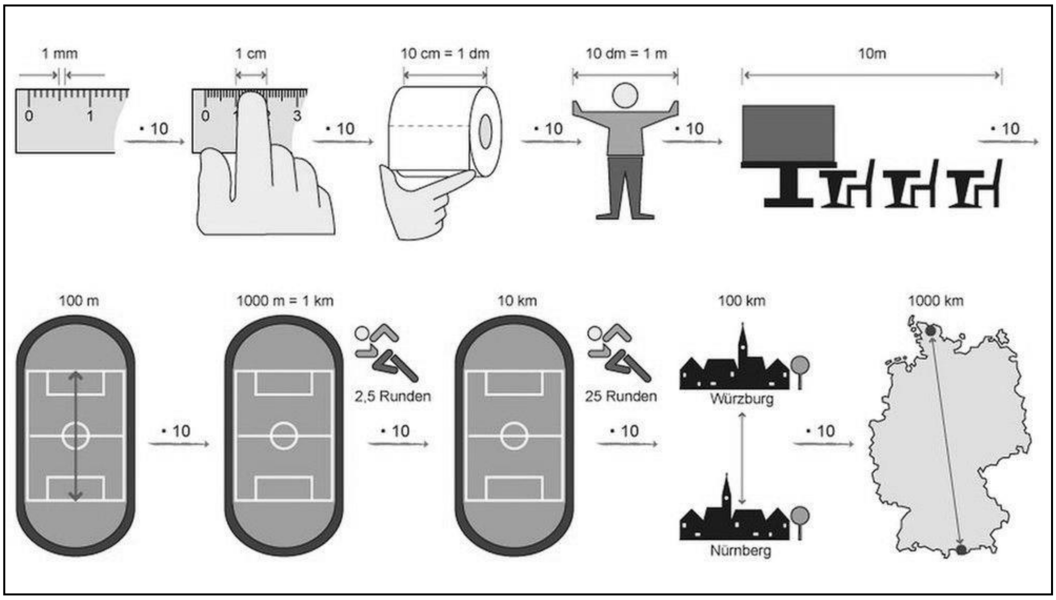


Abbildung 7: Vergleichsgrößen

Fächerübergreifendes Lernen

Auch der Blick über die Grenzen des Mathematikunterrichts hinaus ist lohnend. So bietet neben dem Fach Physik beispielsweise der Erdkundeunterricht vielfältige Gelegenheiten, ein Wissen über Vergleichsgrößen (Durchschnittstemperaturen, Niederschlagsmengen, Flächen von Städten und Ländern, Entfernungen zwischen bestimmten Orten) auszubilden. Auf dieses Wissen kann auch im Mathematikunterricht zurückgegriffen und die beiden Fächer können so thematisch miteinander verknüpft werden.

Schätzen von Größen im Modellierungsprozess

Das Abschätzen von Größen und das in einem Kontext sinnvolle Anwenden von Überschlagsrechnungen gehören zu einem umfassenden Modellierungsprozess. Dies ist nicht nur zu Beginn des Modellierungsprozesses notwendig, sondern ebenfalls beim Prüfen der Ergebnisse am Ende des Modellierungsprozesses. Anhand der bereits in den Didaktischen Handreichungen Teil II aufgeführten schematischen Darstellung eines Modellierungsprozesses, dem Modellierungskreislauf nach Maaß (2004), kann dies verdeutlicht werden. Dieser ist in Abbildung 3 dargestellt. Vereinfachte Modellierungskreisläufe können auch als Unterstützung für die Schüler*innen genutzt werden. Ein solcher vereinfachter Modellierungskreislauf ist zum Beispiel im Beitrag „Selbstständiges Lernen mit Untersuchung von Lernumgebungen zum Modellieren im Projekt DISUM" (S. 64) von Blum und Schukajlow (2018) (abrufbar unter https://doi.org/10.1007/978-3-658-20325-2_4) zu finden.

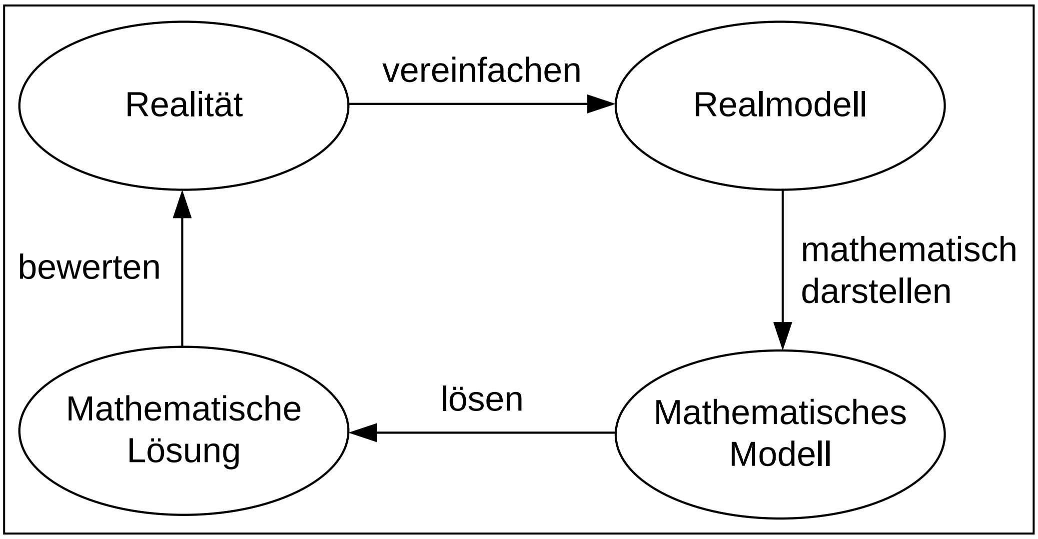


Abbildung 9: Modellierungskreislauf

Zur Bearbeitung einer mathematischen Modellierungsaufgabe muss die reale Situation zunächst vereinfacht werden (Kaiser et al., 2015). Dabei können Annahmen getroffen werden, für die Schätzungen von Größen erforderlich sind. Um das Ergebnis am Ende des Modellierungsprozesses zu bewerten, ist auch das kritische Prüfen getroffener Annahmen erforderlich. Um die Plausibilität getroffener Annahmen und das Ergebnis zu prüfen, können Vergleichsgrößen herangezogen werden.

Diese Fähigkeiten sollten demnach im Unterricht gefördert werden. Wenn Lernende ihr Ergebnis am Ende ihres Lösungsweges kritisch hinterfragen, können ihnen zu Beginn getroffene Annahmen, die unrealistisch waren, auffallen. So zum Beispiel, wenn Lernende bei der Aufgabe „Riesenfuß“ durch eine unrealistische Annahme ein zu kleines Maß für den Riesenfuß erhalten, kann das Ergebnis für die Größe des Riesenfußes mit einem im Hintergrund stehenden Baum verglichen werden und das falsche Ergebnis so aufgedeckt werden. Das Hinterfragen der Ergebnisse und Annahmen kann anhand vergleichbarer Aufgaben erläutert werden. Die Lehrkraft kann zum Beispiel in einer Plenumsphase Teilschritte wie das Treffen von Annahmen und das kritische Prüfen von Ergebnissen explizit einfordern. Zudem können vorgegebene Lösungswege oder Lösungswege von Mitschüler*innen durch die Schüler*innen (schriftlich) bewertet werden.

Es gibt eine Vielzahl weiterer Modellierungsprobleme, bei denen Abschätzungen angestellt werden müssen. Beispielsweise beschreibt Wilfried Herget (2000) weitere Anwendungsaufgaben, in denen – ähnlich wie in den obigen Aufgaben – verschiedene Objekte anhand eines Fotos abgeschätzt werden müssen. Diese Aufgaben bezeichnet er als „Bild-Aufgaben“ (Herget 2000, S. 4) und stellt diese als Alternative zu meist sehr textlastigen Anwendungsaufgaben heraus. Der Artikel „Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte… Messen, Schätzen, Überlegen – viele Wege, viele Antworten“ von Herget (2000) kann unter folgendem Link abgerufen werden: https://disk.mathematik.uni-halle.de/lehrerseite/bild_1000_worte.pdf.

4.3. Messungen aus der Umwelt nutzen

Testheft C - Aufgabe 17: Schwimmbecken

Ein Schwimmbecken (siehe Abbildung 1) ist insgesamt 35 m lang. Ein Teil davon ist der Nichtschwimmerbereich. Der Nichtschwimmer-bereich ist 8 m lang und die Wassertiefe beträgt hier 1 m. Der Schwimmerbereich ist 25 m lang und die Wassertiefe beträgt hier 2 m. Zwischen den beiden Bereichen des Beckens befindet sich ein schräger Übergangsbereich.

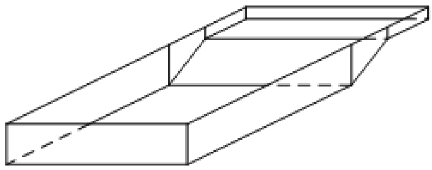


Abbildung 1

Teilaufgabe a)

In Abbildung 2 ist eine Querschnittsfläche des Beckens skizziert.

Trage die passenden Maße in die vier Kästchen ein.

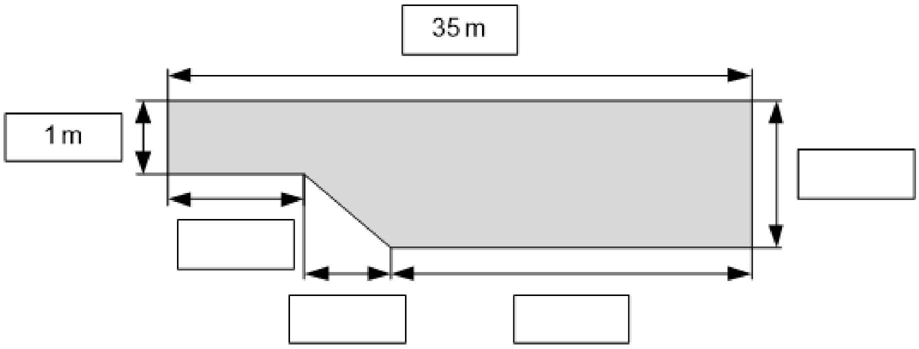
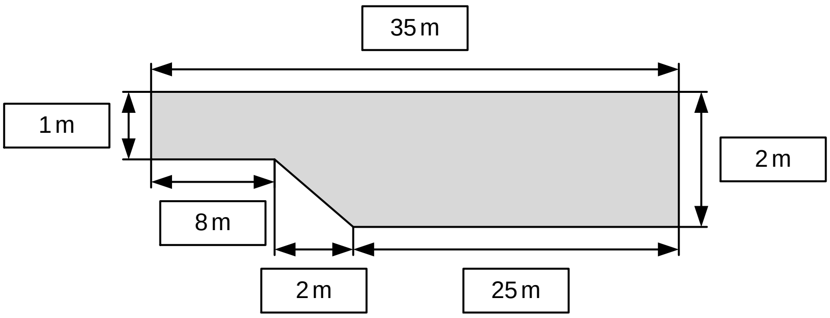


Abbildung 2

Längenangaben können nicht durch Messen ermittelt werden.

Auswertung

RICHTIG	 [Anm.: Die Aufgabe ist auch als richtig zu werten, wenn die richtigen Zahlen eingetragen wurden, aber die Einheiten fehlen.]

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II

Kompetenzstufe	3

Teilaufgabe b)

Das Schwimmbecken hat eine rechteckige Wasseroberfläche und ist 15 m breit.

Kai sagt: „Im Nichtschwimmerbereich ist das Wasser 1 m tief und der Schwimmerbereich des Beckens ist 2 m tief. Also beträgt die durchschnittliche Wassertiefe 1,50 m. Damit kann ich schnell berechnen, wie viel Wasser im Becken ist,
nämlich 35m · 15m · 1,5m = 787,5m^3 .“

Begründe, dass Kais Überlegung nicht richtig ist.

Auswertung

RICHTIG	Begründung, die herausstellt, dass die mittlere Wassertiefe nicht 1,50 m beträgt, weil der Schwimmerbereich viel länger ist als der Nichtschwimmerbereich. Beispiel(e) • Es ist falsch, denn der 1 m tiefe Bereich (Nichtschwimmer) ist nicht gleich lang wie der Schwimmerbereich, also ist die durchschnittliche Tiefe nicht 1,50 m. • Die Fläche, wo es 2 m tief ist, ist viel größer als die Fläche, wo es 1 m tief ist, somit kann man den Durchschnitt nicht so berechnen, als ob beides gleich große Flächen hätte. • Weil die Schwimmerseite größer ist und somit mehr Wasser im 2 m tiefen Bereich ist. Damit Kais Überlegung richtig wäre, müsste die Schräge in der Mitte des Beckens liegen.

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	III
Kompetenzstufe	5

Leitidee

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Schwimmbecken“ werden Maßangaben aus gegebenem Material, der Beschreibung der Maße eines Schwimmbeckens, entnommen sowie mit diesen Berechnungen durchgeführt, um die durchschnittliche Wassertiefe zu bestimmen und eine Rechnung einer anderen Person bezüglich der durchschnittlichen Wassertiefe zu bewerten. Dementsprechend wird die Aufgabe der Leitidee *Messen* (L2) zugeordnet.

Kompetenzen

Da in Teilaufgabe 3.1 ein mathematikhaltiger Text erfasst wird und Informationen aus diesem entnommen werden, erfordert diese Teilaufgabe die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6). Zudem wird eine Darstellung eines mathematischen Objekts, eine Zusammensetzung mehrerer Viereckflächen, zur mathematischen Darstellung der Querschnittsfläche des Schwimmbeckens genutzt, indem aus dem Aufgabenstimulus entnommene Maße des Schwimmbeckens in die Darstellung übertragen werden. Daher erfordert diese Teilaufgabe die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4).

Um in Teilaufgabe 3.2 zu begründen, dass die vorgegebene Überlegung nicht richtig ist, muss die reale Situation (ein Schwimmbecken bestehend aus Schwimmer- und Nichtschwimmerbereich) vereinfacht und ein mathematisches Modell (hier eine aus mehreren ebenen Vierecken zusammengesetzte ebene Figur) gebildet werden (oder jenes aus Teilaufgabe 3.1 genutzt werden), in welchem gearbeitet werden kann, um die Aussage von Kai zu überprüfen. Somit spricht diese Teilaufgabe die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) an.

Zudem soll die Äußerung einer fremden Person zu einem mathematischen Inhalt überprüft werden und die eigene Begründung dafür, dass die Aussage nicht richtig ist, schriftlich dargelegt werden. Demnach ist die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) erforderlich.

Anforderungs-bereich

Teilaufgabe 3.1 erfordert die sinnentnehmende Erfassung eines komplexen mathematikhaltigen Textes, sodass diese Teilaufgabe im *Anforderungsbereich II* einzuordnen ist. In Teilaufgabe 3.2 ist die Bewertung einer Äußerung einer anderen Person zu einem mathematischen Inhalt gefordert, sodass diese Teilaufgabe dem *Anforderungsbereich III* zuzuordnen ist.

Testheft B - Aufgabe 23: Skihalle

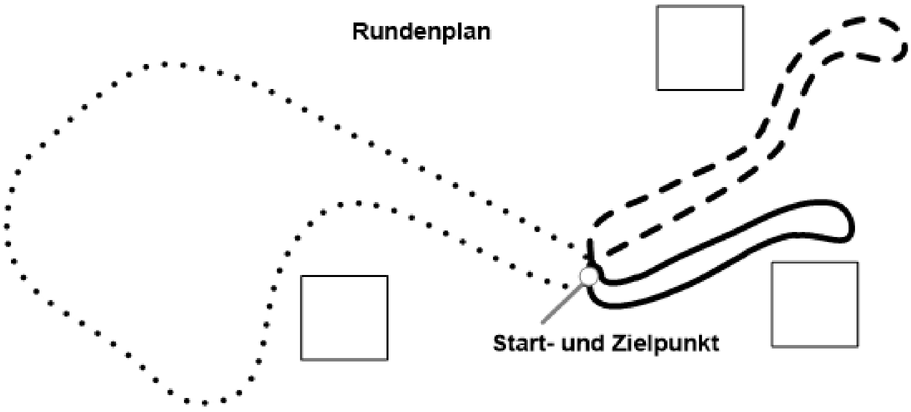
23. In einer Skihalle können Langläufer drei verschiedene Runden laufen. Diese sind in dem abgebildeten Rundenplan dargestellt.

Rundenlängen:

- Runde **A**: 555 m
- Runde **B**: 380 m
- Runde **C**: 264 m

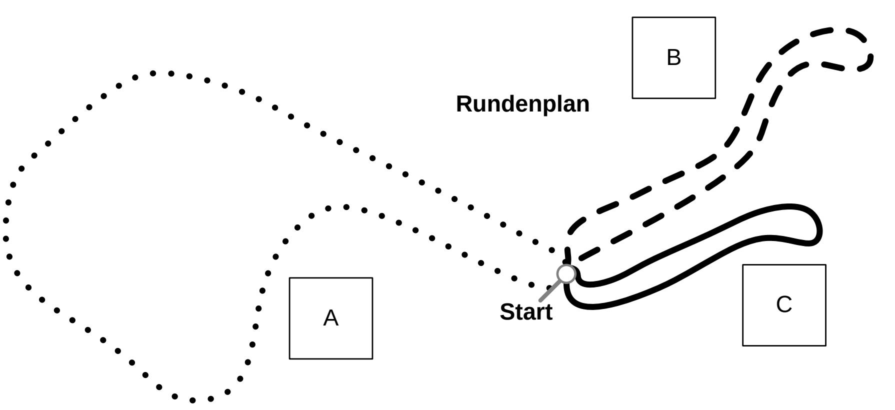
Alle Runden haben den Start- und Zielpunkt gemeinsam.

Teilaufgabe a)



a) Schreibe an jede Runde in der Abbildung den passenden Buchstaben.

Auswertung

RICHTIG	

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1a

Teilaufgabe b)

b) In seinem einstündigen Training schafft es ein Langläufer, alle Runden jeweils genau neunmal zu durchlaufen.

Welche Gesamtstrecke hat er dabei ungefähr zurückgelegt?

A ☐ 1000 m

B ☐ 6000 m

C ☐ 9000 m

D ☐ 11 000 m

Auswertung

RICHTIG	☐ 1000 m	☐ 6000 m	☐ 9000 m	☒ 11 000 m

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b

Aufgabenbezogener Kommentar

Leitidee

In der Aufgabe „Skihalle" werden Maßangaben von Langlaufrunden aus Quellenmaterial genutzt, um diese in einen Rundenplan zu übertragen und die Länge einer Strecke zu bestimmen. Demnach ist die Aufgabe der Leitidee *Messen* (L2) zuzuordnen.

Kompetenzen

Die Aufgabe „Skihalle" spricht die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) an, da durch das Übertragen der Rundenlängen in den Rundenplan und das Bestimmen der Länge einer Gesamtstrecke ein vereinfachtes Abbild der Realität, also ein einfaches Modell, genutzt wird. Zudem erfordert Teilaufgabe 4.1 die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6), da die Längenangaben aus einem kurzen, einfachen mathematikhaltigen Text entnommen werden.

Um die Länge der Gesamtstrecke in Teilaufgabe 4.2 zu bestimmen, werden die Längen verschiedener Teilstrecken über einen einfachen Größenvergleich bestimmt und addiert, somit also Routineverfahren zur Bestimmung der Länge der Gesamtstrecke verwendet, sodass die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) gefordert ist.

Anforderungs-bereich

Die Aufgabe ist dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen, da in beiden Teilaufgaben ein direkt erkennbares Modell genutzt wird, Informationen aus einem einfachen Text entnommen und Routineverfahren angewendet werden.

Testheft B/C - Aufgabe 24/18: Hauptstädte

18. Die Karte zeigt die europäischen Hauptstädte.

Teilaufgabe a)

a) Welche der folgenden Hauptstädte ist etwa 1100 km von Berlin entfernt?

A ☐ Reykjavik

B ☐ Luxemburg

C ☐ Helsinki

D ☐ Vilnius

Auswertung

RICHTIG	☐ Reykjavik	☐ Luxemburg	☒ Helsinki	☐ Vilnius

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2

Teilaufgabe b)

b) Gib an, wie lang die Strecke (Luftlinie) zwischen Berlin und Madrid in der Wirklichkeit etwa ist.

✍ ______________ km

Auswertung

RICHTIG	Zahl aus dem Intervall [1850; 1950] [Anm.: Originalabstand zwischen Berlin und Madrid: 5,3 cm. Bei Abweichungen im Druck kann das Lösungsintervall dementsprechend angepasst werden.]

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3

Aufgabenbezogener Kommentar

Leitidee

In der Aufgabe „Hauptstädte“ werden Entfernungen zwischen Punkten auf einer Landkarte thematisiert. Die Aufgabe wird der Leitidee *Messen* (L2) zugeordnet, da Strecken in der Karte gemessen werden, der Maßstab aus dem Material entnommen wird und damit Berechnungen durchgeführt werden.

Kompetenzen

Um die Erdkugel auf einer Karte darzustellen, werden Kartenprojektionen genutzt, die als mathematisches Modell zur Beschreibung der Wirklichkeit dienen. Bei der hier dargestellten Karte handelt es sich, wie bei jeder geographischen Karte, um ein Modell, welches die dreidimensionale Erdoberfläche zweidimensional darstellt. Dieses Modell soll genutzt werden, um die Entfernung der Hauptstädte zu bestimmen. Somit wird in dieser Aufgabe die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) abgebildet. Dabei werden Informationen wie der Maßstab aus der Karte entnommen, sodass in dieser Aufgabe die Kompetenz *Mathematisch* *kommunizieren* (K6) gefordert ist. Zudem kommen in beiden Teilaufgaben mathematische Werkzeuge zum Einsatz (beispielsweise Zirkel und Lineal), sodass die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) angesprochen wird.

Anforderungsbereich

In beiden Teilaufgaben müssen der Maßstab beachtet und mathematische Werkzeuge verständig eingesetzt werden. Daher befinden sich beide Teilaufgaben im *Anforderungsbereich II*.

Testheft B/C - Aufgabe 21/15: So viel Wasser

Bei der Herstellung eines T-Shirts aus Baumwolle wird so viel Wasser gebraucht, wie in 270 Putzeimer (siehe Abbildung) passt.

Wie viele Liter Wasser werden demnach bei der Herstellung eines T-Shirts gebraucht?

Kreuze die Zahl an, die am besten passt.

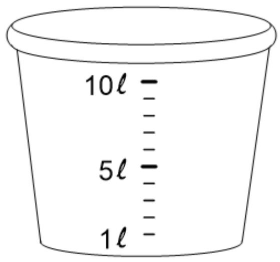
A ☐ 2,7 Liter

B ☐ 27 Liter

C ☐ 270 Liter

D ☐ 2700 Liter

E ☐ 27 000 Liter



Auswertung

RICHTIG	☐ 2,7 Liter	☐ 27 Liter	☐ 270 Liter	☒ 2700 Liter	☐ 27 000 Liter

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b

Aufgabenbezogener Kommentar

Leitidee

In der Aufgabe „So viel Wasser“ wird das Volumen eines Putzeimers genutzt, um die Menge des benötigten Wassers bei der Herstellung eines T-Shirts zu berechnen. Demnach wird die Aufgabe der Leitidee *Messen* (L2) zugeordnet.

Kompetenzen

Die Aufgabe „So viel Wasser“ wird der Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) zugeordnet, da ein vertrautes Modell, das Modell eines (vertrauten) Eimers, genutzt wird, um das Volumen des

Putzeimers zu bestimmen und mit diesem eine Multiplikation zur Bestimmung des benötigten Wassers durchzuführen.

Da zur Bestimmung der Lösung lediglich eine Multiplikation nötig ist, ein vertrautes Modell genutzt wird und das Ergebnis direkt am Kontext geprüft werden kann, befindet sich diese Aufgabe im *Anforderungsbereich I*. Anforderungsbereich

Testheft B - Aufgabe 22: Parfüm

Parfüms werden meist in edlen Glasflaschen (siehe Abbildung 1) verkauft. Ein Pumpzerstäuber auf diesen Flaschen verteilt das Parfüm in winzig kleine Tröpfchen (siehe Abbildung 2). Dabei werden mit jedem Pumpstoß durchschnittlich 0,2 ml Parfüm verteilt.

Abbildung 1

Abbildung 2

Teilaufgabe a)

Gib an, wie viel Milliliter Parfüm bei täglicher Verwendung genau eines Pumpstoßes nach zehn Tagen verbraucht sind.

✍ ______________________ ml

Auswertung

RICHTIG	2

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b

Teilaufgabe b)

Sandra kauft eine Parfümflasche mit 100 ml Inhalt.

Gib an, wie lange diese Flasche wohl reicht, wenn Sandra täglich mehrere Pumpstöße Parfüm verwendet.

______________________ Tage

Notiere deinen Lösungsweg.

Auswertung

RICHTIG	Angabe einer Zeitdauer mit höchstens 250 Tagen UND Lösungsweg, der eine Berücksichtigung der Grundmenge (100 ml) und die Menge des täglich verbrauchten Parfüms (mindestens 0,4 ml) (implizit) erkennen lässt. Beispiel(e) • 100 ml : 0,4 ml/Tag = 250 Tage • 166 UND 100 : 0,6 $\approx$ 166 • 100 ml : 2 ml/Tag = 50 Tage • 50 UND $10 \cdot 0{,}2 = 2$ ml/Tag [Anm.: Hier steht die Modellierungskompetenz im Fokus, sodass Rundungsfehler, Rechenfehler und falsch verwendete Einheiten vernachlässigt werden, solange sinnvolle Annahmen getroffen werden.]

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3

Teilaufgabe c)

Eine Parfümflasche mit 50 ml Inhalt kostet im Verkauf 75 €.

Gib an, wie viel Euro ein einzelner Pumpstoß etwa kostet.

_______________ €

Notiere deinen Lösungsweg.

Auswertung

RICHTIG	0,30 UND Lösungsweg, in dem der Flaschenpreis (75 €), die zur Verfügung stehende Menge (50 ml) und die Parfümmenge pro Pumpstoß (0,2 ml) erkennbar berücksichtigt sind. Beispiel(e) • $\frac{75\text{ €}}{50\text{ ml}} = \frac{x}{0{,}2\text{ ml}}$; $x = 0{,}30$ € • 50 ml kosten 75 €. 1 ml kostet demnach 1,50 €. Dann kostet jeder Pumpstoß 0,30 €. [Anm.: 0,2 ml ist über "jeder Pumpstoß" erkennbar.]

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3

Aufgabenbezogener Kommentar

Leitidee

Die Aufgabe „Parfüm“ wird der Leitidee *Messen* (L2) zugeordnet, da mit gegebenen Maßangaben (dem Parfümverbrauch pro Pumpstoß) Berechnungen durchgeführt werden.

Kompetenzen

In der ersten Teilaufgabe soll ermittelt werden, wie viel Parfüm durch zehn Pumpstöße verbraucht wird. Dabei muss ein einfaches mathematisches Modell aufgestellt werden, mit welchem der Verbrauch pro Pumpstoß mit der Gesamtzahl der Pumpstöße multipliziert wird. In der zweiten Teilaufgabe müssen geeignete Annahmen darüber getroffen werden, wie viele Pumpstöße pro Tag verwendet werden, um zu berechnen, wie lange 100 ml Parfüm ausreichen. Dabei wird eine mehrschrittige Modellierung vorgenommen. Auch in der dritten Teilaufgabe ist eine mehrschrittige Modellierung erforderlich, um den Preis eines einzelnen Pumpstoßes zu berechnen. Demnach wird in allen drei Teilaufgaben die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) angesprochen. In allen drei Teilaufgaben ist die Arbeit mit Gleichungen und Termen erforderlich, indem in einem gebildeten mathematischen Modell gearbeitet wird, um die gesuchten Werte zu bestimmen. Somit wird die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) abgebildet. In der ersten Teilaufgabe ist es zur Lösung der Aufgabe wesentlich, dass Informationen über den Parfümverbrauch aus dem Aufgabentext entnommen werden. Somit wird die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) angesprochen. In der zweiten und dritten Teilaufgabe ist die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) ebenfalls erforderlich, da der Lösungsweg jeweils notiert und somit verständlich dargestellt werden soll.

Anforderungsbereich

Teilaufgabe 3.1 befindet sich im *Anforderungsbereich I*, da ein einfaches mathematisches Modell zur Lösung genutzt wird und Informationen aus einem sehr kurzen, einfachen mathematikhaltigen Text entnommen werden. Teilaufgabe 3.2 und 3.3 befinden sich im *Anforderungsbereich II*, da eine mehrschrittige Modellierung vorgenommen wird und eigene Lösungswege verständlich dargestellt werden sollen.

Anregungen für den Unterricht

Gemeinsame Merkmale der Aufgaben

Die Gemeinsamkeit der Aufgaben „Schwimmbecken“, „Skihalle“, „Hauptstädte“, „So viel Wasser“ und „Parfüm“ ist der Umgang mit Messungen aus der Umwelt. In jeder Aufgabe werden eigene Messungen vorgenommen (zum Beispiel in der Aufgabe „Hauptstädte“ in einer Karte, um Abstände zwischen Städten zu bestimmen) oder vorgegebene Messungen aus Abbildungen oder mathematikhaltigen Texten entnommen und damit weitere Berechnungen durchgeführt. Dabei werden sowohl Längen (in den Aufgaben „Schwimmbecken“, „Skihalle“ und „Hauptstädte“) als auch Volumina (in den Aufgaben „So viel Wasser“ und „Parfüm“) thematisiert.

Bei diesen Aufgaben handelt es sich um Modellierungsaufgaben, die lediglich bestimmte Teilschritte des Modellierens erfordern. Eine Möglichkeit, um andere Teilschritte zu fördern, ist die Variation der Aufgaben bis hin zu einer vollständigen Modellierungsaufgabe. Dies wird im Folgenden anhand der Aufgaben „So viel Wasser“ und „Hauptstädte“ beispielhaft erläutert.

Aufgabenvariation zur Aufgabe „So viel Wasser“

Ein Beispiel für eine Modellierungsaufgabe im Kontext der Aufgabe „So viel Wasser“ kann durch das Entfernen der Angabe für das Fassungsvermögen des Putzeimers aus der Abbildung erreicht werden, sodass dieses von Schüler*innen geschätzt werden muss, um die Aufgabe zu lösen. Damit würde die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) stärker fokussiert werden, da die Anforderung nicht ausschließlich in der Nutzung eines vorgegebenen Modells und einer Multiplikation bestünde. Stattdessen müssen zunächst eigenständig Vereinfachungen und Annahmen getroffen werden, um ein eigenes mathematisches Modell zu bilden und mit diesem weiterzuarbeiten. Damit würde ein Bezug zu den vorherigen Aufgaben hergestellt werden, in welchen das Schätzen von Größen mithilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten thematisiert wird. Ein Putzeimer sollte den Schüler*innen aus ihrem Alltag bekannt sein, sodass sie mithilfe der Vorstellung über die Größe eines Eimers entsprechende Annahmen treffen können. Als weitere Möglichkeit zur Variation der Aufgabe „So viel Wasser“ kann anstelle des Putz-eimers angegeben werden, dass für die Produktion eines T-Shirts so viel Wasser benötigt wird, wie in 15 Badewannen passt. Damit wäre es zunächst erforderlich, dass die Schüler*innen geeignete Annahmen zum Fassungsvermögen einer Badewanne treffen, sodass die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) stärker gefördert werden würde. Das Treffen eigener Annahmen kann so im Unterricht geübt werden, um Schüler*innen mit offenen Modellierungsaufgaben vertraut zu machen.

Aufgaben-variation zur Aufgabe „Hauptstädte“

Bei der Aufgabe „Hauptstädte“ wird mit einer Kartenprojektion gearbeitet. Eine Karte stellt ein Modell der Erdkugel beziehungsweise eines Ausschnitts der Erdkugel dar. Da die dreidimensionale Erdoberfläche auf eine zweidimensionale Fläche abgebildet wird, stellen Karten eine Vereinfachung der Erdoberfläche dar. Dies kann auch im Mathematikunterricht thematisiert werden, um Schüler*innen die Modellbildung zu veranschaulichen und mit der Reflektion von Modellen vertraut zu machen. So kann beispielsweise zunächst thematisiert werden, dass Vereinfachungen bei einer Kartenprojektion (also bei der Übertragung der dreidimensionalen Erdoberfläche auf eine zweidimensionale Karte) unumgänglich sind. Dadurch entstehen Verzerrungen der Längen, Winkel und Flächen. Dies kann zum Beispiel daran veranschaulicht werden, dass es nicht möglich ist, eine Mandarinenschale „platt“ auf einen ebenen Tisch zu legen. Die Projektion der dreidimensionalen Erdoberfläche auf eine zweidimensionale Karte stellt somit bereits eine vereinfachte Abbildung der Realität dar. Eine längentreue Projektion der Erdkugel auf eine ebene Karte ist nicht möglich (lediglich die korrekte Abbildung *einiger* Strecken ist möglich). So gibt es winkeltreue Karten, bei welchen die Winkel korrekt dargestellt sind, und flächentreue Karten, bei welchen die Flächen maßstabsgetreu abgebildet sind, sowie Projektionen, bei welchen die Flächen oder Winkel verzerrt dargestellt sind. Zudem werden, je nach Zweck, verschiedene Informationen in Karten dargestellt. In einer topographischen Karte beispielsweise werden unter anderem Gewässer, Relief und Straßen dargestellt. In einer thematischen Karte werden einzelne oder mehrere Themen dargestellt. So handelt es sich in der Aufgabe „Hauptstädte“ um eine thematische Karte, welche die Hauptstädte europäischer Staaten zeigt, jedoch beispielsweise keine Gewässer. Im Zusammenhang mit der Aufgabe „Hauptstädte“ kann im Unterricht darauf eingegangen werden, dass zwar in allen Karten reale Gegebenheiten in die Mathematik übersetzt werden, man sich jedoch bewusst sein sollte, dass trotz verschiedener Möglichkeiten bei der Erstellung eines Modells immer Vereinfachungen vorgenommen werden. Somit können Schüler*innen dafür sensibilisiert werden, dass ein Modell ein *vereinfachtes* Abbild der Realität ist.

Im Unterricht oder im Rahmen von Projektarbeiten können anhand verschiedener Karten unterschiedliche Modelle der Erdkugel reflektiert und somit mögliche Konsequenzen von Vereinfachungen in Modellen thematisiert werden. In diesem Zusammenhang kann zum Beispiel anhand der Mercator-Projektion thematisiert werden, dass Modelle aufgrund ihrer Vereinfachung von der Realität abweichen können. Bei der Mercator-Projektion handelt es sich um eine winkeltreue Karte. Die Mercator-Projektion ist jedoch weder flächentreu – Flächeninhalten der Karte liegen also an verschiedenen Stellen der Karte unterschiedliche Maßstäbe zugrunde – noch längentreu. Die Entfernungen der Karte entsprechen nicht den tatsächlichen Entfernungen. So bildet die Mercator-Projektion die Erdkugel in Äquatornähe sehr gut ab, zu den Polen hin weist sie jedoch immer größere Verzerrungen auf, sodass zum Beispiel Grönland deutlich größer dargestellt wird als es tatsächlich ist. Dies könnte im Unterricht veranschaulicht werden, indem die

Konstruktion der Mercator-Projektion nachgestellt wird. Da es sich bei der Mercator-Projektion um eine zylindrische Projektion handelt, kann um einen Globus oder eine symbolische Erdkugel (zum Beispiel ein Ball, welcher die Erde symbolisieren soll) mithilfe eines Papiers ein Zylinder gelegt werden, welcher veranschaulicht, dass sich Punkte der Kugeloberfläche in Äquatornähe gut auf den Zylinder übertragen lassen, dies jedoch in der Nähe der Pole deutlich schwieriger gelingt. Dieses Vorgehen wird in folgendem Video veranschaulicht, welches unter dem folgenden Link https://www.zdf.de/dokumentation/terra-x/weltkarte-von-mercator-creative-commons-100.html aufrufbar ist.

Auf diese Weise kann also verdeutlicht werden, dass für verschiedene Zwecke jeweils unterschiedlich passende Modelle gewählt werden können. Zudem kann insbesondere in Teilaufgabe 1 thematisiert werden, dass die gemessene Strecke trotz Maßstabsfaktor eine, wenn auch geringe, Abweichung zur realen Strecke auf der Erdkugel darstellt, denn die zu ermittelnde Luftlinie wird als Strecke in der Karte interpretiert, die tatsächliche Luftlinie verläuft jedoch aufgrund der gekrümmten Erdoberfläche auf einem Großkreis. Dies kann mithilfe eines Fadens, welcher auf einen Globus gelegt wird, um die Strecke zwischen zwei Orten zu messen, veranschaulicht werden. Weiterführend könnte im Unterricht eine Weltkarte verwendet werden, um Abstände zwischen verschiedenen Orten auf der Erde mit einem Lineal zu messen, diese mit den tatsächlichen Entfernungen zu vergleichen und anschließend Unterschiede in den Ergebnissen erklären zu lassen.

5. Literatur

Barzel, B. & Leuders, T. (2014). Größen und Maße. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik: Grundbildung und Konmpetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II*. Klett Kallmeyer.

Blum, W., & Schukajlow, S. (2018). Selbständiges Lernen mit Modellierungsaufgaben – Untersuchung von Lernumgebungen zum Modellieren im Projekt DISUM. In S. Schukajlow & W. Blum (Hrsg.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren* (S. 51-72). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-20325-2_4 (letzter Aufruf: 12.12.2022)

Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren — Zu schwer für Schüler und Lehrer? In E. Vásárhely (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 3–12). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Blum, W., Drüke-Noé, C., Hartung, R. & Köller, O. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: Konkret — Sekundarstufe I*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

BR (2011). *Messen mit Längenmaßen.* https://www.br.de/grips/faecher/grips-mathe/16-umfang-flaeche100.html (letzter Aufruf: 12.12.2022)

Büchter, A., Herget, W., Leuders, T. & Müller, J. H. (2010). *Die Fermi-Box. 8. bis 10. Klasse.* vpm.

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Spektrum Akademischer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2695-6 (letzter Aufruf: 12.12.2022)

Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht: Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57680-9 (letzter Aufruf: 12.12.2022)

Greefrath, G., Oldenburg, R., Ulm, V. Siller, H.-S. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin: Springer Spektrum.

Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe.* Heidelberg: Spektrum.

Hildreth, D. J. (1983). The Use of Strategies in Estimating Measurements. *The Arithmetic Teacher*, *30*(5), 50-54. JSTOR. https://doi.org/10.5951/at.30.5.0050 (letzter Aufruf: 12.12.2022)

Herget, W. (2000). *Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte … Messen, Schätzen, Überlegen – viele Wege, viele Antworten.* https://disk.mathematik.uni-halle.de/lehrerseite/bild_1000_worte.pdf (letzter Aufruf: 12.12.2022)

Janvier, C. (1987). Translation process in mathematics education. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (S. 27–31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaiser, G. & Stender, P. (2015). Die Kompetenz mathematisch Modellieren. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe & A. Roppelt (Hrsg.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II* (S. 95-106). Diesterweg.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357–383). Berlin, Heidelberg: Springer.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E. & Vollmer, H. J. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. In BMBF (Hrsg.), *Bildungsreform: Bd. 1. Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: Eine Expertise* (S. 7–174). Berlin.

KMK. Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Zugriff am 28.05.2021. Verfügbar unter https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. *Beschluss vom 4.12.2003.* München: Luchterhand.

KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss*. *Beschluss vom 15.10.2004.* München, Neuwied: Luchterhand.

KMK (2005b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. *Beschluss vom 15.10.2004.* München, Neuwied: Luchterhand.

KMK (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschul-reife* (Beschluss vom 18.10.2012). Köln: Carl Link.

Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffs-bildung. Eine Untersuchung in rechnerunterstützten Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Leiss, D. & Blum, W. (2010). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 33–50). Berlin: Cornelsen.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim u. a.: Franzbecker.

Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy.* OECD Publishing.

Rolfes, T. (2018). *Funktionales Denken. Empirische Ergebnisse zum Einfluss von statistischen und dynamischen Repräsentationen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Roth, J. (2008). Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen. In U. Kortenkamp, H.-G. Weigand & T. Weth (Hrsg.), *Informatorische Ideen im Mathematikunterricht* (S. 131–138). Hildesheim: Franzbecker.

Roth, J. (2017). Computer einsetzen: Wozu, wann, wer & wie? *Mathematik lehren*, *205*, 35–38.

Roth, J. (2018, Februar). *Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen erarbeiten.* Vortrag im Rahmen der DmW-Tagung, Karlsruhe. Zugriff am 14.05.2020. Verfügbar unter https://www.juergen-roth.de/vortraege/2018_Roth_ Grundvorstellungen_zu_funktionalen_Zusammenhaengen_erarbeiten.pdf

Scheuring, M. & Roth, J. (2017). Computer-Simulationen oder gegenständliche Materi-alien – Was fördert funktionales Denken besser? In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 837–840). Münster: WTM.

Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 25*(1), 20–31.

Vohns, A. (2012). Grundprinzipien des Messens – Erkunden, Vernetzen, Reflektieren. *Mathematik lehren, 173*, 20–24.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik, 10*, 3–37.

vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). „Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematikdidaktik*, *37*, 225–254.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *21*(61), 37–46.

6. Abbildungsverzeichnis

7. Verzeichnis der Beispielaufgaben