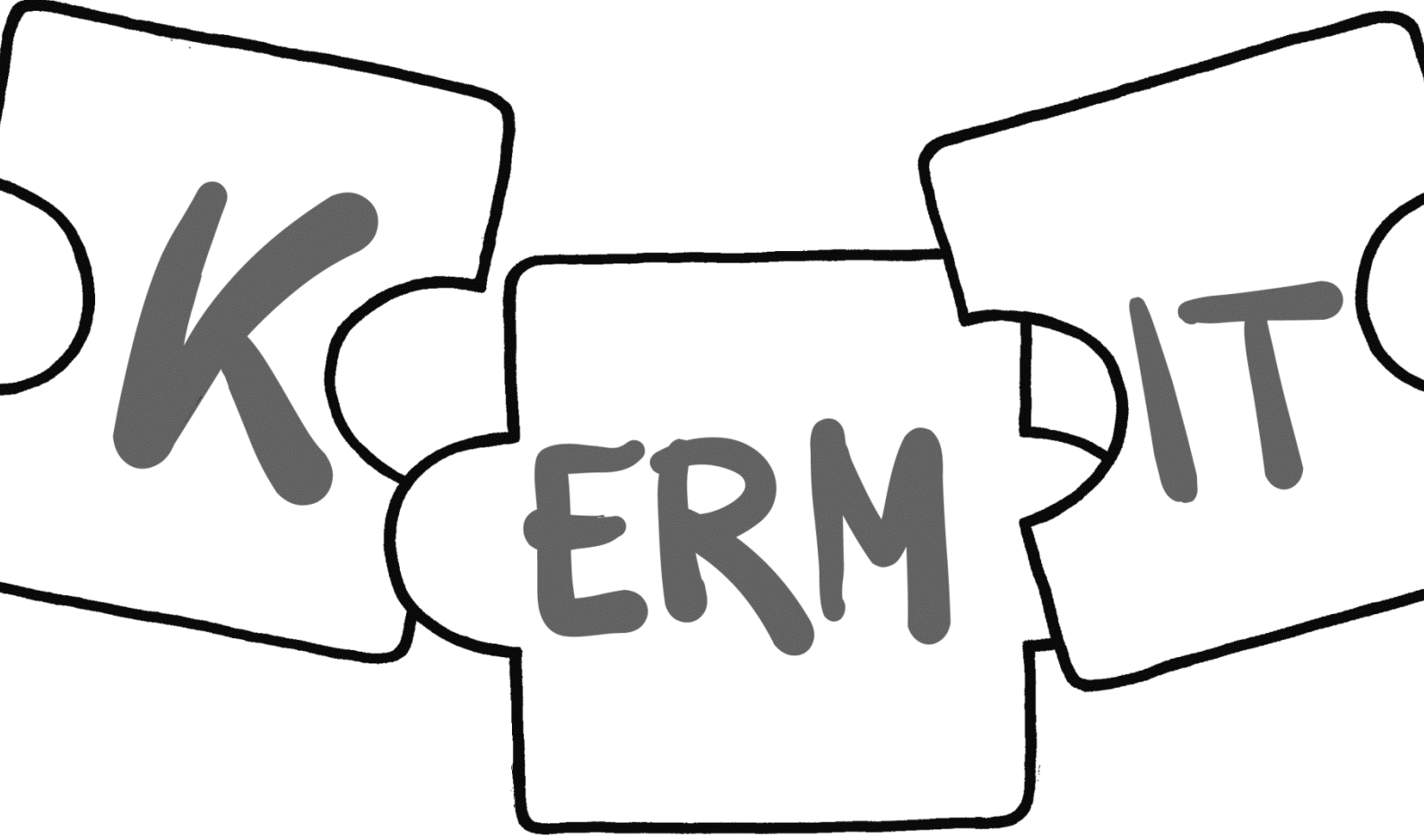


Kompetenzen ermitteln

Mathematik

Didaktisches Material

2021

3

2 5 7 8 9

1. Inhaltsverzeichnis

Zur Weiterentwicklung der Didaktischen Handreichungen 6
Die Bildungsstandards Mathematik 7
Kompetenzstufen im Fach Mathematik 8
Die Leitidee *Zahlen und Operationen* 12
Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein? 12
Zahldarstellung, Orientierung im Zahlenraum, Zahlvorstellung 12
Rechenoperationen verstehen und beherrschen 13
Grundvorstellungen der Rechenoperationen 13
Rechengesetze 13
Erwerb von Rechenstrategien 15
Anwendung des Rechnens in Kontexten 16
Überschlagendes Rechnen und kritisches Überprüfen von Ergebnissen 16
Aufgaben Zahlen und Operationen 17
Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen 17
Aufgabe 29 in Testheft C 17
Aufgabe 30 in Testheft C 17
Aufgabe 31 in Testheft B 18
Rechnen 27
Aufgabe 24 in Testheft B 27
Aufgabe 25 in Testheft C 27
Aufgabe 27 in Testheft B 28
Addition/Subtraktion 28
Aufgabe 27 in Testheft C 28
Aufgabe 32 in Testheft C 29
Multiplikation/Division 30
Aufgabe 30 in Testheft B und Aufgabe 28 in Testheft C 30
Aufgabe 26 in Testheft B 30
Aufgabe 33 in Testheft B 31
In Kontexten rechnen 44
Aufgabe 31 in Testheft C 44
Aufgabe 26 in Testheft C 44
Aufgabe 29 in Testheft B 45
Aufgabe 34 in Testheft B 45
Aufgabe 28 in Testheft B 46

Aufgabe 24 in Testheft C 46
Überschlagen und Plausibilitätsprüfung 52
Aufgabe 25 in Testheft B 52
Aufgabe 32 in Testheft B 52
Aufgabe 33 in Testheft C 53
Literaturverzeichnis 59
Anhang 66
Übersicht der Aufgabenmerkmale im Basismodul 66
Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul A (*Zahlen und Operationen*, L1) 69
Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul B (*Zahlen und Operationen*, L1) 71

Autorinnen und Autoren der fachdidaktischen Erläuterungen in den Teilen II und III sind Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Daniela Götz, Dr. Axel Schulz, Prof. Dr. Bernd Wollring und die Mitglieder der Aufgabenentwicklergruppe KERMIT 3. Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus zehn Bundesländern und Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern unter Federführung von Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik der Universität Osnabrück (fachdidaktische Leitung) und des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.

Haftungsausschluss:
Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiberinnen und Betreiber verantwortlich.

Wussten Sie, dass Sie viele KERMIT-Aufgaben und Didaktische Materialien auch online finden können?

www.igb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

Zur Weiterentwicklung der Didaktischen Handreichungen

Im Rahmen der Vereinbarung zur Weiterentwicklung der Vergleichsarbeiten (KERMIT) (Beschluss der Kultusministerkonferenz v. 08.03.2012 i. d. F. v. 15.03.2018) werden auch die Didaktischen Handreichungen weiterentwickelt. Ziel ist es, die Didaktischen Handreichungen praxistauglicher zu gestalten, so dass Kommentierungen von Testaufgaben und Vorschläge für die Weiterarbeit mit den KERMIT-Ergebnissen besser in den regulären Unterricht integriert werden können. Die Weiterentwicklung der Didaktischen Handreichungen ist ein kontinuierlicher Prozess, der auch in den kommenden Jahren fortgeführt wird. Grundlage der Überarbeitung sind dabei für uns Ihre Rückmeldungen zu Ihrer Arbeit mit den Didaktischen Handreichungen. Auf Basis der vorliegenden Rückmeldungen haben wir folgende Änderungen vorgenommen:

- Im Fach Mathematik werden die Tests im Rahmen der Weiterentwicklung von KERMIT so gestaltet, dass eine inhaltliche Schwerpunktsetzung zu einer bestimmten Leitidee(n) erfolgt. Es wird nicht mehr jede Testaufgabe kommentiert. Stattdessen beziehen sich die didaktischen Kommentierungen und Hinweise zur Weiterarbeit im Unterricht auf inhaltliche Schwerpunkte (z. B. „Rechnen“ zur Leitidee *Zahlen und Operationen*).
- Um eine inhaltlich anschlussfähige Weiterarbeit im Mathematikunterricht zu ermöglichen, werden in Teil III der didaktischen Handreichung auch genau diese Schwerpunkte erneut in den Mittelpunkt gestellt, umfangreich fachdidaktisch kommentiert und um Unterrichtsvorschläge und Übungsaufgaben für unterschiedliche Leistungsniveaus ergänzt. Zudem wurden authentische Schülerantworten aus der Pilotierung ergänzt, die sowohl die Auswertung erleichtern als auch typische Fehlvorstellungen verdeutlichen und somit als Anknüpfungspunkte für weitere Fördermaßnahmen dienen können.
- Um ein gezieltes und individuelles Weiterarbeiten mit einzelnen Teilaufgaben zu erleichtern, finden sich im Anhang von Teil III Tabellen, die eine Selektion aller Teilaufgaben nach Kompetenzstufen, allgemeinen mathematischen Kompetenzen, Leitideen und Anforderungsbereichen ermöglichen.
- Aktuelle wissenschaftliche fachdidaktische Erkenntnisse werden stärker berücksichtigt.
- Lehrkräfte haben bei der Entwicklung der Didaktischen Handreichungen intensiv beraten und mitgewirkt.

Zu berücksichtigen ist, dass die Arbeit mit den neuen Didaktischen Handreichungen auch darauf abzielt, mit Unterrichtsvorschlägen für Lern- und Übungsaufgaben weiterzuarbeiten, die sich auf Testaufgaben beziehen können, die nicht in der eher leichteren oder schwierigeren Testheftversion in Ihrer Klasse eingesetzt wurden, aber einen inhaltlichen Bezug zu einem Themenfeld im Test aufweisen. Diese Aufgaben werden vollständig (inklusive Lösungsschlüssel) in den Didaktischen Handreichungen abgebildet. Ihre Kommentierung sowie die Vorschläge zur Weiterarbeit im Unterricht erweitern die Möglichkeiten für eine stärker differenzierte bzw. individualisierte Unterrichtsgestaltung, da hierbei auch explizit leichtere und schwierigere Aufgaben vorgeschlagen werden. Wenn Ihre Klasse also eine leichtere Version des Tests bearbeitet hat, eignen sich die Vorschläge aus Teil III der Didaktischen Handreichung im Vergleich zu früheren Durchgängen jetzt viel besser, um auch in diesen eher leistungsschwächeren Klassen einzelne leistungsstarke Schülerinnen und Schüler mit schwierigeren Aufgaben im Unterricht gezielt zu fördern. Umgekehrt gibt es für leistungsstärkere Klassen auch leichtere Aufgabenhinweise, damit auch schwächere Schülerinnen und Schüler bestmöglich gefördert werden können.

Allgemeine Erläuterungen zum Fach Mathematik

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Ferner wird der mathematische Kompetenzbereiche *Zahlen und Operationen* erläutert und an konkreten Aufgabenbeispielen illustriert. Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Standards vorgegebenen Ziele bietet. Dabei wird auf die Domäne *Zahlen und Operationen* kurz eingegangen. Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Aufgaben sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren zu finden.

Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schülerinnen und Schüler zu verbessern. Entsprechend sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind damit auch Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,[1]
- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,
- Darstellen,
- Modellieren.

[1] In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject) war die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten“ noch nicht enthalten. Mittlerweile wurden aber im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik auch für den Primarbereich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten“ ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm.

Die für die Primarstufe beschriebenen *inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen* beziehen sich auf fünf mathematische Leitideen:

- Zahlen und Operationen,
- Raum und Form,
- Muster und Strukturen,
- Größen und Messen,
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Diese Leitideen sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (Kultusministerkonferenz, 2005).

Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Konzeption guten Mathematikunterrichts. Im Sinne der „Output-Orientierung“ ist von Interesse, was Schülerinnen und Schüler verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge „tatsächlich können“.

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schülerinnen und Schüler – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen „Kompetenzstufen“ zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilfreiche Orientierungen geben kann.

Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller, 2012; Reiss & Winkelmann, 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der mathematischen Kompetenz von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

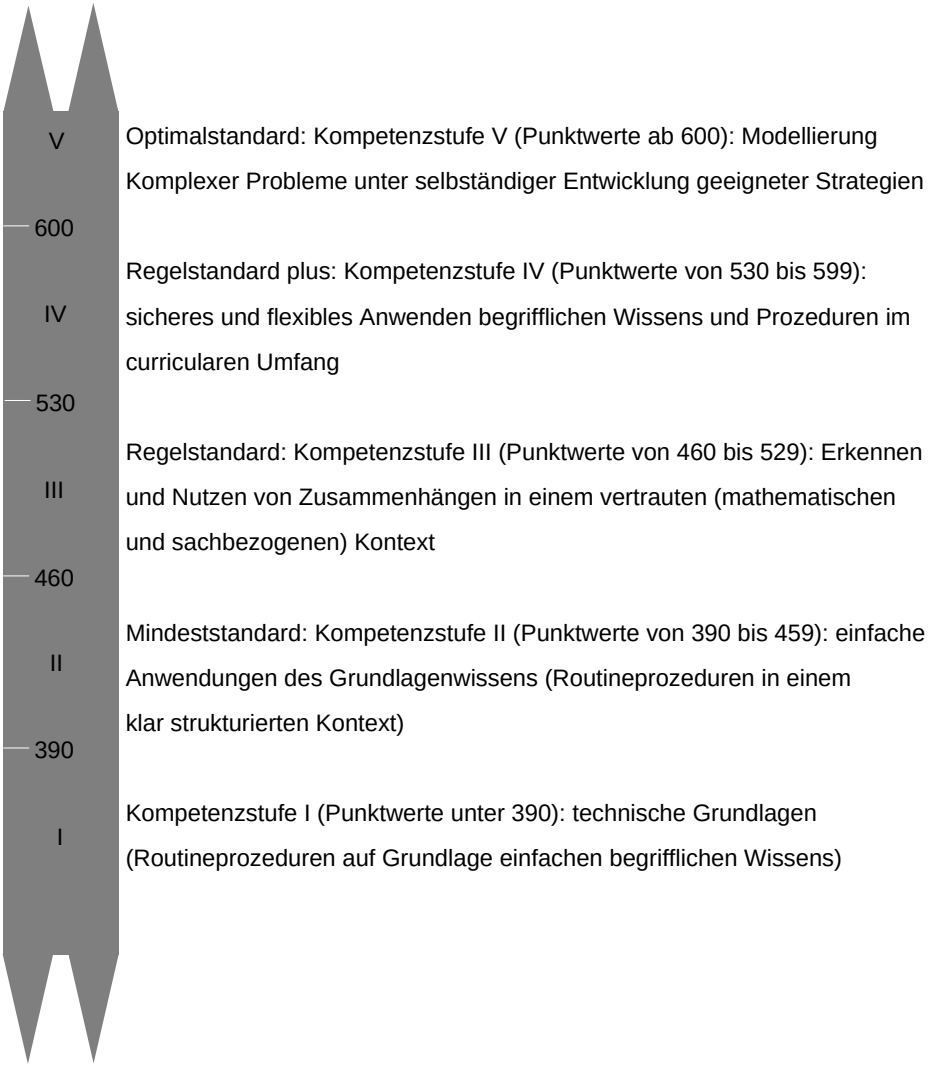


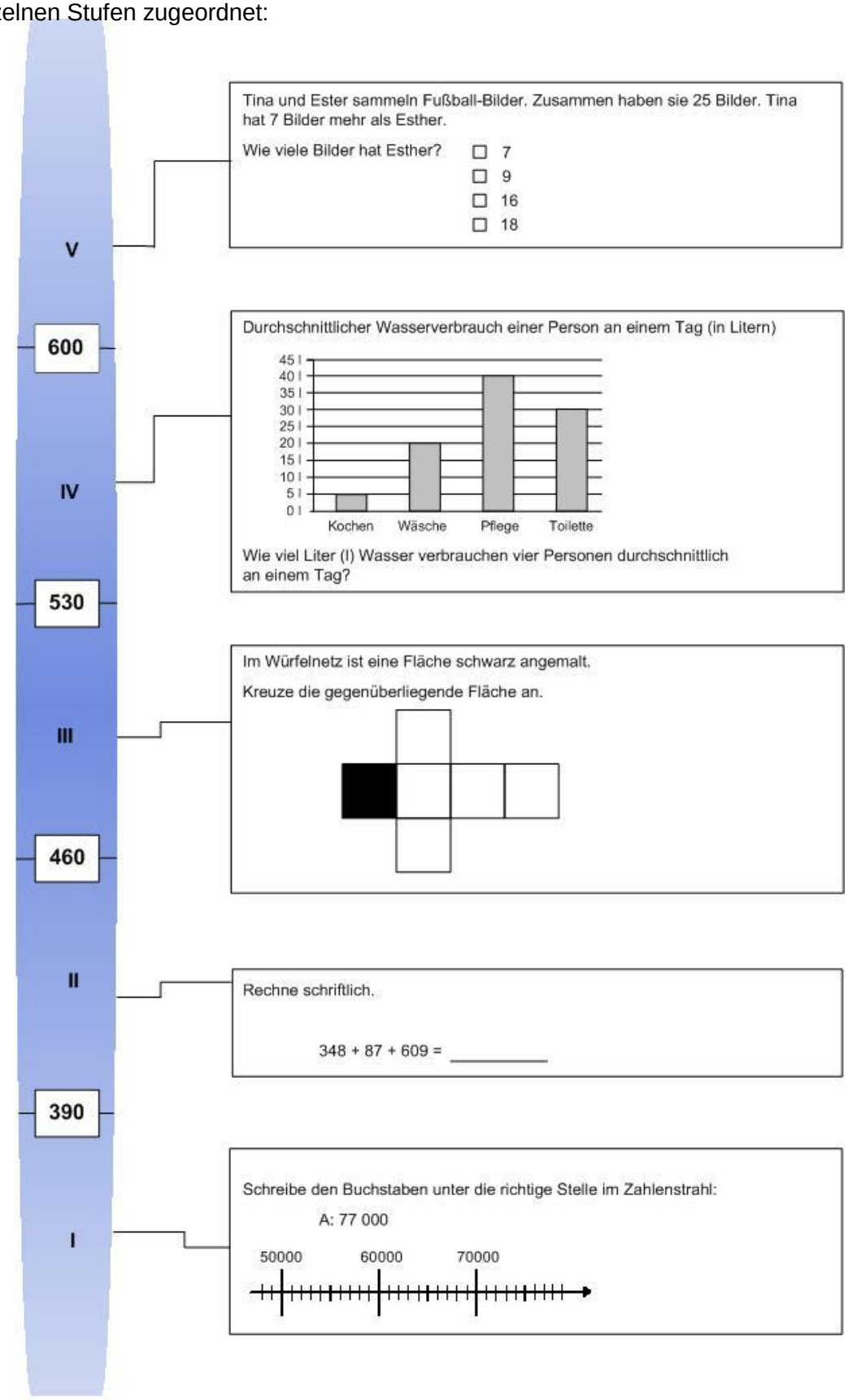
Abbildung 1. Übersicht der Kompetenzstufen aus dem Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule.

Mindeststandard. Als Ausgangswert für die Stufeneinteilungen wurde jeweils das obere Ende von Kompetenzstufe I gewählt, und zwar so, dass alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts nur solche Anforderungen stellen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schülerinnen und Schülern des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss; man spricht hier vom *Mindeststandard* des Bildungsgangs. Schülerinnen und Schüler, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

Regelstandard. Der *Regelstandard*, den die Schülerinnen und Schüler zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schülerinnen und Schüler, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der KMK festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch von sehr schwachen Schülerinnen und Schülern gelöst werden können.

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet:



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben im Fach Mathematik (siehe Seite 14 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm).

Die Leitidee *Zahlen und Operationen*

Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein?

In der Alltagswelt begegnen Kinder schon früh Zahlen in verschiedenen Kontexten. Es ist Aufgabe des Mathematikunterrichts in der Primarstufe, diese Vorerfahrungen aufzugreifen, zu strukturieren und stetig weiterzuentwickeln. Daher spielt der Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen* in der Grundschule eine zentrale Rolle. Er umfasst Kompetenzen zu folgenden Bereichen:

- Zahldarstellungen, Orientierung im Zahlenraum, Zahlvorstellung
- Rechenoperationen verstehen und beherrschen, insbesondere auch die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Operationen zu verstehen
- Anwendung des Rechnens in Kontexten
- Überschlagendes Rechnen und kritisches Prüfen von Ergebnissen

Zahldarstellung, Orientierung im Zahlenraum, Zahlvorstellung

In unserem Kulturkreis werden Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem dargestellt. Deshalb ist ein **tragfähiges Verständnis dieses Stellenwertsystems** grundlegend, sowohl für die gesamte Grundschulzeit als auch für das Verständnis von Zahleigenschaften und Rechenoperationen danach.

In den ersten beiden Jahrgangsstufen lernen die Schülerinnen und Schüler den Zahlenraum bis 100 kennen und sie machen bereits erste Erfahrungen mit den Strukturen des dekadisch aufgebauten Systems. Für ein tragfähiges Verständnis dieses Systems müssen **Bündelung** und **Stellenwert** als die beiden zentralen Prinzipien erkannt werden (Padberg & Benz, 2011, S. 86).

Das bedeutet, dass jede Ziffer einer bestimmten natürlichen Zahl zwei Informationen beinhaltet: Zum einen gibt die Ziffer die Anzahl der Bündel zu einer Bündelungseinheit an. Zum anderen ist die Stellung der Ziffer innerhalb der Zifferndarstellung wichtig, da dadurch die Bündelungseinheit codiert wird. So kann die Ziffer „3“, je nach Stellung im Zahlzeichen, „3E“ (3), „3Z“ (30), „3H“ (300) usw. bedeuten. Die Schülerinnen und Schüler müssen verstehen, dass eine Ziffer je nach Stellung in einer zwei- oder mehrstelligen Zahl für einen anderen Wert steht.

Gerade bezüglich obiger Prinzipien kommt dem Einsatz geeigneter Arbeitsmittel eine wichtige Bedeutung zu. Um das Bündelungsprinzip zu verstehen, bieten sich zunächst unstrukturiertes Material (beispielsweise Steine oder Steckwürfel) an. Bereits in fester Bündelung können Zahlen durch Mehrsystem-Material dargestellt werden. Das Bündeln (bzw. Entbündeln) findet dann im Tauschen Anwendung: z. B. immer 10 Einerwürfel in eine Zehnerstange, 10 Zehnerstangen in eine Hunderterplatte usw.

Solche Bündelungs- und Tauschhandlungen werden parallel dazu immer mittels einer Stellenwerttabelle dokumentiert, um die abstrakte Zifferndarstellung veranschaulichen zu können und die Bedeutung der Stellung der Ziffer herauszuarbeiten. Dabei können auch Plättchen in die Stellenwerttafel gelegt werden und so über den Wert jedes einzelnen Plättchens, je nach Position, nachgedacht werden (ein Plättchen in der Hunderterspalte steht für eine Hunderterplatte, aber ein Plättchen in der Einerspalte steht für einen Einerwürfel).

Um Sicherheit bei der **Orientierung im Zahlenraum** zu gewinnen (*Welche Zahl ist nahe bei 389? Welche von zwei Zahlen ist größer als die andere?*), bietet sich der Zahlenstrahl zur

Veranschaulichung an. Seine großen Vorteile bestehen darin, dass er beliebig erweiterbar ist, Zahlennachbarschaften gut veranschaulicht werden können (z. B.: *Nenne Vorgänger und Nachfolger, benachbarte Zehnerzahlen, Hunderterzahlen*.) und man hier in Abständen denken kann (z. B.: *Welche Zahl liegt in der Mitte von 30 und 70?*). Auch das Tausenderbuch (10 über- bzw. aneinandergelegte 100er-Tafeln) dient als Hilfsmittel zur Orientierung im Zahlenraum und veranschaulicht Zahlbeziehungen. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass jeder Hunderter nach den gleichen Prinzipien aufgebaut ist. Dagegen können mit Hilfe eines Tausenderfelds (10 nebeneinandergelegte Hunderterfelder) vor allem die Zehnerstruktur und eine **Mengenvorstellung** aufgebaut werden.

Rechenoperationen verstehen und beherrschen

Im Bereich *Zahlen und Operationen* ist ein wichtiger Aspekt, die einzelnen Rechenoperationen zu verstehen, deren Zusammenhänge zu begreifen und anwenden zu können.

Grundvorstellungen der Rechenoperationen

Die Addition und die Subtraktion als Umkehroperation sind den Kindern bereits seit Jahrgangsstufe 1 vertraut, da verschiedene Aspekte (z. B. statisch, dynamisch, Hinzufügen, Wegnehmen, Ergänzen) handlungsorientiert erarbeitet wurden.

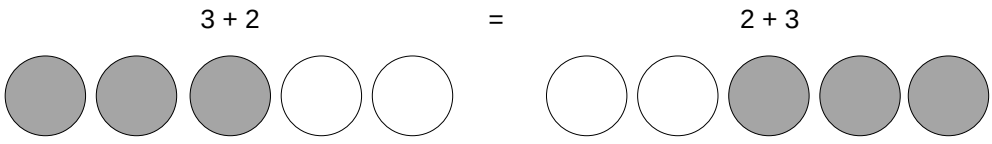
Darauf aufbauend erfolgen die Erarbeitung der Multiplikation und der Division als Umkehroperation. Auch hier ist es wichtig, verschiedene Aspekte zu thematisieren, damit diese von den Kindern mit der neu erlernten Operation in Beziehung gesetzt werden können (zeitlich-sukzessiv, räumlich-simultan, Aufteilen, Verteilen). Nur so entwickelt sich ein umfassendes Operationsverständnis.

Rechengesetze

Rechnenlernen im Sinne einer Kulturtechnik, die sich stetig weiterentwickelt, ist ein Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Dies beinhaltet ein Verstehen und selbst-ständiges Anwenden von Rechenstrategien. Grundlage dafür sind die folgenden Rechengesetze, die mit Hilfe von Material (z. B. Wendeplättchen als Forschermittel) verdeutlicht und verständlich gemacht werden können:

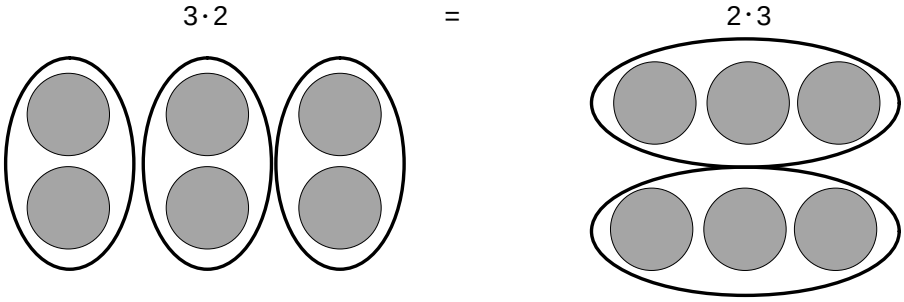
Kommutativgesetz der Addition:

z. B.:



Kommutativgesetz der Multiplikation:

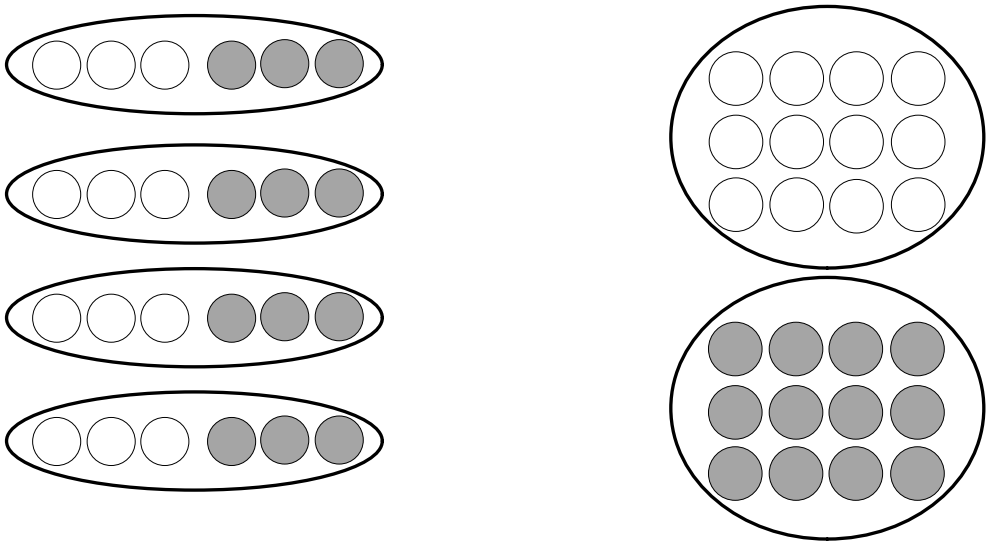
z. B.:



Assoziativgesetz:

z. B.:

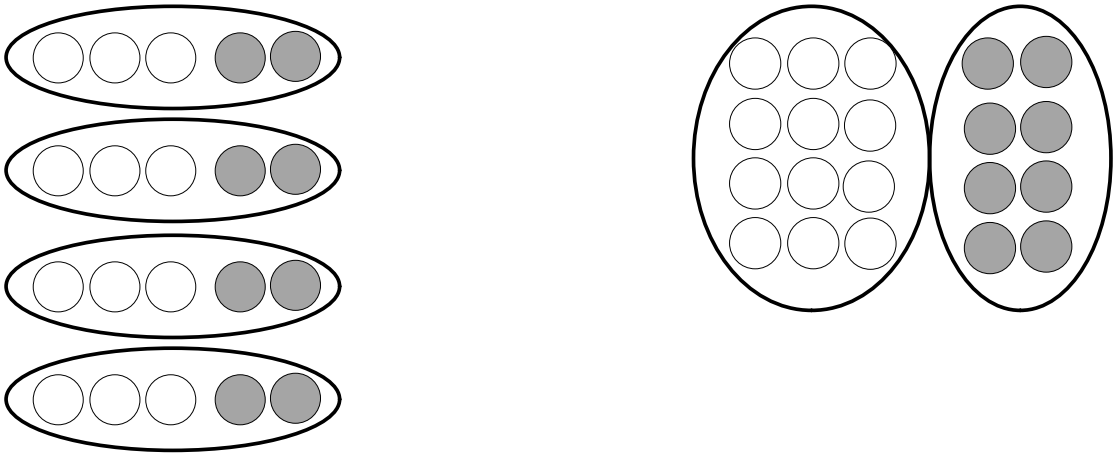
$(2 \cdot 3) \cdot 4$ = $2 \cdot (3 \cdot 4)$



Distributivgesetz:

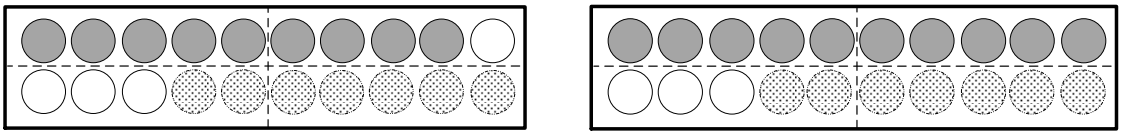
z. B.:

$4 \cdot (3 + 2)$ = $4 \cdot 3 + 4 \cdot 2$



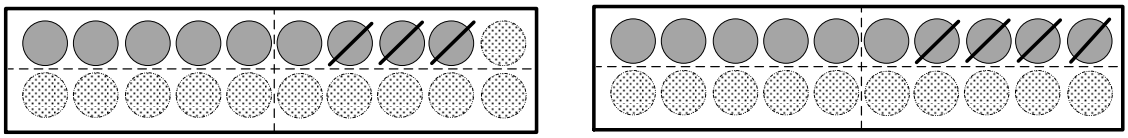
Konstanz der Summe beim gegensinnigen Verändern:

z. B.: $9 + 4$ = $(9 + 1) + (4 - 1)$



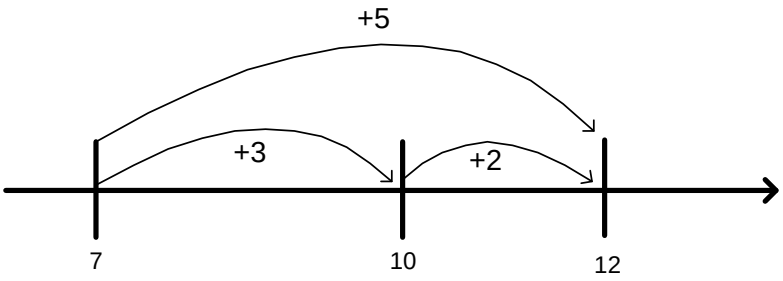
Konstanz der Differenz beim gleichsinnigen Verändern:

z. B.: $9 - 3$ = $(9 + 1) - (3 + 1)$



Rechengesetze werden implizit bei Rechenstrategien angewandt (wie im folgenden Beispiel das Assoziativgesetz) oder sie werden mit Hilfe von Veranschaulichungen einsichtig gemacht. Beim Begründen von Rechenstrategien kann auch der Zahlenstrahl oder der unskalierte Rechenstrich dienlich sein:

$$7+5 = 7+3+2 = 10+2 = 12$$



Im Allgemeinen werden die Rechengesetze *nicht* im Sinne von abstrakten Regeln formal unterrichtet.

Erwerb von Rechenstrategien

Mentale Bilder und Handlungen zu obigen Rechengesetzen und ein gesichertes Stellenwertverständnis sind Bedingungen für flexibles, situationsbezogenes Anwenden von Rechenstrategien.

Einfache Aufgaben (Eins-plus-Eins, Ein-mal-Eins) sollten von Schülerinnen und Schülern gegen Ende der Jahrgangsstufe 2 bzw. 4 gedächtnismäßig beherrscht werden, d. h. automatisiert sein. Komplexere Aufgaben werden schrittweise im Kopf, halbschriftlich oder später auch schriftlich gelöst.

Beim gestützten Kopfrechen (auch *halbschriftliches Rechnen* genannt), bei dem Teilschritte oder Zwischenergebnisse notiert werden, gibt es verschiedene Lösungswege und keine vorgegebenen Notationsformen. Die Schülerinnen und Schüler nutzen hierbei verschiedene Rechenstrategien.

Idealtypisch können zwei Hauptstrategien unterschieden werden, die allerdings bei den vier Rechenoperationen nicht gleich effizient eingesetzt werden können (Padberg & Benz, 2011, S. 189 f):

- *Zerlegungsstrategien*: Solche Strategien sind das stellenweise und das schrittweise Rechnen. Beim stellenweisen Rechnen werden beide zu bearbeitenden Zahlen stellengerecht zerlegt. Beim schrittweisen Rechnen wird i. d. R. eine der zu bearbeitenden Zahlen so zerlegt, wie es für das Kind zum Lösen der Aufgabe am hilfreichsten erscheint. Meist nutzt das Kind hierbei auswendig gewusste Aufgaben, die zuerst gelöst werden und dann wird „der Rest“ ergänzt oder abgezogen. Hierbei können Verdopplungs- oder Halbierungsaufgaben genutzt werden, Quadrat- oder Kernaufgaben, die Kraft der Fünf, die Nähe zum Zehner und weitere.
- *Veränderungsstrategien*: Bei diesen Strategien wird das Zahlenmaterial der Aufgabe vor dem eigentlichen Rechnen verändert, um eine Aufgabe

(oder Aufgabenteile) zu erhalten, die subjektiv leichter lösbar ist. Die häufigsten Veränderungsstrategien sind das gleich- und das gegensinnige Verändern.

Um dem Anspruch gerecht zu werden, Aufgaben sicher und flexibel im Kopf oder halbschriftlich zu lösen, „ist vielfältiges Wissen über Zahlen und Zahlbeziehungen, über Verknüpfungsmöglichkeiten in Verbindung mit Rechengesetzen Voraussetzung“ (Walther, van den Heuvel-Panhuizen, Granzer & Köller, 2012, S. 70).

Anwendung des Rechnens in Kontexten

Ob Kinder ein Verständnis der Rechenoperationen erworben haben, zeigt sich insbesondere darin, dass sie die verschiedenen Operationen sachgerecht in kontextbasierten Aufgabenstellungen anwenden können. Solche Aufgabenstellungen können u. a. in Form von Bildern, Hörspielen, Sachtexten oder diskontinuierlichen Texten (z. B. Tabellen, Aushängen zu Öffnungszeiten) gegeben sein. Sie können auch geometrische Themen aufgreifen.

Entscheidend ist, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung zur dargelegten Sachsituation entwickeln, sie in den passenden mathematischen Kontext übersetzen, mit den ihnen bekannten mathematischen Mitteln (Rechenstrategien, -gesetze etc.) lösen, auf die Sachsituation rückbeziehen und auf Plausibilität überprüfen.

Überschlagendes Rechnen und kritisches Überprüfen von Ergebnissen

Die schriftlichen Verfahren der vier Rechenoperationen werden ab Jahrgangsstufe 3 mit Hilfe von Algorithmen erlernt und geübt. Für geläufiges und routiniertes Rechnen ist das sinnvoll. Dennoch wird diesen schriftlichen Rechenverfahren keine so große Bedeutung mehr beigemessen wie früher.

- Zum einen ist es für ein anschlussfähiges Weiterlernen wichtig, Zahlbeziehungen zu verstehen und flexibel nutzen zu können (wie beispielsweise beim gestützten Kopfrechnen). Diese Kompetenz wird beim stellenweisen, schriftlichen Rechnen nicht mehr aufgebaut.
- Zum anderen verlieren die schriftlichen Rechenverfahren auf Grund des Einsatzes von Taschenrechnern und weiteren digitalen Geräten in der heutigen Zeit zunehmend an Bedeutung.

Da jedoch nicht nur das schriftliche Rechnen, sondern auch das Rechnen mit digitalen Instrumenten dazu führen kann, dass die Ergebnisse nicht von einer Vorstellung der richtigen Größenordnung begleitet sind, ist es umso wichtiger, mittels Überschlags-rechnungen Ergebnisse auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen. Generell sollte mit jeder Lösung einer Aufgabe (v. a. auch bei Sachaufgaben) die kritische Ergebnisüberprüfung auf Plausibilität (*Kann das stimmen?*) einhergehen.

Aufgaben Zahlen und Operationen

Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen

Aufgabe 29 in Testheft C

Wie heißt die größte dreistellige Zahl, die drei verschiedene Ziffern hat?

Die Zahl heißt _____ .

Auswertung

RICHTIG	987

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	IV
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a)

Aufgabe 30 in Testheft C

Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 200 und 800? _____

Auswertung

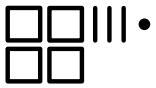
RICHTIG	500

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	IV
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c)

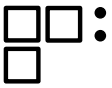
Aufgabe 31 in Testheft B

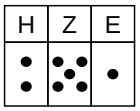
Hier sind Zahlen unterschiedlich dargestellt. Schreibe sie auf.



4H5Z

700 + 50





431 _____ _____ _____ _____

Auswertung

RICHTIG	[431,] 450, 750, 302, 251

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe Global	III
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a); Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b)

Aufgabenbezogener Kommentar

Das grundlegende Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems und der sichere Umgang mit den darauf basierenden Darstellungsweisen für Zahlen sind Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben 29 in Testheft C und Aufgabe 31 in Testheft B.

Zur Ermittlung der Lösung von Aufgabe 29 in Testheft C sind insbesondere folgende Fähigkeiten erforderlich:

Voraussetzung: Begriffe verstehen und interpretieren

- Aufgabenverständnis: Kenntnis der verwendeten Begrifflichkeiten: „größte“, „dreistellige Zahl“, „drei verschiedene Ziffern“
- Interpretationssicherheit zu den Begriffen bzw. im Umgang mit deren Kombination.
    - *„größte“ und „dreistellige Zahl“*: Wissen, dass im Stellenwertsystem der Wert einer Ziffer von der Position innerhalb der Zahl abhängt und erkennen, dass hier je eine Hunderter-, eine Zehner- und eine Einerziffer zu einer Zahl des höchstmöglichen Wertes kombiniert werden müssen.
    - *„größte“ und „drei verschiedene Ziffern“*: Wissen, dass die Ziffern 0–9 zur Verfügung stehen und zusätzlich erkennen, dass hier genau die drei größten Ziffern 7, 8 und 9 zu verwenden sind.
    - *„größte dreistellige Zahl“*: Erkennen, dass auf die Höhe der entstehenden Zahl die Hunderterziffer die größte, die Einerziffer die kleinste Auswirkung hat und daher die drei gewählten Ziffern in absteigender Reihenfolge zu verwenden sind.

Unterschiedliche Darstellungsformen

Aufgabe 31 in Testheft B erfordert neben der grundsätzlichen Durchdringung des Stellenwertsystems und des Bündelungsgedankens die Fähigkeit, unterschiedliche Darstellungsformen (u.a. Mehrsystem-Material, Stellenwerttafel) richtig zu interpretieren und diese in die symbolische Darstellung durch Ziffern zu überführen.

Grundlegende Bedeutung kommt dabei der konsequenten Identifikation der jeweiligen Anzahl der enthaltenen Hunderter, Zehner und Einer zu – insbesondere, wenn eine der Stellen mit einer „Null“ zu besetzen ist.

In Aufgabe 30 in Testheft C müssen die Schülerinnen und Schüler eine Strategie zur Findung des arithmetischen Mittels zweier Zahlen kennen oder entwickeln. Hilfreich ist es dabei, wenn beim Kind eine Vorstellung der Verortung der beiden „Randzahlen“ auf dem Zahlenstrahl vorhanden ist. Mögliche Lösungswege:

- Die Summe der beiden Grenzzahlen wird halbiert. Diese schnelle Möglichkeit zur Berechnung kennen viele Kinder aus dem Unterricht; nur wenige können jedoch i.d.R. begründen, warum sie so zum Mittelwert gelangen.
- Die Differenz der beiden Grenzzahlen wird halbiert und zur kleineren Zahl addiert (oder von der größeren subtrahiert).
- Ein weiterer Weg ist die schrittweise Annäherung an den Mittelwert „von unten und von oben“ durch (mehrfache) Addition/Subtraktion derselben Zahl. Diese Möglichkeit wird von Kindern praktiziert, wenn keine andere Strategie bekannt ist.

Mögliche Schwierigkeiten

Schwierigkeiten entstehen bei Aufgabe 29 in Testheft C insbesondere aufgrund der Vielzahl der zu verstehenden und durchweg einzuhaltenden Bedingungen. Dies sei anhand einiger möglicher daraus resultierender Fehler aufgezeigt:

Fehlerhafte Lösungsangabe	**(Möglicher) Grund**
Wie heißt die größte dreistellige Zahl, die drei verschiedene Ziffern hat? Die Zahl heißt 999. Wie heißt die größte dreistellige Zahl, die drei verschiedene Ziffern hat? Die Zahl heißt 989.	Nichtbeachtung der Vorgabe *„verschiedene Ziffern“* bzw. *„drei verschiedene Ziffern“*
Wie heißt die größte dreistellige Zahl, die drei verschiedene Ziffern hat? Die Zahl heißt 789. Wie heißt die größte dreistellige Zahl, die drei verschiedene Ziffern hat? Die Zahl heißt 916.	Nicht erkannt, dass die Ziffern (durchgängig) in *absteigender* Größe anzuordnen sind, bzw. Bedeutungszumessung ausschließlich zur Hunderterstelle.

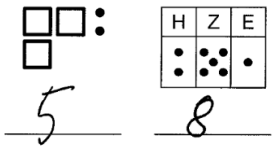
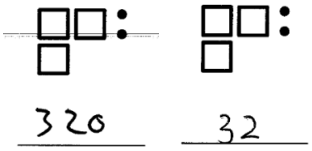
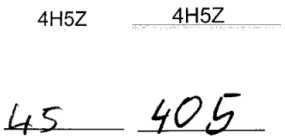
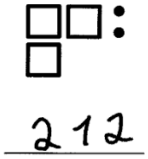
Wie heißt die größte dreistellige Zahl, die drei verschiedene Ziffern hat? Die Zahl heißt 99. Wie heißt die größte dreistellige Zahl, die drei verschiedene Ziffern hat? Die Zahl heißt 3000.	U.a. Nichtbeachtung der Vorgabe *„dreistellig“.*
Wie heißt die größte dreistellige Zahl, die drei verschiedene Ziffern hat? Die Zahl heißt 100.	Fokussierung nur auf einen Aspekt *(„dreistellig“)*.
Wie heißt die größte dreistellige Zahl, die drei verschiedene Ziffern hat? Die Zahl heißt 10 10 10.	U.a. Unsicherheit bei den Begriffen „Ziffern“/„dreistellig“ (dreifache Verwendung d. Zahl „10“).
Wie heißt die größte dreistellige Zahl, die drei verschiedene Ziffern hat? Die Zahl heißt dreieche	Grundsätzliche Überforderung mit einzelnen Begrifflichkeiten der Aufgabenstellung.

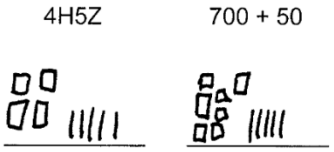
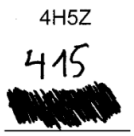
Zur Bearbeitung von Aufgabe 30 in Testheft C wird eine tragende Lösungsstrategie benötigt. Fehlt diese oder wird sie unvollständig beschritten, können sich u.a. diese Fehler ergeben:

Fehlerhafte Lösungsangabe	**(Möglicher) Grund**
a) Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 200 und 800? 400	Die größere Zahl wurde halbiert, also die Mitte zwischen 0 (anstelle 200) und dieser Zahl berechnet.
a) Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 200 und 800? 300 b) Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 300 und 520? 110	Unvollständig beschrittener Lösungsweg (halbierte Differenz wurde als Lösung notiert, nicht addiert).
a) Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 200 und 800? 1000 b) Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 300 und 520? 820	Die Grenzzahlen wurden lediglich addiert. Evtl. unvollständig beschrittener Lösungsweg.

b) Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 300 und 520? 220	Fehlinterpretation der Aufgabe: Die Differenz wurde errechnet.
a) Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 200 und 800? 100, 400 b) Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 300 und 520? 150, 260	Fehlinterpretation der Aufgabe: Die Grenzzahlen werden jeweils einzeln halbiert.
a) Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 200 und 800? 250 b) Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen 300 und 520? 350	Es wurde jeweils 50 addiert. Möglicherweise aufgrund der Gewohnheit, die Mitte zwischen benachbarten Hundertern so zu errechnen.

Aufgabe 31 in Testheft B erfordert den Umgang mit mehreren verschiedenen Darstellungsformen. Bei deren Interpretation können u.a. folgende Schwierigkeiten auftreten:

Fehlerhafte Lösungsangabe	**(Möglicher) Grund**
	Stellenwertsystematik nicht erkannt; reines Abzählen der Anzahl der Repräsentanten ohne Berücksichtigung des Bedeutungsunterschieds.
	Fehlinterpretation der Systemblöcke als *Hunderter und Zehner (links)* bzw. als *Zehner und Einer (rechts)*.
	Nichtbeachtung der Nullstelle bei den Einern (links) bzw. Angabe der Nullstelle bei den Zehnern anstelle bei den Einern (rechts).
	*„Spaltenweises Lesen“* als 2H, 1Z und 2E anstelle konsequenter Zuordnung der jeweiligen Symbole zu einem Stellenwert unter Beachtung der Nullstelle bei den Zehnern.

	Fehlinterpretation der Aufgabenstellung.
	„Lesen“ der gegebenen Darstellung „4H5Z“ als „Vier-Hundert-Fünf-Zehn“.

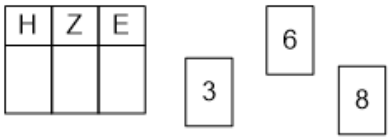
Anregungen für den Unterricht

Übungen zum Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems

Um das *Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems* bei den Kindern weiterzuentwickeln bzw. zu sichern kann eine Auswahl der folgenden grundlegenden, vertiefenden oder weiterführenden Übungen hierzu umgesetzt werden:

Stellenwerttafel und Ziffernkärtchen

Stellenwerttafel



Zahlen finden

- „Bilde mit den Kärtchen die größtmögliche (kleinstmögliche) dreistellige Zahl.“
- „Bilde alle dreistelligen Zahlen, die man mit diesen Kärtchen legen kann.“
- „Lege eine Zahl, die möglichst nah an 888 ist.“
- „Schreibe die gelegten Zahlen so auf: 800 + 60 + 3 = 863.“

Spiel „Hohe (niedrige) Hausnummern“

Benötigt werden: 3 Würfel, 1 Stellenwerttafel und 1 Stift pro Kind

Das erste Kind würfelt mit allen Würfeln gleichzeitig und trägt die erhaltenen Ziffern so in seine Stellenwerttafel ein, dass eine möglichst große (kleine) Zahl entsteht. Das nächste Kind ist an der Reihe. Es gewinnt das Kind die Runde, das die höchste (niedrigste) Zahl bilden konnte.

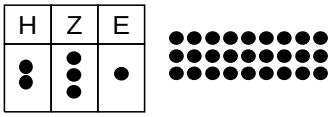
Zahlenrätsel

Partnerarbeit zu dreistelligen Zahlen: Kinder stellen sich gegenseitig „Rätsel“

- „Meine Zahl ist die größte (kleinste) mit einer 2 (3,7,5, …) hinten (vorne, in der Mitte).“
- „Meine Zahl wächst von Ziffer zu Ziffer um 2 (3, 4, …).“
- „Meine Zahl hat drei gleiche Ziffern, die zusammen 6 (7, 15, …) ergeben.“ (→ Kommunizieren)

Der variantenreiche *Umgang mit verschiedenen Darstellungsformen* von Zahlen sichert und vertieft die Struktur des dezimalen Stellenwertsystems.

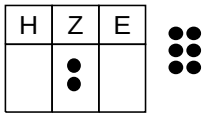
Stellenwerttafel mit Legeplättchen



Die Arbeit mit der Stellenwerttafel und Legeplättchen sowie auch den Mehrsystemblöcken bietet, neben der Möglichkeit ein *Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems* aufzubauen und zu vertiefen, zahlreiche Anlässe, allgemeine mathematische Kompetenzen anzusprechen und zu entwickeln.

Mögliche (exemplarische) Aufgabenstellungen:

- „Lege die Zahl 817." (→ Darstellen)
- „Lege ein (zwei, drei…) Plättchen dazu/Nimm ein (zwei, drei…) Plättchen weg. Welche Zahlen können entstehen?"
- „Erkläre deinem Partner: Wie gehst du vor, um die Zahl möglichst groß (klein) zu machen?" (→ Kommunizieren)
- „Welches ist die höchste Zahl, die du mit 8 Plättchen legen kannst? Begründe." (→ Argumentieren)
- „Lege doppelt so viele Einer wie Zehner und doppelt so viele Zehner wie Hunderter. Welche Zahlen können entstehen? Warum kann es keine weiteren geben?" (→ Argumentieren)
- Hier sollen noch 6 Plättchen hinzugefügt werden. Welches ist die kleinste dreistellige Zahl, die man legen kann?"



Mehrsystem-Material

Mehrsystem-Material

- „Welche Zahl wurde hier gelegt?"

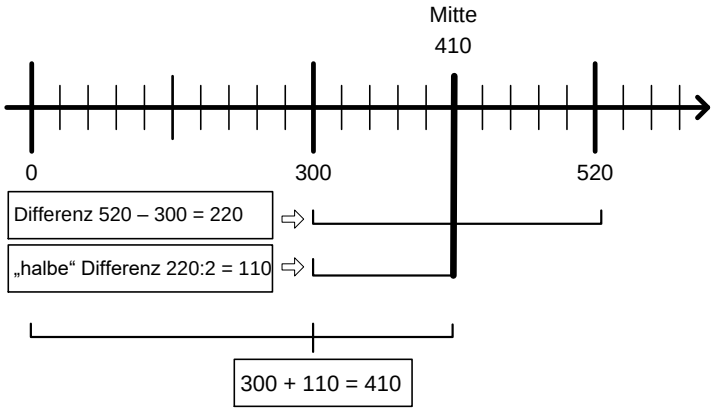
(Hunderter) (Zehner) (Einer)

- Partnerarbeit:
  Ein Kind nennt eine Zahl, das andere Kind legt die Zahl.
  Ein Kind legt eine Zahl, das andere nennt sie.
- Legen einer Zahl mit Mehrsystem-Material, Eintragen der entsprechenden Ziffern in eine Stellenwerttafel. Durch das Legen/Schreiben einer Zahl auf verschiedene Arten (→ Darstellen) wird der Transfer und die Festigung erworbenen Wissens ermöglicht.

Verschiedene Herangehensweisen bei Aufgabe 30 in Testheft C zur Ermittlung der Mitte zweier Zahlen können im Unterricht thematisiert und gemeinsam beleuchtet werden. (→ Kommunizieren, → Argumentieren)

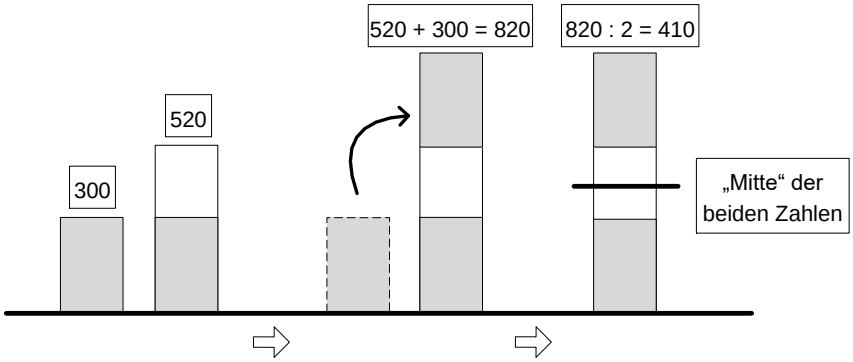
Strategie 1:

Die Differenz der beiden Grenzzahlen wird halbiert und zur kleineren Zahl addiert. Dies kann z. B. anhand eines Zahlenstrahls visualisiert werden:



Strategie 2:

Mit stärkeren Schülerinnen und Schülern kann differenzierend auch eine vereinfachte „Erklärung“ für die Regel erarbeitet werden, dass zur Ermittlung des Mittelwerts einfach die Summe der beiden Zahlen halbiert werden kann:



Arbeit am Zahlenstrahl

Zahlenstrahl

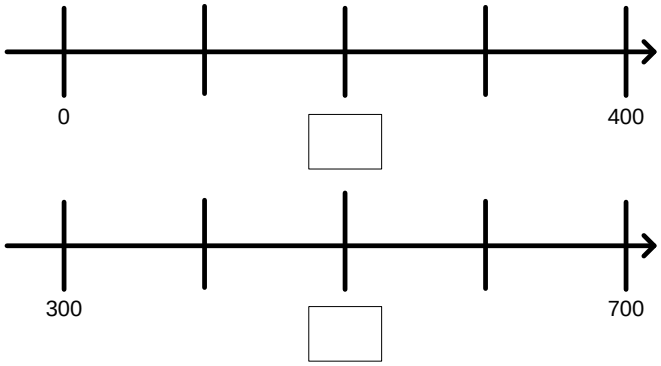
Mögliche *(exemplarische) Aufgabenstellungen* an Zahlenstrahlausschnitten:

Um *Relationen zwischen verschiedenen Zahlen* zu erkennen und S*trategien* hierfür entwickeln zu können, können folgende, aufeinander aufbauende Übungen eine Unterstützung sein.

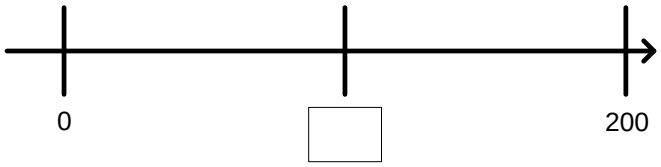
Hierbei ist es unabdingbar, im Laufe der Übungen Zahlenstrahlausschnitte zu beleuchten, die über der Zahl 100 angesiedelt sind. Damit kann der Grundproblematik vieler Kinder entgegengewirkt werden, die Zahlen von 0 aus zu betrachten.

Mögliche *(exemplarische)* Aufgabenstellungen an Zahlenstrahlausschnitten:

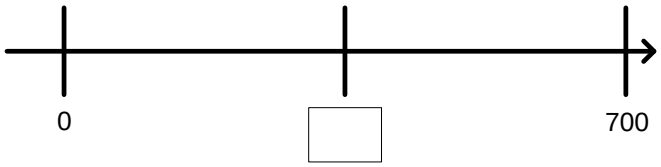
„Zähle in Hunderterschritten und trage die fehlende Zahl ins Kästchen ein.“



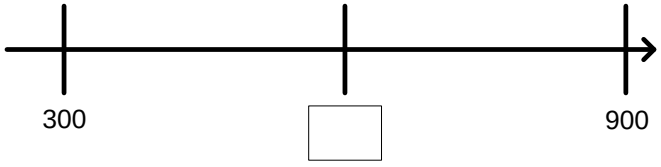
„Welche Zahl liegt in der Mitte? Trage sie ein. Begründe.“ (→ Argumentieren)



„Welche Zahl liegt in der Mitte? Trage sie ein. *Begründe.*“ (→ Argumentieren)



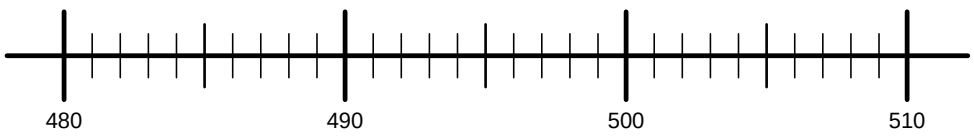
„Welche Zahl liegt in der Mitte? Trage sie ein! *Begründe.*“ (→ Argumentieren)



Übungen wie „Welche Zahl liegt in der Mitte?“ können ebenso gut in Partnerarbeit an einem Zahlenstrahl bis 1 000 stattfinden. Die Lehrkraft stellt Aufgabenkarten mit Lösung, gestaffelt nach Schwierigkeitsgrad, zu jedem Übungsformat bereit. Ein Kind zieht eine Karte und stellt die Aufgabe, das andere löst.

Eine weitere Möglichkeit, um das Verständnis für die Zahlbeziehungen am Zahlenstrahl auf- bzw. auszubauen, wäre folgendes Übungsformat (Hengartner, Hirt, Wälti & Primarschulteam Lupsingen. 2006):

Ausschnitt aus einem Zahlenstrahl bis 1 000:



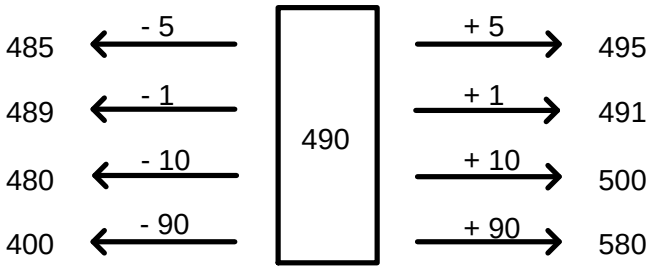
Beispiel:

492 ist gleich weit weg von 490 wie von 494

von 491 wie von 493

von 482 wie von 502

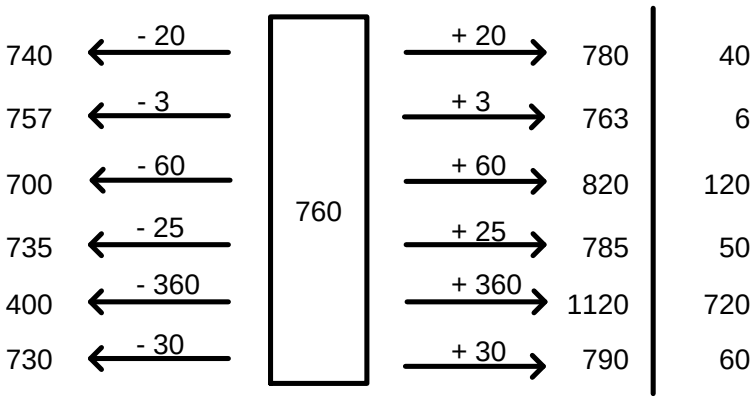
von 480 wie von 504



- „Wähle nun 490.
  485 und 495 sind gleich weit weg.
  Suche und notiere weitere Zahlenpaare,
  die gleich weit weg sind von 490.“

- „Wähle nun selbst eine Zahl zwischen 100 und 900 und schreibe sie ins Kästchen. Schreibe immer zwei Zahlen auf, die gleich weit von deiner gewählten Zahl weg sind. Nutze einfache und schwierige Beispiele.“

- „Bestimme nun jeweils den Unterschied (Differenz) zwischen der kleineren und der größeren Zahl. Schreibe die Unterschiede (Differenz) rechts neben die Beispiele:“



- „Addiere eine kleinere Zahl mit der dazugehörigen größeren Zahl und vergleiche mit der mittleren Zahl.“
- Was fällt dir auf? Besprich dich mit einem Partner. (→ Kommunizieren)
- Warum ist das so? Begründe. (→ Argumentieren)

Rechnen

Aufgabe 24 in Testheft B

Ergänze.

370 + _____ = 1000

Auswertung

RICHTIG	630

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe Global	I
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Grundlegende Fertigkeiten (0)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.c)

Aufgabe 25 in Testheft C

Ergänze.

a) _____ + 340 = 600

b) _____ – 340 = 600

Auswertung

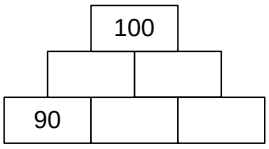
RICHTIG	Für die Lösung der Aufgabe müssen beide Ergebnisse richtig sein. a) 260 b) 940

Aufgabenmerkmale

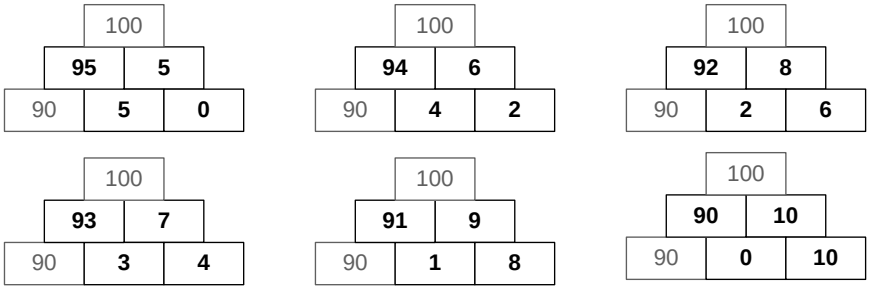
Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe Global	III
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren (1.2.g)

Aufgabe 27 in Testheft B

Hier wird addiert. Finde eine Lösung und setze ein.



Auswertung

RICHTIG	Eine der folgenden Möglichkeiten: 

Aufgabenmerkmale

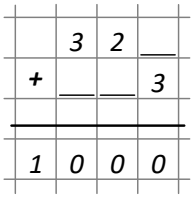
Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	II
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen (1.2.e)

Addition/Subtraktion

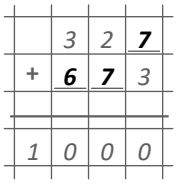
Addition/Subtraktion

Aufgabe 27 in Testheft C

Ergänze die fehlenden Ziffern.



Auswertung

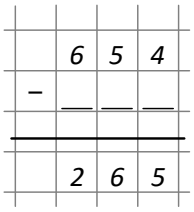
RICHTIG	vgl. Lösungsgrafik: 

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	III
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.f)

Aufgabe 32 in Testheft C

Ergänze.



Auswertung

RICHTIG	389

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	V
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.f)

Multiplikation/Division

Aufgabe 30 in Testheft B und Aufgabe 28 in Testheft C

Schreibe eine Zahl auf, die durch 2 **und** auch durch 5 teilbar ist.

_____

Auswertung

RICHTIG	alle Vielfachen von 10, z. B.: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	II
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2); mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a)

Aufgabe 26 in Testheft B

7 · 8

Anna beginnt so: *7 · 7 = 49*

Was muss sie dann noch rechnen? Kreuze an.

☐	☐	☐	☐
+ 8	+ 7	– 8	– 7

Auswertung

RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	I
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.c); verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren (1.2.d)

Aufgabe 33 in Testheft B

Finde Aufgaben.

_____ : _____ = 3

_____ : _____ = 6

_____ : _____ = 9

Auswertung

RICHTIG	alle Divisions-Aufgaben mit dem korrekten Quotienten, z. B. 18:6=3; 12:2=6, 18:2=9

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	II
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b)

Aufgabenbezogener Kommentar

Rechenaufgaben können unter anderem mit folgenden Methoden gelöst werden (Benz, 2005; Schulz, 2014, S. 109–110):

- Kopfrechnen, bei dem ohne Notation von Zwischenschritten oder Zwischenlösungen die Lösung einer Aufgabe im Kopf geschieht — Kopfrechnen
- Werden während des Rechnens Notizen zum Rechenweg gemacht, zum Beispiel zur Entlastung des Gedächtnisses oder um seinen Gedankengang zu strukturieren, handelt es sich um gestütztes Kopfrechnen (auch als halbschriftliches Rechnen bezeichnet). — halbschriftliches Rechnen
- Schriftliches Rechnen beruht auf konventionalisierten Verfahren (Algorithmen) und das Ergebnis wird auf der Grundlage des Stellenwertsystems ziffernweise ermittelt. — schriftliches Rechnen

Bei den Aufgaben 24 in Testheft B, 25 in Testheft C, 27 in Testheft B, 30 in Testheft B sowie 28 in Testheft C, 26 in Testheft B und 33 in Testheft B steht das (gestützte) Kopfrechnen und die entsprechenden Voraussetzungen für schnelles und aufgabenangemessenes Rechnen im Vordergrund.

Die Aufgaben 27 in Testheft C und 32 in Testheft C prüfen, ob die Regeln des schriftlichen Addierens und Subtrahierens angewendet werden können.

Aufgaben zu Addition und Subtraktion

In Aufgabe 24 in Testheft B soll eine Zahl auf den Tausender ergänzt werden. Dies kann durch das Ergänzen auf den benachbarten Hunderter und dann auf die Tausend erfolgen bzw. durch andere Formen des schrittweisen Rechnens. Eine weitere Möglichkeit zur Lösung der Aufgabe ist das Subtrahieren: Schülerinnen und Schüler können die Umkehraufgabe 1 000 - 370 lösen, um die fehlende Differenz zu ermitteln.

Bei der Aufgabe 25 in Testheft C ergibt sich eine Herausforderung durch das Fehlen des ersten (und nicht des zweiten) Summanden. Auch diese Aufgabe könnte zum Beispiel über die Umkehraufgabe gelöst werden. Die Voraussetzung dazu ist – wie bei Aufgabe 24 in Testheft B– ein Verständnis des mathematischen Zusammenhangs der Operationen Addition und Subtraktion.

Bei Aufgabe 27 in Testheft B muss – trotz des erklärenden Zusatzes „Hier wird addiert“ – das Aufgabenformat bekannt sein. Es gibt mehrere korrekte Lösungsmöglichkeiten. Die Aufgabe ist über systematisches Probieren zu lösen. Dabei sind zwei Lösungsansätze möglich:

- Beginnend bei der Zielzahl 100 werden mögliche Zerlegungen erprobt. Das Herstellen eines mathematischen Bezugs zur Eckzahl 90 schränkt dabei mögliche Lösungen ein.
- Beginnend bei der Eckzahl 90 wird eine Zahl addiert, um zur Zielzahl 100 zu gelangen.

Ist den Schülerinnen und Schülern das Prinzip der Zahlenmauern bereits bekannt, können sie die Aufgabe auch unter Nutzung der Gesetzmäßigkeiten des Formats lösen: Bei einer dreistufigen Zahlenmauer geht die Mittelzahl zweifach in die Zielzahl ein, die beiden Außenzahlen gehen jeweils einfach in die Zielzahl ein. Für einen möglichen Lösungsweg kann das heißen: Wenn die Mittelzahl mit der Null besetzt wird, muss die rechte Außenzahl mit 10 besetzt werden. Oder: Die Mittelzahl darf nicht größer als 5 sein – denn dann wäre die 100 schon erreicht.

Die Aufgaben 27 in Testheft C und 32 in Testheft C erfordern das Verstehen und geläufige Ausführen der schriftlichen Addition und Subtraktion. Bei beiden Aufgaben spielt die Beachtung des Übertrags eine wichtige Rolle, um zu einer korrekten Lösung zu gelangen.

Aufgabe 32 in Testheft C bietet die Möglichkeit, mit einer Umkehraufgabe zu einer Lösung zu gelangen.

Aufgaben zu Multiplikation und Division

Um die Aufgaben 30 in Testheft B sowie 28 in Testheft C und 33 in Testheft B lösen zu können, muss das Kind den Zusammenhang zwischen den Rechenoperationen Multiplikation und Division verstanden haben.

In der Aufgabe 30 in Testheft B sowie 28 in Testheft B wird ein Vielfaches von 2 **und** 5 gesucht. Sie erfordert ein Verständnis des Begriffes „teilbar“ und das Prüfen der Teilbarkeit durch 2, durch 5 und durch 2 UND 5, zum Beispiel durch die Endstellenregel.

- Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.
- Alle Zahlen mit der Endziffer 0 oder 5 sind durch 5 teilbar, daher sind alle Zehnerzahlen durch 2 und 5 teilbar.

Zur Lösung der Aufgabe 33 in Testheft B muss das „Kleine Einmaleins“ gesichert sein. Zudem müssen die Kinder verstanden haben, dass es auch bei der Division viele verschiedene Möglichkeiten gibt, eine bestimmte Ergebniszahl zu erreichen.

Bei Aufgabe 26 in Testheft B muss das Kind den mathematischen Bezug zu einer benachbarten Einmaleinsaufgabe herstellen. Dabei muss es beachten, zu welcher Einmaleinsreihe die jeweilige Aufgabe gehört und welcher Faktor hier erhöht wird: „Ist es einmal die 7 oder einmal die 8 mehr?“. Wichtig hierbei ist die Einsicht in die Kommutativität bei der Multiplikation: Für diesen Rechenweg wird die Siebener-Reihe genutzt und nicht die Achterreihe. Die gegebenen Lösungsmöglichkeiten beziehen sich sowohl auf den ersten Faktor (+/-7) als auch auf den zweiten Faktor (+/-8).

Mögliche Schwierigkeiten

Aufgabe 24 in Testheft B:

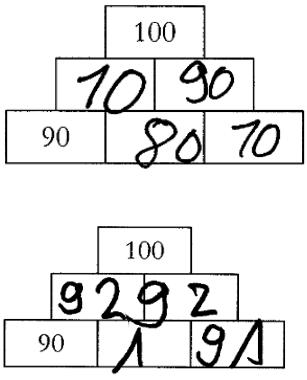
370 + 730 = 1000	Es wird richtig zum nächsten Hunderter ergänzt, beim Ergänzen auf Tausend wird dann aber der ergänzte Hunderter nicht berücksichtigt. Oder: Ziffernweises Ergänzen.
370 + 30 = 1000 370 + 230 = 1000 370 + 430 = 1000	Es wird richtig zum nächsten Hunderter ergänzt, dann aber falsch oder gar nicht auf den Tausender ergänzt.

Aufgabe 25 in Testheft C:

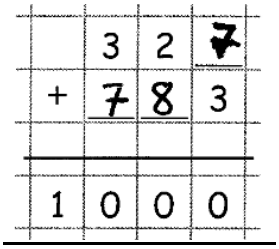
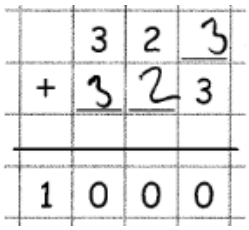
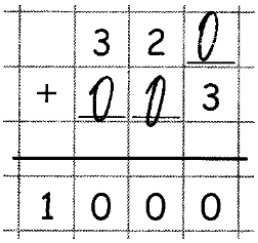
Ergänze. a) 260 + 340 = 600 b) 260 – 340 = 600	Die Unterschiedlichkeit des Rechenzeichens wird nicht gesehen.
Ergänze. a) 260 + 340 = 600 b) 960 – 340 = 600	Es wird auch bei b) zunächst additiv auf den Hunderter ergänzt und dann werden die Hunderter unabhängig davon betrachtet.

Aufgabe 27 in Testheft B:

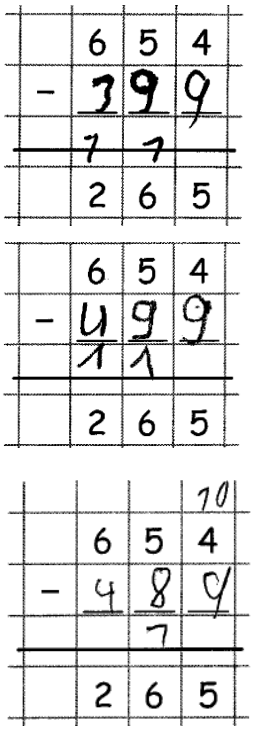
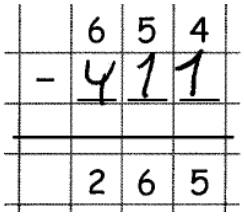
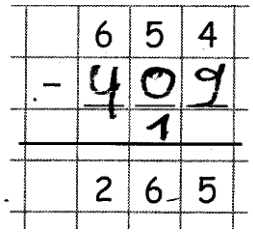
Bei dieser Aufgabe muss das Aufgabenformat „Rechenmauern“ bekannt sein, da keine gelöste Rechenmauer als Beispiel gegeben ist. Ist das Format nicht geläufig, kann das Aufgabenformat nicht erschlossen und somit auch nicht gelöst werden.

	Das Bildungsprinzip einer Zahlenmauer wurde in vielen Teilen der Mauer richtig angewendet – aber nicht konsequent.

Aufgabe 27 in Testheft C:

	Bei der Addition werden die Überträge an der Zehner- bzw. Hunderterstelle nicht berücksichtigt.
	Es wird stellenweise subtrahiert, nicht addiert.
	Die Nullen aus dem Ergebnis werden als Platzhalter eingetragen. Grund hierfür kann eine Übergeneralisierung der Rolle der Null bei der Multiplikation sein: Immer wenn mit Null gerechnet wird, kommt Null heraus.

Aufgabe 32 in Testheft C:

	Überträge fehlen, bzw. werden nicht oder nur teilweise berücksichtigt.
	Es wird teilweise stellenweise addiert, nicht subtrahiert.
	

Aufgabe 30 in Testheft B sowie 28 in Testheft C:

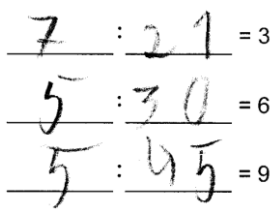
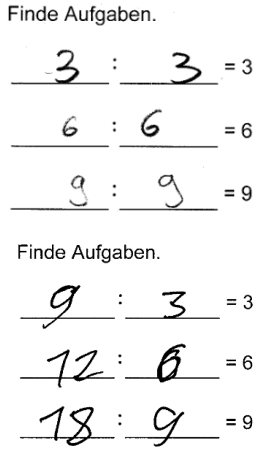
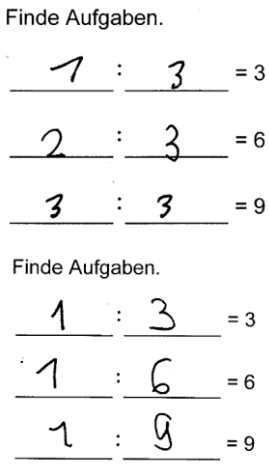
Mögliche Schwierigkeiten können entstehen, wenn der Begriff „teilbar“ nicht im passiven Wortschatz des Kindes vorhanden ist. Ein weiterer Grund für fehlerhafte oder fehlende Lösungen kann sein, dass den Kindern die Prüfung der Teilbarkeit nicht gelingt – zum Beispiel, weil sie die Endstellenregel nicht nutzen können, oder ihnen der Zusammenhang zwischen geraden Zahlen und der Teilbarkeit durch 2 nicht deutlich ist.

Eine weitere Schwierigkeit stellt die Bedingung „und auch“ dar, die interpretiert und beachtet werden muss. So ist es nicht korrekt, eine Zahl, die durch 2 **und** eine andere, die durch 5 teilbar ist, aufzuschreiben, obwohl es von den Kindern so verstanden werden könnte.

Aufgabe 26 in Testheft B:

Um den begonnenen Rechenweg 7 · 7 = 49 nutzen zu können, muss zur Lösung der Aufgabe 7 · 8 noch eine 7 ergänzt werden – erst dann hat man die geforderten acht Siebenen. Als häufigste Fehllösung wird von den Kindern „+8“ als Ergänzung des Rechenwegs angegeben. Dies kann daran liegen, dass (vor allem auch beim Aussprechen der Aufgabe „sieben mal die Acht“) der Multiplikand der Aufgabe die 8 ist, und dass somit zur Lösungsfindung eine weitere Acht ergänzt wird. Erst durch eine tragfähige Einsicht in die Kommutativität der Multiplikation können Multiplikator und Multiplikand die Rolle tauschen.

Aufgabe 33 in Testheft B:

	Die Aufgabe wird von rechts nach links geschrieben, da ja „rückwärts gerechnet“ werden muss.
	Das Ergebnis wird als Divisor genutzt, ohne auf die Korrektheit der Aufgabe zu achten.
	Die Kinder multiplizieren anstatt zu dividieren.

Anregungen für den Unterricht

Addition und Subtraktion als Umkehroperationen

Zusammenhang von Addition und Subtraktion

Bei den Aufgaben 24 in Testheft B, 25 in Testheft C und 27 in Testheft B geht es vor allem um den mathematischen Zusammenhang zwischen der Addition und der Subtraktion und um das Verständnis, dass es sich bei den beiden um Umkehroperationen handelt. Bei den Aufgaben 24 in Testheft B und 25 in Testheft C geht es darüber hinaus noch um ein grundlegendes Verständnis des Gleichheitszeichens: Wer das Gleichheitszeichen nur als „Aufforderung zum Rechnen“ wahrnimmt, dem wird das Verständnis des Gleichheitszeichens erschwert. Dieses Verständnis umfasst vor allem, dass das Gleichheitszeichen auf die Gleichheit auch zwischen Rechenausdrücken hinweist: $13 - 4 = 3 \cdot 3$ (siehe dazu auch nächster Absatz).

Auch Aufgabe 27 in Testheft B ist dann gut zu lösen, wenn der Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion verstanden und genutzt werden kann. Dieser kann gut durch Aufgabenstellungen in einfachen Sachzusammenhängen thematisiert werden:

- „Es gibt insgesamt 600 Lose in zwei Töpfen. In einem Topf liegen 340 Lose. Wie viele müssen dann im anderen Topf liegen? Wie kommst du auf deine Lösung? Begründe dein Vorgehen. Schreibe dein Vorgehen als Rechnung auf.“
- „Peter hat gespart. Wenn seine Oma ihm noch 340 Euro dazu gibt, dann hat er 600 Euro. Wie viel Geld hat Peter gespart? Wie kommst du auf deine Lösung? Begründe dein Vorgehen. Schreibe dein Vorgehen als Rechnung auf.“

Beide Aufgaben können einerseits als Platzhalteraufgaben notiert werden, aber auch als Subtraktionsaufgaben.
Zahlenmauern sind ein sehr vielseitiges Format, und bieten je nach Leistungsstand der Kinder viele verschiedene Übungs- und Differenzierungsmöglichkeiten. In den folgenden Aufgabenstellungen (v.a. zweiter und dritter Spiegelstrich) können Zusammenhänge zwischen Addition und Subtraktion gut thematisiert und diskutiert werden:

- Zahlenmauern mit vorgegebenen Basissteinen additiv lösen
- Zahlenmauern zu vorgegebenem Deckstein selbst bilden
- Zahlenmauern mit Vorgaben ergänzen
- eigene Zahlenmauern bilden

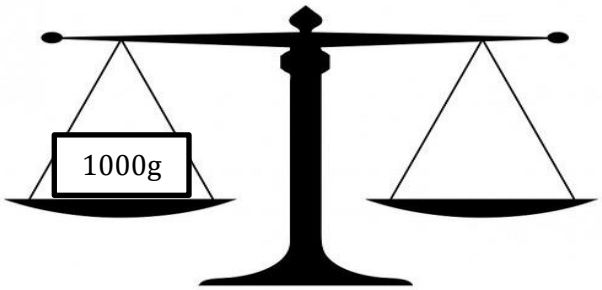
Das Gleichheitszeichen verstehen

Gleichheitsbegriff

Der Gleichheitsbegriff entwickelt sich nicht, wenn Platzhalteraufgaben lediglich auf formale Art gelöst werden, und auch nicht durch die Verwendung von Sprachmustern der Art: „Fehlt die Zahl vorne, rechne ich die Umkehraufgabe.“ Anzustreben ist die mathematische Einsicht in die Bedeutung des Gleichheitszeichens. Dies kann durch einfache Sachzusammenhänge erarbeitet und diskutiert werden. Darüber hinaus kann die Arbeit mit einer Balken- oder sogenannten Rechenwaage zielführend sein. Mit Hilfe der Balkenwaage kann die Bedeutung des Gleichheitszeichens erarbeitet werden.

„Wie viel Gramm fehlen, damit die Waage im Gleichgewicht bleibt?“

„Finde eigene Möglichkeiten.“



Eine weitere Möglichkeit, die Position des Gleichheitszeichens **vor** einem Rechenausdruck zu thematisieren, ist das Finden von Aufgaben, wie beispielsweise:

Erfinde Aufgaben zur Zahl Tausend.

1000 = _____

1000 = _____

1000 = _____

1000 = _____

Findest du auch Minus-, Mal-, und Geteiltaufgaben?

Auch bei Platzhalteraufgaben kann, neben dem Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion, die Rolle des Gleichheitszeichens diskutiert werden. Dabei sollten jeweils Analogien betrachtet und thematisiert werden. Der Schwerpunkt der Diskussion kann dann auf der Beantwortung der Frage liegen:

„Was bedeutet das Gleichheitszeichen bei diesen Aufgaben? Worauf musst du achten? Erkläre einem anderen Kind, was das Gleichheitszeichen hier bedeutet.“

3 + _____ = 10	_____ + 3 = 6
30 + _____ = 100	_____ + 34 = 60
300 + _____ = 1000	_____ + 340 = 600
37 + _____ = 100	_____ - 3 = 6
370 + _____ = 1000	_____ - 34 = 60
	_____ - 340 = 600

Schriftliche Addition und Subtraktion

Verknüpfung verschiedener Darstellungsebenen

Um eine Grundvorstellung zu den schriftlichen Algorithmen zu entwickeln, ist es wichtig, die verschiedenen Darstellungsebenen zu verknüpfen (Handlung, bildliche Darstellung, symbolische Darstellung, Sprache). So können Aufgaben mit Mehrsystem-Material gelegt werden (vgl. Abbildung 1, links) bzw. mit den Zeichen für Hunderter, Zehner und Einer zeichnerisch dargestellt werden (vgl. Abbildung 1, rechts).

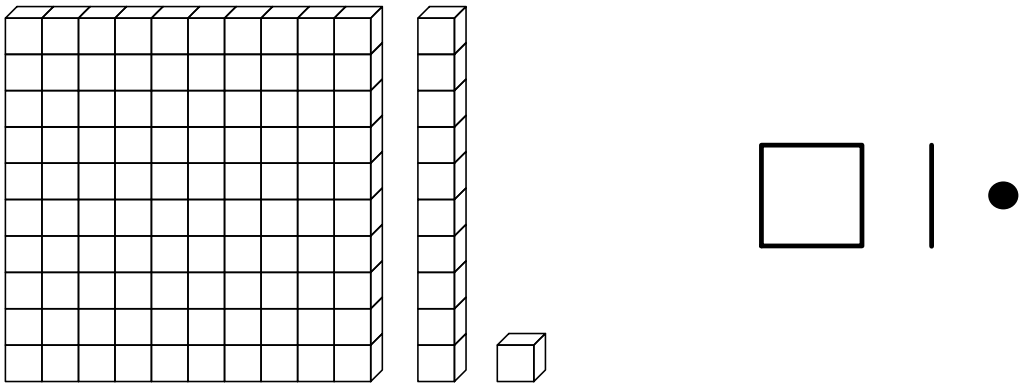


Abbildung 1. Beispiele für Darstellungsebenen zum Aufbau von Grundvorstellungen: Dienes-Material (links) und Zeichen (rechts).

Werden die beteiligten Zahlen mit dem Mehrsystem-Material dargestellt, können verschiedene Aspekte des schriftlichen Algorithmus thematisiert werden:

- Die Bündelungseinheiten (also Einer, Zehner, Hunderter, …) werden stellengerecht angeordnet.
- Die beiden beteiligten Summanden werden untereinander und stellengerecht angeordnet.
- Die jeweiligen Bündelungseinheiten werden stellenweise zusammengefasst (bei der Addition).
- Dabei muss auf mögliche Bündelungen geachtet werden (bei der Addition) – auf diese Weise können dann die Übertrags-Einsen besprochen werden.

Bei der Subtraktion muss insbesondere darauf geachtet werden, wie mit dem Übertrag umgegangen wird. Hier gibt es durch Abziehen mit Entbündeln,

Ergänzen mit Erweitern und Auffüllen verschiedene Möglichkeiten. Gut mit Material nachzuvollziehen ist dabei das Abziehen mit Entbündeln:

- Nur der Minuend wird mit dem Mehrsystem-Material dargestellt. Auch dieser wird stellengerecht angeordnet.
- Jetzt wird stellenweise der Subtrahend abgezogen – beginnend an der Einerstelle.
- Sind beim jeweiligen Stellenwert nicht genügend Objekte des Mehrsystem-Materials vorhanden (wenn zum Beispiel von 2 Zehnern 4 Zehner abgezogen werden sollen), so muss ein Bündel des nächsthöheren Stellenwerts entbündelt werden (in diesem Beispiel wird 1 Hunderter zu 10 Zehnern entbündelt und gelegt).

Exaktes Versprachlichen des Algorithmus und eine übersichtliche Notation (Stellenwerte genau untereinander) ist unerlässlich.

Sobald das Verfahren der schriftlichen Addition und Subtraktion verständnisbasiert mit Material erarbeitet wurde, kann auf Zahlenebene weitergearbeitet werden. Neben einfachen Übungsaufgaben können zur Differenzierung auch Aufgaben zur schriftlichen Addition und Subtraktion mit Ziffernkarten gelegt werden.

- „Ziehe sechs Ziffernkarten und bilde zwei dreistellige Zahlen. Addiere schriftlich. Das Ergebnis soll a) nahe an 500 liegen b) zwischen 300 und 700 liegen c) unter 500 liegen, …“
- „Ziehe sechs Ziffernkarten und bilde zwei dreistellige Zahlen. Subtrahiere schriftlich. Das Ergebnis soll a) nahe an 100 liegen b) zwischen 200 und 600 liegen c) über 400 liegen, …“

Teilbarkeit verstehen

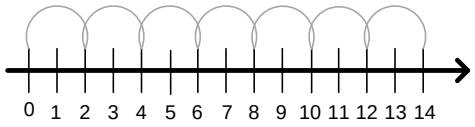
Teilbarkeit

Das Beherrschen und Verstehen von mathematischen Fachbegriffen, wie hier „teilbar“ oder auch „gerade“, „ungerade“, „Vielfaches von/Teiler von“ ist unabdingbar für ein Verständnis für die Zerlegung von Zahlen in Faktoren und das spätere Bruchrechnen.

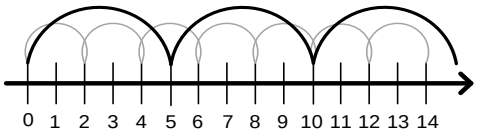
Die Teilbarkeitsregeln durch 2 und 5 können erarbeitet werden. (Endstellenregel):

- Zahlen finden, die durch 2 und/oder durch 5 teilbar sind
- Entsprechende Mal- und Geteiltaufgaben zu diesen Zahlen finden
- Lösungszahlen sortieren und vergleichen
- Teilbarkeitsregel durch 2 und durch 5 formulieren:
  „Eine Zahl ist (ohne Rest) durch 2 teilbar, wenn an der letzten Stelle eine 0,2,4,6 oder 8 steht.“, „Gerade Zahlen sind durch 2 teilbar“
  „Eine Zahl ist (ohne Rest) durch 5 teilbar, wenn an der letzten Stelle eine 0 oder 5 steht.“
  „Eine Zahl mit der Endziffer 0 ist durch 2 und durch 5 teilbar“

Alternativ können die Vielfachen der Zahl auch am Zahlenstrahl markiert werden.



Anschließend wird die zweite Bedingung hinzugenommen (hier: durch 5 teilbare Zahlen, Malfolge der Zahl fünf) und genauso verfahren.



Nun lassen sich die Zahlen identifizieren, die beide Bedingungen erfüllen (hier: alle Vielfachen von 10).

Zur Differenzierung:

5_____ 3_____ 9_____

Ergänze die Zahlen so, dass sie

a) durch 2 teilbar sind.
b) durch 5 teilbar sind.
c) durch 2 und durch 5 teilbar sind.

Dies kann auch durch Ziffernkarten erfolgen, die umgedreht und aufgedeckt werden. Darüber hinaus kann die Anzahl der Bedingungen verändert und für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler auch erweitert werden.

Mögliche Variationen der Aufgabenstellung:

„Schreibe eine Zahl (mehrere Zahlen) auf, die …. ist (sind).

- durch 3 und 5 teilbar
- gerade und durch 3 teilbar
- ein ungerades Vielfaches von 3
- ein Vielfaches von 7 und kleiner als 30
- durch zwei teilbar und ungerade (↗ geht nicht ohne Rest)
- ein Vielfaches von 3, größer 30 und kleiner 60
- ein Teiler von 24 und größer 5
- durch 9 teilbar und größer als 81, aber kleiner als 120“

Zu Differenzierungszwecken könnte man die oben genannten Aufgabenstellungen ausweiten: „Finde alle möglichen Zahlen, *die durch 3 und 5 teilbar sind*, im Zahlenraum bis 50 (100).“

Multiplikation: Strategien verstehen und anwenden

Strategien bei Einmaleinsaufgaben

Strategien können nur flexibel angewandt werden, wenn diese über Arbeitsmittel erarbeitet wurden und wenn das Kind eine Grundvorstellung dazu entwickelt hat. Auch Malaufgaben können über Strategien gelöst werden (Näheres hierzu findet sich im Teil II zum Bereich *Zahlen und Operationen*):

Eine der tragfähigsten Strategien beim Lösen von Multiplikationsaufgaben ist das Zerlegen in sog. Kernaufgaben (·1, ·2, ·5, ·10) bzw. das Herleiten von bekannten Nachbaraufgaben. Am Beispiel der Aufgabe 7 · 8 können das folgende Möglichkeiten sein:

7·8 = 5·8 + 2·8

7·8 = 8·8 – 1·8

8·7 = 5·8 + 2·8

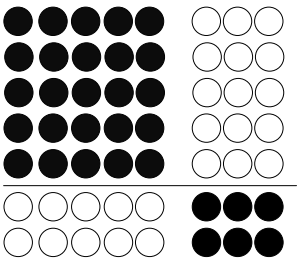
8·7 = 7·7 + 1·7

Das Nutzen von bekannten Nachbaraufgaben kann durch Punktefelder bzw. am Hunderterfeld veranschaulicht werden. Dabei ist es wichtig, dass die Kinder die unterschiedlichen Zusammensetzungen und Zerlegungen der Multiplikationsaufgaben versprachlichen bzw. über die einzelnen Strategien reflektieren (→ Darstellen, Argumentieren, Kommunizieren) können.

7·8 =

5·8 + 2·8 =

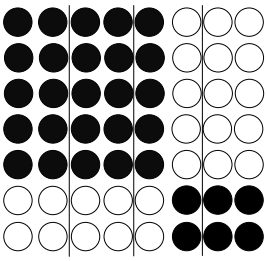
40 + 16 = 56



7·8 = 8·7

2·7 + 2·7 +

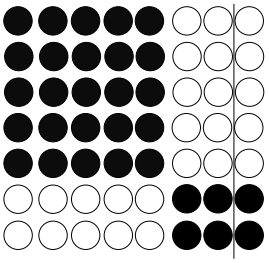
2·7 + 2·7 = 56



7·8 = 8·7 =

7·7 + 1·7 =

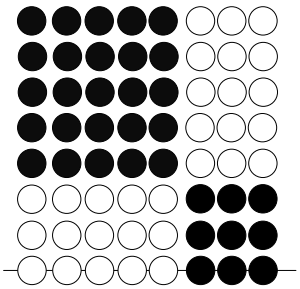
49 + 7 = 56



7·8 =

8·8 – 1·8 =

64 – 8 = 56



Multiplikation und Division als Gegenoperationen

Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division

Haben die Kinder den Zusammenhang zwischen den Operationen Multiplikation und Division verstanden, so können Divisionsergebnisse über die Multiplikationsaufgabe erschlossen werden. Ein gängiges Format, um diesen Zusammenhang zu üben und zu festigen, ist das Format der „Aufgabenfamilien“ (3 Zahlen – 4 Aufgaben). In diesem Format müssen je zwei Tausch- und zwei Umkehraufgaben gefunden werden:

2, 9, 18

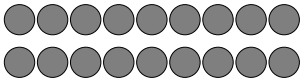
2·9 = 18	18 : 9 = 2
9·2 = 18	18 : 2 = 9

Um einen typischen Fehler zu vermeiden (falsche Leserichtung beim Erstellen eigener Aufgaben), sollte bei den gefundenen Aufgaben in der Leserichtung

von links nach rechts und mit den angegebenen Rechenzeichen nochmals nachgerechnet werden, ob das Ergebnis stimmt.

Um dieses Format auf Verständnisgrundlage nutzen zu können, empfiehlt sich die Thematisierung entsprechender bildlicher Darstellungen (siehe auch „Die Leitidee *Zahlen und Operationen*“ in Teil II)

2 · 9, denn ich sehe zwei Neuner (untereinander)



9 · 2, denn ich sehe neun Zweien (nebeneinander)

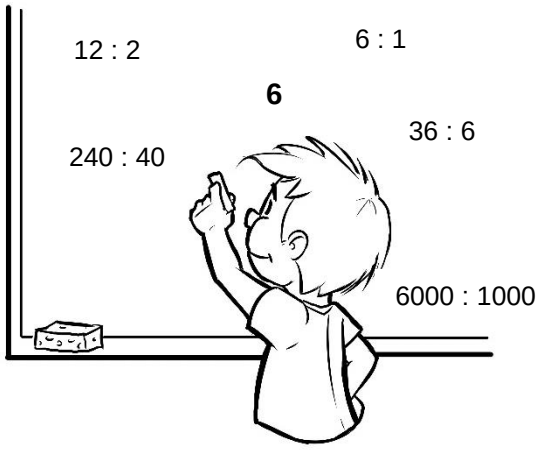
18:2, denn ich sehe 18 Kreise, die kann ich in neun Zweier aufteilen

18:9, denn ich sehe 18 Kreise, die kann ich in zwei Neuner aufteilen

Umkehraufgaben können auch mit Hilfe der Einmaleins-Tabelle automatisiert werden, indem zu den Ergebniszahlen der Tabelle immer wieder die passenden Malaufgaben gesucht und benannt werden (Aufgabe plus Tauschaufgabe).

Als Anwendung und zur Übung eignet sich auch das **Zielzahlen rechnen**:

An die Tafel/auf ein Plakat wird eine Zielzahl geschrieben und die Kinder schreiben zu dieser Zahl passende Divisionsaufgaben. So kann jedes Kind seinem Leistungsstand entsprechend arbeiten.



In Kontexten rechnen

Aufgabe 31 in Testheft C

Paul will 67 Bücher auf dem Flohmarkt verkaufen. Nach einer Stunde hat er 29 Stück verkauft. Nach einer weiteren Stunde hat er nur noch 15 Bücher übrig.

In der zweiten Stunde hat er _____ Bücher verkauft.

Auswertung

RICHTIG	23

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	V
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	Rechenoperationen verstehen und beherrschen (1.2); in Kontexten rechnen (1.3)

Aufgabe 26 in Testheft C

Jan wirft den Würfel fünf Mal und addiert die Augenzahlen. Die Summe beträgt 29.

Er hat _____ Mal eine Sechs gewürfelt.

Auswertung

RICHTIG	4

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	III
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a)

Aufgabe 29 in Testheft B

Jan wirft den Würfel fünf Mal und addiert die Augenzahlen. Die Summe beträgt 29.
Welche Zahlen hat er gewürfelt?

____ ____ ____ ____ ____

Auswertung

RICHTIG	6, 6, 6, 6, 5 (Reihenfolge ist beliebig)

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	II
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a)

Aufgabe 34 in Testheft B

In der Grundschule „Nordstadt“ sind 298 Kinder. In der Grundschule „Südstadt“ sind 472 Kinder.

Wie viele Kinder sind in beiden Schulen zusammen?

_____ Kinder

Auswertung

RICHTIG	770

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	II
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a)

Aufgabe 28 in Testheft B

Elif ist 135 cm groß, ihr Vater ist 188 cm groß.

Wie viel cm ist der Vater größer als Elif?

Er ist _____ cm größer.

Auswertung

RICHTIG	53

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Reproduzieren (I)
Kompetenzstufe Global	II
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a)

Aufgabe 24 in Testheft C

Louis bastelt Figuren aus Kastanien.
Er hat 24 Kastanien gesammelt und braucht für jede Figur 4 Kastanien.

Wie viele Figuren kann er basteln?

_____ Figuren

Auswertung

RICHTIG	6

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	II
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a)

Aufgabenbezogener Kommentar

Rechnen in Kontexten

Die Aufgaben 31 in Testheft C bis 24 in Testheft C sind eingebettet in lebensweltliche Kontexte, die mathematische Informationen enthalten. Das *Rechnen in Kontexten* soll Schülerinnen und Schülern an problemhaltige Aufgaben in Sachzusammenhängen heranführen und damit den Lebensweltbezug des Mathematikunterrichts erfahrbar machen. Kompetenzen werden angebahnt, die Kinder in die Lage versetzen, Anforderungen im Alltag mit Hilfe der Mathematik richtig einzuschätzen und zu bewältigen.

Die Herausforderung dieser Aufgaben besteht darin, den Texten, in denen die Sachsituationen schriftlich festgehalten sind, die relevanten Informationen zu entnehmen. Hierfür muss das jeweilige Sachproblem in die Sprache der Mathematik übersetzt, rechnend gelöst und die Lösung auf den Kontext der Aufgabe zurückbezogen werden, um angemessene Schlussfolgerungen zu formulieren (→ Modellieren). Generell gilt, dass eine bildungs- und fachsprachliche Lesekompetenz von Schülerinnen und Schülern für eine erfolgreiche Bearbeitung von Text- und Sachaufgaben im Mathematikunterricht förderlich ist.

Aufgabe 31 in Testheft C: Hier handelt es sich um eine komplexe Aufgabe, bei der zwei Teilaufgaben zu lösen sind. Dabei sind unterschiedliche Vorgehensweisen möglich.

- Von den 67 Büchern, die Paul verkaufen will, hat er in der ersten Stunde 29 verkauft, also noch 38 übrig (67 – 29 = 38). Nach einer weiteren Stunde hat er noch 15 Bücher übrig, also weitere 23 Bücher verkauft (38 – 15 = 23).
- Möglich wäre auch, zunächst zu berechnen, wie viele Bücher Paul insgesamt verkauft hat. Von den 67 Büchern sind am Ende noch 15 übrig, also hat er 52 Bücher verkauft (67 – 15 = 52). In der ersten Stunde hat Paul 29 Bücher verkauft, also muss er in der zweiten Stunde 23 Bücher verkauft haben (52 – 29 = 23).

Aufgabe 26 in Testheft C und 29 in Testheft B: Diese Aufgaben behandeln denselben Kontext und verwenden dasselbe Zahlenmaterial (fünf Mal würfeln, Summe der Augenzahlen beträgt 29). Die Aufgaben unterscheiden sich nur durch den letzten Satz. Während bei Aufgabe 29 in Testheft B die möglichen Augenzahlen nach fünf Würfen notiert werden sollen, ist bei Aufgabe 26 in Testheft C die Anzahl der Würfe mit der Augenzahl 6 zu notieren. Bei Aufgabe 26 in Testheft C wird damit eine größere Abstraktionsleistung von Schülerinnen und Schülern verlangt. Sie befindet sich daher im schwierigeren Testheft. Aufgabe 29 in Testheft B ist näher am Prozess der Handlung und findet sich im leichteren Testheft.

- Bei beiden Aufgaben ist es möglich systematisch zu probieren, indem mögliche Augenzahlen bei fünf Würfen notiert, die jeweilige Summe an Augenzahlen ermittelt und mit der gewünschten Summe 29 verglichen werden. Schülerinnen und Schüler nähern sich der Lösung der Aufgabe so schrittweise an.

- Ein schnellerer Lösungsansatz gelingt Schülerinnen und Schülern, die erkennen, dass mit der Summe 29 bei fünf Würfen eine hohe Augensumme beschrieben wird, die bei fünfmaligem Würfeln der Augenzahl 6 (5 mal 6 = 30) nur knapp (30 – 1 = 29) überschritten wird. Dies führt zur Lösung, dass viermal die sechs gewürfelt wurde (Aufgabe 26 in Testheft C) und einmal die Augenzahl fünf (4 mal 6 + 1 mal 5 = 29).

Aufgabe 34 in Testheft B: Dieser Aufgabentyp (Rechengeschichte zur Vereinigung zweier Mengen) ist einer der einfachsten Typen von Sachaufgaben – bereits zu Schulbeginn können viele Kinder diesen Aufgabentypen mit entsprechendem Zahlenmaterial lösen. Gefordert ist die Addition zweier Zahlen. Dies kann durch die Anwendung des schriftlichen Verfahrens erfolgen oder durch das Nutzen von Rechenvorteilen: „Ich addiere zunächst 300 und ziehe dann wieder 2 ab."

Aufgabe 28 in Testheft B: Bei dieser Aufgabe soll die Differenz zweier Größenangaben berechnet werden. Hierbei muss ausgehend von der Frage nach dem Größenunterschied die Grundvorstellung der Subtraktion als Ergänzen aktiviert bzw. eine Platzhalteraufgabe gefunden und gelöst werden. Auch die Lösung über Subtraktion ist möglich. Dabei wird die Größenangabe von Elif von der des Vaters subtrahiert bzw. von der Größe Elifs zur Größe des Vaters ergänzt (188 – 135 = 53 bzw. 135 + 53 = 188).

Aufgabe 24 in Testheft C: Aus diesem Kontext ist eine Divisionsaufgabe abzuleiten, wobei die Vorstellung des Aufteilens aktiviert werden muss: Es muss erfasst werden, dass 24 Kastanien vorhanden sind und für eine Figur jeweils 4 Kastanien benötigt werden. Gefragt ist dann nach der Anzahl der Figuren, die gebastelt werden können. Daraus ergibt sich die Aufgabe: 24 : 4 = 6.

Mögliche Schwierigkeiten

Sprachliche Aspekte und Lesekompetenz

Textbasierte Aufgaben (auch in Verbindung mit Fachsprache, wie z. B. bei den Aufgaben 26 in Testheft C und 29 in Testheft B: *addieren, Summe*) können eine besondere Herausforderung für Schülerinnen und Schüler darstellen. So kann eine nicht hinreichend entwickelte schulsprachliche Lesekompetenz dazu führen, dass der Kontext und die darin enthaltene Aufgabenstellung der Aufgaben nicht erschlossen werden können. Des Weiteren kann es sein, dass Schülerinnen und Schüler sich an Oberflächenmerkmalen der Aufgaben orientieren und Aufgabenstellungen nicht hinreichend genau lesen. Ein Hinweis sind Lösungen der Schülerinnen und Schüler, die zwar auf Rechnungen mit dem in der Aufgabe dargebotenem Zahlenmaterial schließen lassen, nicht aber zu plausiblen Ergebnissen führen.

Zudem kann es sein, dass wichtige Schlüsselwörter (Aufgabe 34 in Testheft B: ‚zusammen', Aufgabe 28 in Testheft B: ‚größer als', Aufgabe 24 in Testheft C: ‚für jede') überlesen oder ihnen nicht die entsprechende Bedeutung beigemessen wird.

Rechen- und Modellierungsfehler

Rechenfehler bei der Berechnung der Summen möglicher Augenzahlen führen zu falschen Ergebnissen (hier am Beispiel der Aufgabe 29 in Testheft B).

Jan wirft den Würfel fünf Mal und addiert die Augenzahlen. Die Summe beträgt 29.

Welche Zahlen hat er gewürfelt?

6 5 5 6 6

Ein Grund für einen sog. **Modellierungsfehler** kann das Ausgehen von falschen Annahmen sein. Bei der Lösung der Aufgabe 29 in Testheft B muss von der Annahme ausgegangen werden, dass es sich (wie im Bild angedeutet) um einen sechsseitigen Spielwürfel handelt und daher Augenzahlen größer als sechs bei einem Wurf nicht möglich sind. Der hier dargestellte Fehler ist möglicherweise darauf zurückzuführen, dass der Schüler oder die Schülerin nur die 29 betrachtet und den Sechserwürfel mit der Sechs als höchster Augenzahl unberücksichtigt lässt.

Jan wirft den Würfel fünf Mal und addiert die Augenzahlen. Die Summe beträgt 29.

Welche Zahlen hat er gewürfelt?

7 7 7 7 1

Anregungen für den Unterricht

Sinnerfassendes Lesen und Rechnen in Kontexten

Bei Verständnisschwierigkeiten zu den in den Aufgaben formulierten Kontexten, bieten sich Zugänge an, die das sinnverstehende Erfassen der Aufgabenstellungen und der damit zusammenhängenden mathematischen Problemstellung zum Ziel haben. Das Auffinden von wichtigen Informationen und das Erfassen des gegebenen Zusammenhangs ist für das erfolgreiche Rechnen in Kontexten ausschlaggebend. Deshalb sollte dies auch Schwerpunkt der Arbeit im Unterricht sein. Wichtig ist es, generell den Bezug zum Kontext herzustellen, da die Orientierung an Signalwörtern nicht immer günstig und hilfreich ist. So könnte zum Beispiel der Aufgabentext von Aufgabe 34 in Testheft B in verschiedenen Formulierungen vorliegen, die alle unterschiedliche Operationen fordern würden, obwohl die Frage gleichbleibt:

- In der Grundschule „Nordstadt“ sind 298 Kinder. In der Grundschule „Südstadt“ sind 472 Kinder.
- In der Grundschule „Nordstadt“ sind 298 Kinder. In der Grundschule „Südstadt“ sind 472 Kinder mehr als in der Grundschule „Nordstadt“.
- In der Grundschule „Südstadt“ sind 472 Kinder. Das sind 298 mehr als in der Grundschule „Nordstadt“.

„Wie viele Kinder sind in beiden Schulen zusammen?“

- 298 + 472
- 298 + 298 + 472
- 472 – 298 + 472

Vor allem in den letzten Beispielen wird deutlich, dass die ausschließliche Orientierung an den Signalwörtern „mehr als“ noch keine angemessene Modellierung der Aufgabe ermöglicht. Erst die Auseinandersetzung mit dem Kontext ermöglicht das Finden einer Rechnung.

Dabei werden auch die allgemeinen mathematischen Kompetenzen, wie das Darstellen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren und Problemlösen in den Fokus des Unterrichts gerückt. Offene Fragen, wie „Wer kann uns sagen, worum es in der Aufgabe geht?“ „Wie hast du gerechnet/gedacht? Erkläre, warum du so gerechnet hast?“ regen zum Austausch und zum Nachdenken über Lösungswege an.

Sehr anschaulich wird es, wenn aus Kontexten Handlungen abgeleitet werden können wie in der Aufgabe 24 in Testheft C:

Louis bastelt Figuren aus Kastanien.
Er hat 24 Kastanien gesammelt und braucht für jede Figur 4 Kastanien.

Wie viele Figuren kann er basteln?

_____ Figuren.

Die Schülerinnen und Schüler erhalten Kastanien oder andere Materialien (Steckwürfel, Stäbchen o.a.) und legen die Aufgabe. Die Lehrkraft kann nun mit Fragen unterstützen:

- Wie viele Kastanien hat Louis gesammelt?
- Wie viele Kastanien braucht er für eine Figur?
- Lege immer 4 Kastanien für eine Figur. Wie viele Figuren kannst du legen?

Für eine aktive Auseinandersetzung mit dem Kontext ist auch das Erarbeiten von Fragen sinnvoll. So kann z. B. bei der Aufgabe 28 in Testheft B überlegt werden, welche Fragen sich noch stellen lassen.

Elif ist 135 cm groß, ihr Vater ist 188 cm groß.

Wie viel cm ist der Vater größer als Elif?

Er ist _____ cm größer.

- Wie viel cm ist Elif kleiner als der Vater?
- Wie lang wäre die Strecke, wenn die beiden sich der Länge nach aneinander auf den Boden legen würden?
- Wie viel cm ist Elifs Vater kleiner als eine Tür hoch ist?
- Wenn Elif auf den Schultern ihres Vaters stehen würde – könnten sie dann in eurem Klassenraum stehen?

Möglich ist es auch Fragen vorzugeben und die Schülerinnen und Schüler entscheiden zu lassen, welche Fragen beantwortet werden können oder nicht. Hier am Beispiel der Aufgabe 31 in Testheft C:

Paul will 67 Bücher auf dem Flohmarkt verkaufen. Nach einer Stunde hat er 29 Stück verkauft. Nach einer weiteren Stunde hat er nur noch 15 Bücher übrig.

- Wie lange war Paul auf dem Flohmarkt?
- Wie viele Bücher hat er insgesamt verkauft?
- Wie viel Geld hat Paul eingenommen?
- Wie viele Bücher hatte Paul nach der ersten Stunde übrig?

Selbst sinnvolle Sachaufgaben zu vorgegebenen Geschichten, Sachverhalten oder Termen zu formulieren, stellt auch für gute Rechner oft eine besondere Herausforderung dar.

Formuliere eine Aufgabe zum Bild.

z. B.: „Für eine Marionette brauche ich 4 Kastanien. Wie viele Kastanien brauche ich für 3 Marionetten?“

Formuliere eine Aufgabe zur Rechnung.

$23 \cdot 2 + 10$

z. B.: „Die Lehrerin kopiert für jedes Kind der Klasse zwei Arbeitsblätter. Zur Sicherheit kopiert sie noch weitere 10 Arbeitsblätter. In der Klasse sind 23 Kinder. Wie viele Arbeitsblätter hat die Lehrerin kopiert?“

Fachsprachliche und inhaltlich-kontextuelle Erarbeitung

Die Aufgabenstellung der Aufgaben 26 in Testheft C und 29 in Testheft B könnte mit Schülerinnen und Schülern der Klasse mit Würfeln nachgestellt werden. Bei sprachlichen Unsicherheiten könnten im Unterrichtsgespräch dann auch die Bedeutung der fachsprachlichen Begrifflichkeiten, wie *addieren* und *Summe* oder auch bildungssprachliche Wörter, wie *Augenzahlen* im Unterrichtsgespräch geklärt werden. Das schrittweise Ändern der Bedingungen (Anzahl der Würfel bzw. Würfe, Höhe der Summe) eröffnet Differenzierungsmöglichkeiten mit Rätselcharakter und fördert den Übergang vom konkreten Tun zu flexibleren, mentalen Operationen:

- „Welche Summen der Augenzahlen sind möglich, wenn man zweimal/dreimal würfelt?“
- „Welches ist die größte/kleinste Summe an Augenzahlen bei zwei-/drei-/viermaligen Würfeln?“
- „Sevil würfelt dreimal. Die Augensumme beträgt 4. Welche Augenzahlen hat sie gewürfelt?“

Überschlagen und Plausibilitätsprüfung

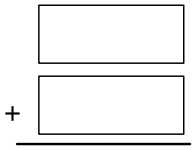
Aufgabe 25 in Testheft B

Nino rechnet Plus-Aufgaben mit diesen Zahlen:

375	428	189	210	444	205	493	321

Mit welchen beiden Zahlen bekommt er das größte Ergebnis?

Schreibe auf.



Auswertung

RICHTIG	493 + 444 ODER 444 + 493 Die Summenbildung ist nicht erforderlich.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	I
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren (1.2.g); das Ergebnis auf Plausibilität prüfen (1.3.b)

Aufgabe 32 in Testheft B

Emilia soll feststellen, welches Ergebnis unter 100 € liegt.
Bei **einer** Rechnung reicht es aus, nur zu überschlagen.

Kreuze sie an.

☐ 46,32 € + 53,69 €

☐ 22,59 € + 47,44 €

☐ 83,47 € + 16,59 €

☐ 12,41 € + 87,72 €

Auswertung

RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	III
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln (3.2)
Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	bei Sachaufgaben entscheiden, ob eine Überschlagsrechnung ausreicht oder ein genaues Ergebnis nötig ist (1.3.c)

Aufgabe 33 in Testheft C

In einer Gärtnerei werden insgesamt 220 Tulpen verkauft.
Die Hälfte der Tulpen ist gelb. 50 Tulpen sind rot. Die restlichen Tulpen sind weiß.
Peter behauptet: „Es sind 170 weiße Tulpen."

Hat Peter recht? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.

Auswertung

RICHTIG	NEIN wurde angekreuzt UND eine richtige Begründung wurde gegeben, z. B.: • Es sind 60 weiße Tulpen. • Die Hälfte von 220 ist 110 und davon 50 abgezogen kann nicht 170 ergeben. • Rechnung: 220:2 = 110 110 – 50 = 60. Es sind nur 60 weiße Tulpen.
FALSCH	JA wurde angekreuzt ODER NEIN wurde angekreuzt UND/ODER keine, eine falsche oder eine unvollständige Begründung gegeben.

Aufgabenmerkmale

Anforderungsbereich	Zusammenhänge herstellen (II)
Kompetenzstufe Global	IV
Bildungsstandard/s - Allgemeine Kompetenzen	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1); Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)

Bildungsstandard/s - Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)	das Ergebnis auf Plausibilität prüfen (1.3.b)

Aufgabenbezogener Kommentar

In diesen Aufgaben ist nicht direkt eine Rechnung oder ein Ergebnis gefragt, vielmehr geht es um den Zahlensinn, das Abschätzen eines Ergebnisses und das Prüfen von Aussagen auf Plausibilität.

Überschlags-rechnungen

Das Überschlagen stellt eine hilfreiche Strategie zur ungefähren Bestimmung eines Ergebnisses dar. Eine Möglichkeit des Überschlagens ist das Vereinfachen, das „Glätten“ des Zahlenmaterials innerhalb der Rechnung. Grundlage für das Überschlagen ist eine tragfähige Vorstellung zu Zahlen und die Kenntnis des Stellenwertsystems, auch im Bereich der Dezimalzahlen (siehe Aufgaben *größte-kleinste-Summe* und *Unter 100*). Der Grad der Genauigkeit des Überschlags ist kontextgebunden.

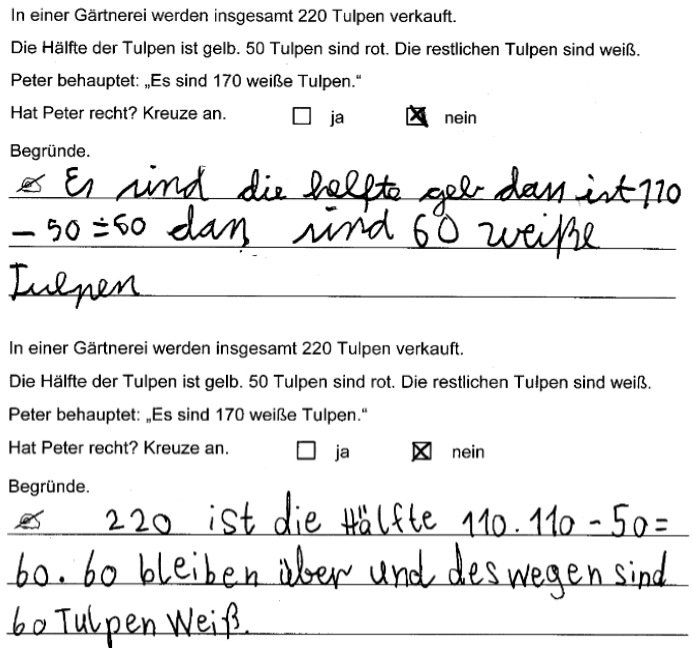
Es wird unterschieden zwischen *direktem Überschlagen* bei konkreten anzahlorientierten Fragestellungen („Wie viel ist es ungefähr?“) und dem *indirekten Überschlagen* („Kann das stimmen?“, „Kann es sein, dass …“). Das indirekte Überschlagen zielt nicht zwingend auf ein konkretes Ergebnis ab, sondern hier wird der Überschlag als eine hilfreiche Lösungsstrategie genutzt, um eine plausible Bestimmung des Ergebnisses *indirek*t zu erhalten. So ist eine Rechnung hier nicht notwendig, denn die Aufgabe kann auch durch das *Erkennen und Nutzen von Zahlbeziehungen* (die Hälfte von 220 sind schon weniger als 170 - siehe Aufgabe 33 in Testheft C) gelöst werden. Gleichwohl sind beiden Varianten gemein, dass das Ergebnis einer Plausibilitätsprüfung standhalten muss, es muss sich auf die Ausgangssituation rückbezogen werden.

Bei Aufgabe 25 in Testheft B müssen von den Zifferkarten die beiden größten Zahlen durch das Vergleichen des Zahlenmaterials gefunden werden, um auch die größte Summe zu erhalten. Kontrollierendes Rechnen ist nicht erforderlich.

Auch in Aufgabe 32 in Testheft B ist es für die Lösung ausreichend, das *Zahlenmaterial* (in diesem Fall *Eurobeträge)* überschlagend zu verknüpfen.

In Aufgabe 33 in Testheft C ist eine mathematische Schlussfolgerung gefordert. Haben sich die Kinder den Kontext erschlossen (Signalwort: *die Hälfte)*, reicht bei der Argumentation ein Überschlagen (z. B. Die Hälfte, also 110, sind gelb, dann können nicht 170 weiß sein, weil das dann mehr als 220 sind). Es ist auch eine rechnerische Begründung möglich, bei der sich die Begründung z. B. durch Worte wie „dann“ oder „deswegen“ zeigt.

Zum Beispiel:



In einer Gärtnerei werden insgesamt 220 Tulpen verkauft.
Die Hälfte der Tulpen ist gelb. 50 Tulpen sind rot. Die restlichen Tulpen sind weiß.
Peter behauptet: „Es sind 170 weiße Tulpen."
Hat Peter recht? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein
Begründe.
Es sind die Hälfte gelb das ist 110 − 50 = 60 dann sind 60 weiße Tulpen

In einer Gärtnerei werden insgesamt 220 Tulpen verkauft.
Die Hälfte der Tulpen ist gelb. 50 Tulpen sind rot. Die restlichen Tulpen sind weiß.
Peter behauptet: „Es sind 170 weiße Tulpen."
Hat Peter recht? Kreuze an. ☐ ja ☒ nein
Begründe.
220 ist die Hälfte 110. 110 − 50 = 60. 60 bleiben über und deswegen sind 60 Tulpen Weiß.

Mögliche Schwierigkeiten

Aufgabenstellung falsch interpretiert

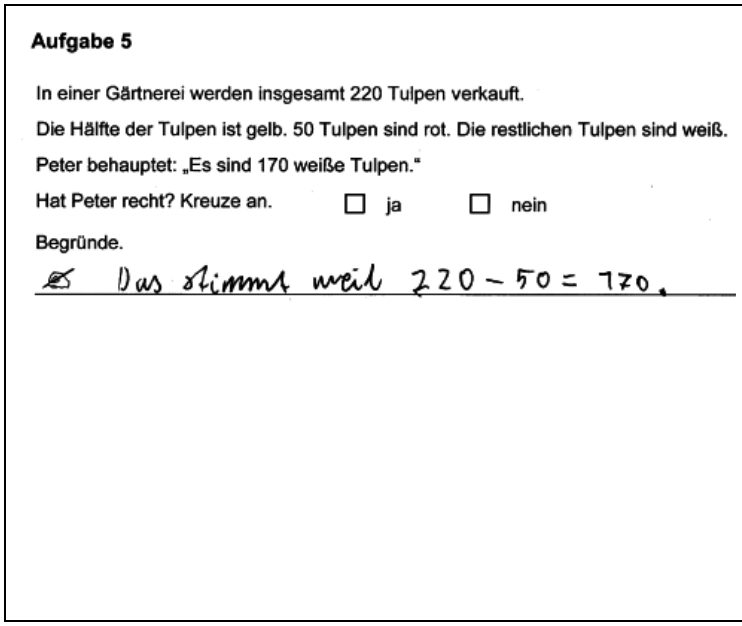
(Aufgabe 25 in Testheft B)

Bei der Erprobung der Aufgaben wurde das Missverstehen der Aufgabenstellung als häufige Fehlerursache identifiziert.

Nino rechnet Plus-Aufgaben mit diesen Zahlen: 375 428 189 210 444 205 493 321 a) Mit welchen beiden Zahlen bekommt er das größte Ergebnis? Schreibe auf. 493 + 493 986	Es wurde nicht beachtet, dass zwei verschiedene der Zahlen zu nutzen sind.
Nino rechnet Plus-Aufgaben mit diesen Zahlen: 375 428 189 ~~210~~ 444 ~~205~~ 493 321 a) Mit welchen beiden Zahlen bekommt er das größte Ergebnis? Schreibe auf. 210 + 205 475	Es wurde die kleinste Summe gesucht.

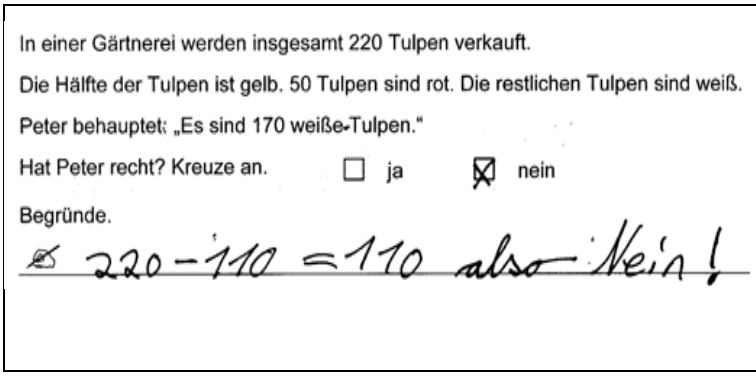
Entnahme der Informationen nicht ausreichend

(Aufgabe 33 in Testheft C)

	Unzureichendes „Verarbeiten" der Textinformationen zu einer Rechenoperation: „Überlesen" des Satzes, dass die Hälfte der Tulpen gelb ist. Ein Grund dafür kann sein, dass nur die als Zahlzeichen notierten Angaben berücksichtigt werden.

Fehlender Rückbezug des Ergebnisses zur Ausgangssituation

(Aufgabe 33 in Testheft C)

	Es ist ein guter Begründungsansatz zu erkennen, der Rückbezug zur Ausgangssituation (110 ist schon weniger als 170) fehlt aber.

Anregungen für den Unterricht

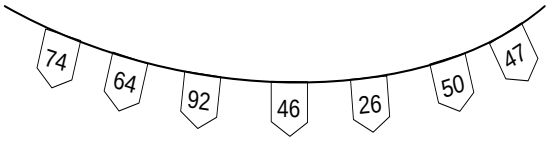
Anregungen zur Weiterarbeit ausgehend von Aufgabe 25 und Aufgabe 32 in Testheft B:

Der tradierte mathematische Dreiklang mit Überschlag, Rechnung und Plausibilitätsprüfung (Probe) fällt vielen Schülerinnen und Schülern schwer, da das Rechnen häufig als „Königsweg" angesehen wird. Einen Überschlag nehmen Kinder teilweise erst nach der Rechnung vor und richten diesen dann nach dem Ergebnis aus. Vor dem Hintergrund der guten Zugänglichkeit zu elektronischen Rechnern im Handy beispielsweise, erhält das Überschlagen immer größeres Gewicht. Es ist daher ratsam, es als eigenständiges Aufgabenfeld im Unterricht zu betrachten. In einigen Sachzusammenhängen ist es sogar ratsam, nur einen Überschlag vorzunehmen.

Zahlen unter der Lupe

Als Kopfrechenübung werden Zahlkarten dargeboten, die von den Kindern unter die Lupe genommen werden.

Die Kinder beschreiben ihre Entdeckungen:



- Die Zahlen sind fast alle gerade.
- Da ist eine Quadratzahl.
- Da sind zwei Nachbarzahlen: 46 und 47

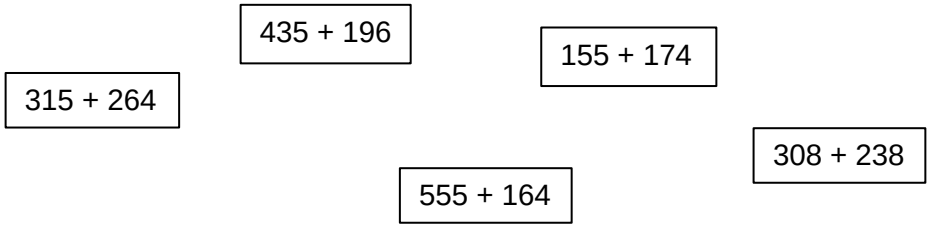
Fragestellungen dazu könnten sein:

- „Welche zwei Zahlen ergeben die größte Summe?“
- „Welche zwei Zahlen ergeben die kleinste Differenz?“
- „Kannst du aus drei Zahlen eine ungerade Summe bilden?“
- „Zwischen welchen Hunderten liegt das Ergebnis, wenn alle Zahlen addiert werden? Überschlage.“

Es können Zusammenhänge erkannt werden (→Argumentieren), die Fachbegriffe (→ Kommunizieren) werden wiederholt und schließlich werden die Zahlen zum Überschlagen genutzt.

Bilde eine Reihenfolge, ohne zu rechnen

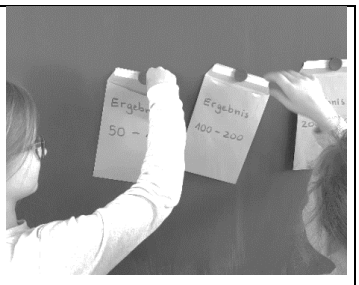
Die Aufgaben sollen nach der Größe ihres Ergebnisses sortiert werden mit Hilfe des Überschlags.



Aufgaben finden

Es stehen Kästen oder Briefumschläge mit Beschriftung bereit. Die Beschriftung entspricht jeweils einem Ergebnisintervall, welches durch die Formulierung entsprechender Aufgaben getroffen werden soll. Nach dem Motto: „Heute überschlagen wir“ denken sich die Schülerinnen und Schüler Aufgaben aus, notieren diese auf kleine Zettel und ordnen sie den entsprechenden Kästen zu. Das Ergebnis wird nur per Überschlag ermittelt.
Eine Differenzierung ergibt sich durch die offene Aufgabenstellung, kann aber durch Vorgaben noch erweitert werden.

- Nutzung der Null ist verboten
- Multiplikationsaufgaben werden gesucht
- Aufgaben mit drei Summanden



Geldschein zuordnen

Die Schülerinnen und Schüler überschlagen Kassenzettel, bei denen die Summe abgeschnitten wurde. Sie entscheiden, welcher Geldschein bzw. welche Geldscheine die kleinstmögliche Bezahlung darstellt. Diese Übung simuliert einen wichtigen Aspekt des Überschlagens, die Frage „Reicht das Geld?“ oder „Wie teuer wird mein Einkauf etwa?“ Durch Aufgaben dieser Art wird darüber hinaus ein Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler hergestellt.	

Anregungen zur Weiterarbeit ausgehend von Aufgabe 33 in Testheft C:

Plausibilitätsprüfung

Grundlegend für die Lösung von Sachaufgaben ist die Erschließung des Kontextes. (Anregungen finden sich im Abschnitt *„Rechnen in Kontexten“)*. Überschlagendes Rechnen ist vor allem bei Aufgaben, die eine Plausibilitätsprüfung einfordern, von Bedeutung.

Mit Hilfe der Impulse „Kann das stimmen? Kann das sein?“ im Rahmen einer sachbezogenen Aufgabenstellung, wird die kritische Auseinandersetzung mit mathematischen Angaben in Sachtexten bzw. Sachaufgaben herausgefordert, indem diese auf Plausibilität überprüft werden. Dazu sollte der Lerngegenstand hinreichend Substanz besitzen, damit keine schematische Abarbeitung (Frage – Rechnung – Antwort) erfolgt, sondern die Kinder kritisch über die Sach- und Zahleninformationen nachdenken. Zusätzlich müssen die angegebenen Informationen genau geprüft werden: Welche Informationen sind wichtig, welche sind es nicht? (vgl. Abschnitt „Rechnen in Kontexten“). Hier kann es sinnvoll sein, das gegebene Zahlenmaterial zu vereinfachen, zu „glätten“, um zu (über)prüfen, ob die gegebenen Informationen plausibel sind. Eine Beantwortung der Frage „Kann das stimmen?“ darf jedoch nicht mit einem „Ja“ oder „Nein“ beantwortet werden, sondern verlangt eine begründete Antwort (→ *Darstellen,* → *Argumentieren,* → *Begründen*).

Beispiele:

- „Kann es stimmen, dass sich in einem 1 km langen Stau 1000 Menschen in den Autos befinden?“
- „Kann das stimmen? Heute wird zum 1000. Mal die Sendung *Blinky* ausgestrahlt. Sie läuft seit knapp 10 Jahren einmal pro Woche.“

Literaturverzeichnis

Benz, C. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100.* Hildesheim: Franzbecker.

Hengartner, E., Hirt, U., Wälti, B. & Primarschulteam Lupsingen. (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht.* Leipzig: Klett und Balmer Verlag Zug.

Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen 2013: Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013. (https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm).

Kultusministerkonferenz 2005: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss vom 15.10.2004. (https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject und http://www.kmk.org/bildung-schule/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards/ueberblick.html).

Padberg, F. & Benz, C. (2011). Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Springer Spektrum.

Reiss, K., Roppelt, A., Haag, N., Pant, H. A. & Köller, O. (2012). Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik (S. 72-84). Münster: Waxmann.

Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. Grundschule, 40 (10), 34-37.

Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule (S. 120-141). Weinheim: Beltz.

Schulz, A. (2014). Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften. Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen. Heidelberg: Springer Spektrum.

Vollrath, H.-J. (1984). Methodik des Begrifflehrens im Mathematikunterricht. Stuttgart: Klett.

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (2012). Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen Verlag.

Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule (S. 169-196). Weinheim: Beltz.

Anhang – Nummerierung der einzelnen Kompetenzen

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der KMK vom 15.10.2004 sind die einzelnen Kompetenzen nicht durchnummeriert aufgelistet. Aus diesem Grunde findet sich zur Erleichterung der praktischen Arbeit mit dem Material in Teil III hier eine nummerierte Auflistung, die optional verwendet und separat ausgedruckt werden kann.

Ergänzung der allgemeinen mathematischen Kompetenz *Technische Grundfertigkeiten*

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der KMK vom 15.10.2004 ist die allgemeine mathematische Kompetenz *Technische Grundfertigkeiten* noch nicht enthalten. Eine inhaltlich ähnlich beschriebene allgemeine mathematische Kompetenz findet sich allerdings bereits bei den Bildungsstandards für den Sekundarbereich („Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“). Mittlerweile wurden im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik auch für den Primarbereich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der *Technischen Grundfertigkeiten* ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (vgl. Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ vom 29.10.2008 unter

http://www.iqb.hu-berlin.de/bista/dateien/Mathe_primar.pdf.

Im Gegensatz zu den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen ist diese Dimension allerdings dort nicht näher aufgeschlüsselt. Mit Bezug auf Winkelmann & Robitzsch (2009) lassen sich (analog zu den Standards für den Sekundarbereich) folgende Aspekte als technische Grundfertigkeiten subsumieren:

- Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen
- symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt
- mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen

Literatur

Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Weinheim: Beltz.

Schipper, W. (2009): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Katalog der allgemeinen mathematischen Kompetenzen	
Kennung	**Beschreibung**
A-0	Technische Grundfertigkeiten
	• Mit Zahlen, Rechenausdrücken arbeiten oder Berechnungen vornehmen, mit geometrischen Elementen arbeiten oder Berechnungen vornehmen • symbolische und formale Sprache in Arithmetik und Geometrie verständig benutzen, in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt • mathematische Werkzeuge (wie Zirkel, Geodreieck, Lineal) sinnvoll und verständig einsetzen
A-1	Problemlösen
A-1.1	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden
A-1.2	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z.B. systematisch probieren)
A-1.3	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen
A-2	Kommunizieren
A-2.1	eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren
A-2.2	mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden
A-2.3	Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten
A-3	Argumentieren
A-3.1	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen
A-3.2	mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln
A-3.3	Begründungen suchen und nachvollziehen
A-4	Modellieren
A-4.1	Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen
A-4.2	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen
A-4.3	zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren
A-5	Darstellen
A-5.1	für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen
A-5.2	eine Darstellung in eine andere übertragen
A-5.3	Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten

Katalog der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen	
Kennung	**Beschreibung**
I-1	Zahlen und Operationen
I-1.1	Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen
I-1.1.a	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen
I-1.1.b	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen
I-1.1.c	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z.B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden)
I-1.2	Rechenoperationen verstehen und beherrschen
I-1.2.a	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen
I-1.2.b	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen
I-1.2.c	mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden
I-1.2.d	verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren
I-1.2.e	Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen
I-1.2.f	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden
I-1.2.g	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren
I-1.3	in Kontexten rechnen
I-1.3.a	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben
I-1.3.b	das Ergebnis auf Plausibilität prüfen
I-1.3.c	bei Sachaufgaben entscheiden, ob eine Überschlagsrechnung ausreicht oder ein genaues Ergebnis nötig ist
I-1.3.d	Sachaufgaben systematisch variieren
I-1.3.e	einfache kombinatorische Aufgaben (z.B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen
I-2	Raum und Form
I-2.1	sich im Raum orientieren
I-2.1.a	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen

I-2.1.b	räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten)
I-2.1.c	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z.B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen)
I-2.2	geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen
I-2.2.a	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen
I-2.2.b	Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen
I-2.2.c	Modelle von Körpern und ebenen Figuren herstellen und untersuchen (Bauen, Legen, Zerlegen, Zusammenfügen, Ausschneiden, Falten...)
I-2.2.d	Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen
I-2.3	Einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen
I-2.3.a	ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern)
I-2.3.b	Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen
I-2.3.c	symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln
I-2.4	Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen
I-2.4.a	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen
I-2.4.b	Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen
I-2.4.c	Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen
I-3	Muster und Strukturen
I-3.1	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen
I-3.1.a	strukturierte Zahldarstellungen (z.B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen
I-3.1.b	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z.B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen
I-3.1.c	arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben
I-3.2	funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen
I-3.2.a	funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z.B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen
I-3.2.b	funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen
I-3.2.c	einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen
I-4	Größen und Messen

I-4.1	Größenvorstellungen besitzen
I-4.1.a	Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte kennen
I-4.1.b	Größen vergleichen, messen und schätzen
I-4.1.c	Repräsentanten für Standardeinheiten kennen, die im Alltag wichtig sind
I-4.1.d	Größenangaben in unterschiedlichen Schreibweisen darstellen (umwandeln)
I-4.1.e	im Alltag gebräuchliche einfache Bruchzahlen im Zusammenhang mit Größen kennen und verstehen
I-4.2	mit Größen in Sachsituationen umgehen
I-4.2.a	mit geeigneten Einheiten und unterschiedlichen Messgeräten sachgerecht messen
I-4.2.b	wichtige Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt zum Lösen von Sachproblemen heranziehen
I-4.2.c	in Sachsituationen angemessen mit Näherungswerten rechnen, dabei Größen begründet schätzen
I-4.2.d	Sachaufgaben mit Größen lösen
I-5	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit
I-5.1	Daten erfassen und darstellen
I-5.1.a	in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen
I-5.1.b	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen
I-5.2	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen
I-5.2.a	Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich)
I-5.2.b	Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen

Anhang

Übersicht der Aufgabenmerkmale im Basismodul

Aufgabe	Leitidee[2]	Allgemeine mathematische Kompetenzen[3]	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB[4]	Kompetenz-stufe
Aufgabe 1	Zahlen und Operationen	5.2	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b)	I	I
Aufgabe 2	Zahlen und Operationen	1.3	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c)	II	I
Aufgabe 3	Zahlen und Operationen	1.1	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a)	I	II
Aufgabe 4	Zahlen und Operationen	1.1	mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.c)	III	II
Aufgabe 5	Zahlen und Operationen	1.1; 1.2	Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b)	II	IV
Aufgabe 6	Zahlen und Operationen	0	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b)	I	I
Aufgabe 7.1	Größen und Messen	1.1	im Alltag gebräuchliche einfache Bruchzahlen im Zusammenhang mit Größen kennen und verstehen (4.1.e); Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)	II	I

[2] L1 = Zahlen und Operationen, L2 = Raum und Form, L3 = Muster und Strukturen, L4 = Größen und Messen, L5 = Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

[3] Siehe S. 109

[4] AFB: Anforderungsbereich
I = Reproduzieren, II = Zusammenhänge herstellen, III = Verallgemeinern und Reflektieren

Aufgabe	Leitidee[2]	Allgemeine mathematische Kompetenzen[3]	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB[4]	Kompetenz-stufe
Aufgabe 7.2	Größen und Messen	1.1	im Alltag gebräuchliche einfache Bruchzahlen im Zusammenhang mit Größen kennen und verstehen (4.1.e); Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)	II	II
Aufgabe 8	Größen und Messen	1.2	im Alltag gebräuchliche einfache Bruchzahlen im Zusammenhang mit Größen kennen und verstehen (4.1.e); Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)	II	IV
Aufgabe 9	Größen und Messen	1.2; 5.3	Größen vergleichen, messen und schätzen (4.1.b); Sachaufgaben mit Größen lösen (4.2.d)	II	V
Aufgabe 10	Größen und Messen	2.2	Repräsentanten für Standardeinheiten kennen, die im Alltag wichtig sind (4.1.c); im Alltag gebräuchliche einfache Bruchzahlen im Zusammenhang mit Größen kennen und verstehen (4.1.e)	II	II
Aufgabe 11	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	5.2; 5.3	aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen (5.1.b)	II	I
Aufgabe 12	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	3.3	Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen (5.2.b)	II	V
Aufgabe 13	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	1.2	in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen (5.1.a)	I	IV
Aufgabe 14	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	3.1	Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich) (5.2.a); Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen (5.2.b)	II	III
Aufgabe 15	Muster und Strukturen	4.1	funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z.B. Menge -Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a); einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen (3.2.c)	I	I

Aufgabe	Leitidee[2]	Allgemeine mathematische Kompetenzen[3]	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB[4]	Kompetenz-stufe
Aufgabe 16	Muster und Strukturen	1.1	Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	II	I
Aufgabe 17.1	Muster und Strukturen	0	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	I	IV
Aufgabe 17.2	Muster und Strukturen	0	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen (3.1.b)	I	IV
Aufgabe 18	Muster und Strukturen	4.2	funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z.B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen (3.2.a)	II	III
Aufgabe 19	Raum und Form	0	über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen (2.1.a)	I	I
Aufgabe 20	Raum und Form	1.1	Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen (2.3.b)	II	II
Aufgabe 21	Raum und Form	1.2; 5.3	die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen (2.4.a)	II	III
Aufgabe 22	Raum und Form	1.1	Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen (2.2.a)	II	V
Aufgabe 23	Raum und Form	1.1	zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z.B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen) (2.1.c)	II	IV

Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul A (*Zahlen und Operationen*, L1)

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB[5]	Kompetenz-stufe	Did. Hand-reichungen Teil III, Seite
Aufgabe 24 in TH A1	1	Grundlegende Fertigkeiten (0)	mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.c)	I	I	19
Aufgabe 25 in TH A1	2	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren (1.2.g); das Ergebnis auf Plausibilität prüfen (1.3.b)	II	I	44
Aufgabe 26 in TH A1	3	eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren (2.1)	mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.c); verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren (1.2.d)	II	I	22
Aufgabe 27 in TH A1	4	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßigbeherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse aufanaloge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b); Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen (1.2.e)	II	II	20
Aufgabe 28 in TH A1	5	Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a)	I	II	38

[5] AFB: Anforderungsbereich

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB[5]	Kompetenz-stufe	Did. Hand-reichungen Teil III, Seite
Aufgabe 29 in TH A1	6	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a)	II	II	37
Aufgabe 30 in TH A1 und Aufgabe 28 in TH B1	7	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2); mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a)	II	II	22
Aufgabe 31 in TH A1	8	eine Darstellung in eine andere übertragen (5.2)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a); Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen (1.1.b)	I	II	10
Aufgabe 32 in TH A1	9	mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln (3.2)	bei Sachaufgaben entscheiden, ob eine Überschlagsrechnung ausreicht oder ein genaues Ergebnis nötig ist (1.3.c)	II	III	44
Aufgabe 33 in TH A1	10	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßigbeherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse aufanaloge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen (1.2.b)	II	III	23
Aufgabe 34 in TH A1	11	Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a)	II	II	37

Übersicht der Aufgabenmerkmale Ergänzungsmodul B (*Zahlen und Operationen*, L1)

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenz-stufe	Did. Hand-reichungen Teil III, Seite
Aufgabe 24 in TH B1	1	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)	Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben (1.3.a)	II	II	38
Aufgabe 25 in TH B1	2	Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (1.3)	Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren (1.2.g)	I	III	19
Aufgabe 26 in TH B1	3	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1); Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen (4.1)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a)	II	III	36
Aufgabe 27 in TH B1	4	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.f)	II	III	20

Aufgabe	Nr. im Modul	Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen	AFB	Kompetenz-stufe	Did. Hand-reichungen Teil III, Seite
Aufgabe 28 in TH B1 und Aufgabe 30 in TH A1	5	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2); mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden (2.2)	die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen (1.2.a)	II	II	22
Aufgabe 29 in TH B1	6	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen (1.1.a)	II	IV	9
Aufgabe 30 in TH B1	7	Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) (1.2)	sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden) (1.1.c)	II	IV	9
Aufgabe 31 in TH B1	8	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	Rechenoperationen verstehen und beherrschen (1.2); in Kontexten rechnen (1.3)	II	V	36
Aufgabe 32 in TH B1	9	mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden (1.1)	schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden (1.2.f)	II	V	21
Aufgabe 33 in TH B1	10	mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1); Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen (4.2)	das Ergebnis auf Plausibilität prüfen (1.3.b)	II	IV	45